مقدمة:

رأينا في الفصل الثاني كيفية عرض البيانات الإحصائية وتلخيصها في جداول تكرارية أو رسوم بيانية وهذا بهدف الحصول على بعض خصائص المجتمع الإحصائي. ولكن عادة ما تكون الرسوم البيانية غير دقيقة، لذلك وجب أن يكون لدينا مقاييس عددية تصف لنا هذه البيانات، لذلك سوف نتعرض في هذا الفصل إلى مقاييس النزعة المركزية.

- **مفهوم النزعة المركزية:** يقصد بمقاييس النزعة المركزية ميل البيانات للتراكم حول قيمة ما تسمى المتوسط وهناك عدد من المقاييس لقياس هذا الميل منها: المتوسط الحسابي، المنوال، الوسيط.

أولا: المتوسط الحسابي Arithmetic Mean

يعد المتوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية شيوعا واستخداما، ويعرف على أنه:" مجموع القيم مقسوما على عددها"[1]، ويرمز له بالرمز $\bar{X}$.

1-البيانات غير مبوبة (غير المرجحة):

يمكن حساب المتوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n}$$

Σx_i : تمثل قيم المتغير الإحصائي

n: تمثل عدد القيم

مثال1: ليكن لديك علامات مجموعة من الطلبة في مقياس عرض وتحليل البيانات كالتالي:

12، 14، 16، 15، 13، 17، 11، 18، 19.

المطلوب: حساب متوسط علامات الطلبة؟

[1] ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، محاضرات حول الإحصاء 1 مدعمة بتمارين، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة سطيف1، 2013-2014، ، ص 60.

الحل:

$$\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\overline{X} = \frac{12+14+16+15+13+17+11+18+19}{9}$$

$$\overline{X} = \frac{135}{9} = 15$$

متوسط علامات الطلبة في مقياس عرض وتحليل البيانات هو 15

2- **البيانات المبوبة (المرجحة):** إذا كانت لدينا بيانات مبوبة في شكل توزيع تكراري فإن المتوسط الحسابي $\overline{X}$ يحسب بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = \frac{\sum Xi\,ni}{\sum ni} = \frac{X1n1 + X2\,n2 + \cdots \ldots\ldots + Xk\,nk}{\sum_{i=1}^{k} ni}$$

Xi: تمثل قيم المتغير الإحصائي المنفصل

ni تمثل التكرارات المطلقة الموافقة لها

-ويمكن حساب المتوسط الحسابي كذلك بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = fi\,Xi$$

fi تمثل التكرارا النسبي

مثال 2: البيانات التالية تمثل عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة مكونة من 35 مسكن.

قيم المتغير الإحصائي (عدد الغرف) Xi	عدد المساكن ni (التكرار المطلق)	$X_i\ n_i$
1	3	3
2	8	16
3	13	39
4	5	20
5	6	30
المجموع	35	108

$$\bar{X}=\frac{\sum Xi\,ni}{\sum ni} = \frac{108}{35} = 3.08$$

متوسط عدد الغرف في المسكن الواحد هو 3.08

3- المتوسط الحسابي في حالة المتغير الإحصائي الكمي المتصل:

إذا كان لدينا متغير إحصائي كمي متصل فإننا نحسب المتوسط الحسابي بتعويض Xi بمراكز الفئات Ci في المعادلات السابقة أي:

$$\bar{x}= \frac{\sum_{i=1}^{k} ni\ ci}{\sum ni}$$

Ci هي مراكز الفئات وتحسب بالعلاقة التالية: $Ci = \frac{\text{نهاية الفئة+بداية الفئة}}{2}$

مثال 3: ليكن لدينا أجور 100 عامل في إحدى المصانع

الوحدة (10^3دج)

الأجور	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	[100-110[	[110-120[	[120-130[	المجموع
عدد العمال	5	15	20	30	15	10	5	100

المطلوب: أحسب المتوسط الحسابي لهذه الأجور؟

الحل:

الأجور (المتغير الإحصائي)	عدد العمال (التكرار المطلق)	Ci	Ci ni
]70-60]	5	65= $\frac{70+60}{2}$	325
]80-70]	15	75	1125
]90-80]	20	85	1700
]100-90]	30	95	2850
]110-100]	15	105	1575
]120-110]	10	115	1150
]130-120]	5	125	625
المجموع	100	-	9350

متوسط أجور العمال:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Ci\, ni}{\sum ni}$$

$$\overline{X} = \frac{9350}{100} = 93.5 * 10^3$$

متوسط أجور العمال هو 93.5×10^3 دج

4-خصائص وعيوب المتوسط الحسابي:

- **الخصاص:**

-سهولة حسابه.

مشاركة جميع قيم مفرادات الظاهرة في حسابه.

- **العيوب:**

- يتأثر المتوسط الحسابي بالقيم المتطرفة (وهي القيم التي تقع في طرفي الدراسة) مثلا: 55، 49، 13، 11، 10، المتوسط الحسابي لهذه القيم يقدر ب 27.5
- لا يمكن حساب المتوسط الحسابي في جداول التوزيع المفتوحة من البداية أو النهاية وذلك لأنه يعتمد في حسابه على مراكز الفئات (أقل من، أو أكثر من).
- عدم امكانية حسابه في حالة البيانات الوصفية.

ثانيا: المنوال Mode

رأينا أن المتوسط الحسابي لا يمكن حسابة إلا في البيانات الكمية فقط، وسنعرف الآن مقياسا للنزعة المركزية يمكن حسابة في جميع أنواع البيانات سواء أكانت كمية أو نوعية. وهذا المقياس يعرف بالمنوال.

فالمنوال هو المقياس الأكثر تكرارا في جملة من القياسات.[1]

1- البيانات غير المبوبة:

مثال4: أوجد المنوال للبيانات الوصفية التالية:

- جيد، ممتاز، جيد، ممتاز، حسن، متوسط، ممتاز، جيد جدا.

المنوال هو الأكثر تكرارات وعليه المنوال لهذه البيانات هو ممتاز.

- قيمة المنوال للبيانات: 12، 16، 14، 16، 17، 9 هي : M_o= 16 لأنها الأكثر تكرارا من غيرها.
- قيمة المنوال للبيانات: 10، 15، 18، 10، 19، 15 هي: M_O= 10 و Mo = 15
- البيانات التالية: 11، 12، 13، 16، 17، 18، 19 ليس لها منوالا.

2- حساب المنوال في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي كمي منفصل:

يستنتج مباشرة من جدول التوزيع التكراري، مع الإشارة إلى أنه يمكننا أن نجد أكثر من منوال، كما يمكننا ألا نجد ولا منوال.[2]

مثال5: يمثل الجدول أيام التغيب لعمال في مؤسسة ما.

عدد الأيام xi	0	1	2	3	4	5
عدد العمال ni	25	12	14	35	12	8

[1] أنيس اسماعيل كنجو، **الإحصاء والإحتمال**، مكتبة العبيكات، الرياض، الطبعة الأولى، 2000، ص 64.
[2] ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، مرجع سابق، ص 65.

المطلوب: ايجاد المنوال حسابيا؟

الحل: المنوال هو الأكثر تكرارا وهو $M_o=3$ وبالتالي أن التغيب الشائع وسط العمال هو 3 أيام.

3- المنوال في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي متصل:

إذا كان لدينا جدول توزيع تكراري على شكل فئات فإننا نتبع الخطوات التالية لحساب المنوال :[1]

- **تحديد الفئة المنوالية:** وهي الفئة التي تقابل أكبر تكرار عندما تكون أطوال الفئات متساوية.
- **حساب المنوال بطريقة المد الداخلي:**

$$\text{Mo}= Lim_{Mo} + \left[\frac{d_1}{d_1+d_2}\right] A_{Mo}$$

Lim_{Mo}: الحد الأدنى للفئة المنوالية، **d_1:** الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها.

d_2: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة اللاحقة لها، **A_{Mo}:** طول الفئة المنوالية.

مثال 6: ليكن لدينا أجور 100 عامل في إحدى المصانع

الوحدة (10^3دج)

الأجور	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	[100-110[	[110-120[	[120-130[	المجموع
عدد العمال	5	15	20	30	15	10	5	100

المطلوب: أحسب المنوال لهذه الأجور؟

الحل: بما أم طول الفئات متساوية فإن الفئة المنوالية هي: [90-100[والتي يقابلها أكبر تكرار مطلق

وبالتالي: $d_1= 30-20= 10$، $d_2= 30-15= 15$، $A_{Mo}= 100-90= 10$، $Lim_{Mo}= 90$

$$\text{Mo}= Lim_{Mo} + \left[\frac{d_1}{d_1+d_2}\right] A_{Mo}$$

[1] ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، مرجع سابق، ص 68.

$$Mo = 90 + \frac{10}{10+15} X\ 10$$

أغلبية أجور العمال تقدر ب: $Mo = 94 \times 10^3$ دج

4- تحديد المنوال بيانيا:

يحدد المنوال بيانيا بواسطة المدرج التكراري، وهذا باتباع الخطوات التالية[1]:

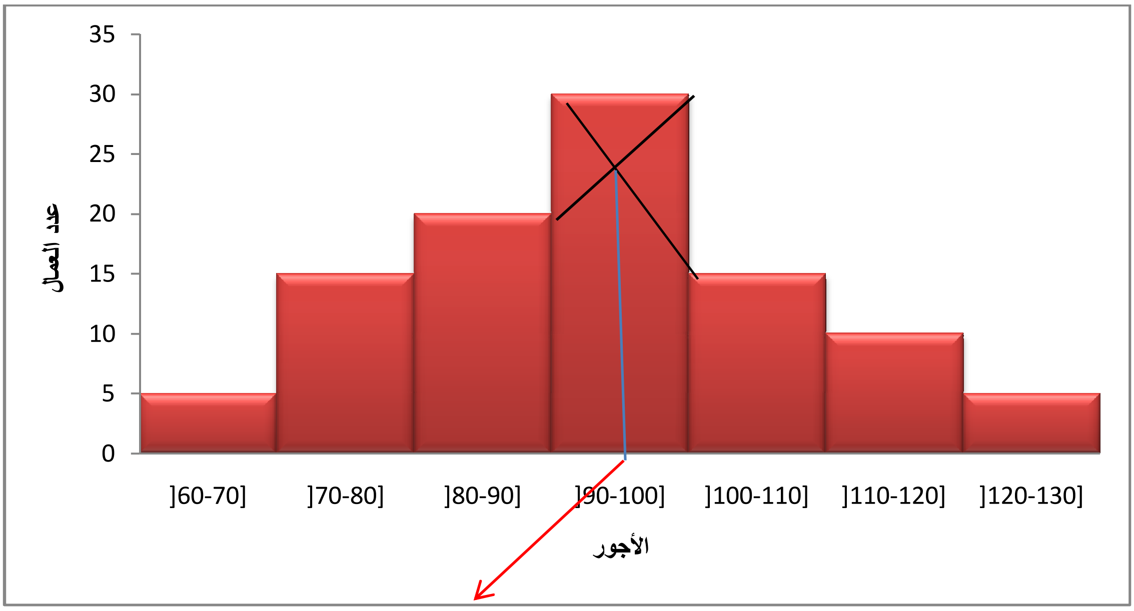
أ- نرسم المدرج التكراري للتوزيع.

ب-نصل بخط مستقيم رأس الحد الأعلى للفئة المنوالية برأس الحد الأعلى للفئة السابقة لها.

ت-نصل بخط مستقيم رأس الحد الأدنى للفئة المنوالية برأس الحد الأدنى للفئة اللاحقة لها.

ث-من تقاطع الخطين السابقين نسقط عمودا على المحور الأفقي ونقطة تقاطعه مع المحور الأفقي تمثل تقديرا لقيمة المنوال بيانيا.

مثال رقم 7: بالرجوع إلى المثال رقم 6 حدد المنوال بيانيا؟



Mo=94

[1] ساعد بن فلاحات، عبد الحميد قطوش، مرجع سابق، ص 66.

5- خواص المنوال:

- **مميزات المنوال:**

- عدم تأثره بالقيم الشاذة.
- صلاحية استخدامه في البيانات الوصفية.

- **عيوبة:**

- غير دقيق ويمكن وجود أكثر من منوال لنفس المجموعة من البيانات.

ثالثا: الوسيط Mediane

- هو أحد مقاييس النزعة المركزية، والذي يأخذ في الاعتبار رتب القيم، ويعرف بأنه القيمة التي يقل نصف عدد القيم n/2، ويزيد عنها النصف الآخر n/2، أي أن 50% من القيم أقل منه، 50% من القيم أعلى منه.[1]
- الوسيط كذلك هو قيمة المشاهدة التي يقع ترتيبها وسط المجموعة عند ترتيب القيم تصاعديا أو تنازليا[2]، فهي تلك القيمة التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين متساويين[3]، ويرمز له بالرمز Me.

1- حساب الوسيط في حالة سلسلة إحصائية غير مبوبة

لحساب الوسيط في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية[4]:

أ- ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا.

ب- إذا كان عدد البيانات n عدد فرديا فإن الوسيط هو القيمة التي رتبتها $\frac{n+1}{2}$ أي:

$$\boxed{M_e = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}$$

[1] شرف الدين خليل، الإحصاء الوصفي، شبكة الأبحاث والدراسات الاقتصادية، ص 36.

[2] مصطفى زايد، علم الإحصاء، مطابع الدار الهندسية، الطبعة الثانية، القاهرة، 2008، ص98.

[3] جيلاطو جيلالي، الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثامنة، الجزائر، 2010، ص 41.

[4] ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، مرجع سابق، ص 67.

ت– إذا كان عدد البيانات n عددا زوجيا فإن الوسيط هو متوسط القيمة التي رتبتها $\frac{n}{2}$ والقيمة التي رتبتها $\frac{n}{2}+1$ أي:

$$M_e = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

مثال رقم 8: أحسب الوسيط للسلسلتين الإحصائيتين التاليتين:

السلسلة الأولى: 1، 2، 5، 4، 3، 6، 7، 7، 5، 3، 1، 9.

السلسلة الثانية: 1، 0، 2.5، 3، 5، 5.5، 6، 1، 7.5.

الحل:

السلسلة الأولى: 1، 1، 2، 3، 3، 4، 5، 5، 6، 7، 7، 9.

عدد البيانات n زوجيا أي 12، ومنه :

$$M_e = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

$$= \frac{X_6+X_7}{2} = \frac{4+5}{2} = 4.5$$

ومنه 50%من البيانات أقل من 4.5، و50 % من البيانات أكبر من 4.5.

السلسلة الثانية: 0، 1، 1، 25، 3، 5، 5.5، 6، 7.5.

عدد البيانات n فردي أي 9، ومنه:

$$Me = X_{\frac{n+1}{2}}$$

$$Me = X_5 = 3$$

50% من البيانات على الأكثر أقل من3، و50% من البيانات على الأكثر أكبر من 3.

2- حساب الوسيط في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي متقطع:

لحساب الوسيط الحسابي في جدول توزيع تكراري (حالة متغير إحصائي كمي منفصل)، نتبع الخطوات التالية:[1]

أ- نقوم بحساب التكرار المتجمع الصاعد.

ب-نحدد رتبة الوسيط ($\frac{N}{2}$) حيث $N=\sum_{i=1}^{k} ni$.

ت-نبحث في العمود (السطر) الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد عن القيمة التي تكرارها المتجمع الصاعد يساوي رتبة الوسيط ($\frac{N}{2}$) أو أعلى منها مباشرة، لتكون القيمة التي تقابلها هي قيمة الوسيط.

مثال رقم 9: البيانات الإحصائية التالية تمثل توزيع عائلات حي معين حسب عدد الغرف

عدد الغرف Xi	1	2	3	4	المجموع
عدد العائلات ni	5	10	20	30	65

المطلوب: حساب الوسيط مع الشرح؟

الحل: لحساب الوسيط نتبع الخطوات التالية:

أ- حساب التكرار المتجمع الصاعد المطلق.

عدد الغرف Xi	عدد العائلاتni	Ni↗
1	5	5
2	10	**15**
3	**20**	**35**
4	30	65
المجموع	65	-

الوسيط

رتبة الوسيط

$\frac{N}{2} = 32,5$

ب-نحدد رتبة الوسيط هي $\frac{N}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$ حيث $N=\sum_{i=1}^{k} ni = 65$.

[1] حيدوشي عاشور، محاضرات في الإحصاء الوصفي، مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى LMD، جامعة أكلي محند أولحاج، البويرة، 2016/2015، ص 68.

ت-نبحث في العمود (السطر) الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد عن القيمة التي تكرارها المتجمع الصاعد يساوي رتبة الوسيط أو أعلى منها مباشرة من 32.5 أي أن $15 < 32.5 = \frac{N}{2} < 35$

وعليه تكون قيمة الوسيط Xi التي تقابل 35، ومنه قيمة الوسيط Me= 3.

3- حساب الوسيط في حالة توزيع تكراري لمتغير إحصائي مستمر:

إذا كان لدينا جدول توزيع تكراري على شكل فئات فإننا نتبع الخطوات التالية لحساب الوسيط[1]:

- **تحديد الفئة الوسيطية:** وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر من أو يساوي $\frac{n}{2}$، أي: $\overset{\nearrow}{N}_{Me} \geq \frac{n}{2}$
- حساب الوسيط بطريقة المد الداخلي:

$$\boxed{M_e = Lim_{M_e} + \left[\frac{\frac{n}{2} - \overset{\uparrow}{N}_{M_e-1}}{n_{M_e}}\right] \times A_{M_e}}$$

Lim_{Me}: الحد الأدنى للفئة الوسيطية، $\frac{n}{2}$: رتبة الوسيط.

$\overset{\nearrow}{N}_{Me-1}$: التكرار المتجمع الصاعد المطلق للفئة قبل الفئة الوسيطسة.

n_{Me}: تكرار الفئة الوسيطسة، **A_{Me}** : طول الفئة الوسيطية.

مثال 10:

الجدول التالي يمثل توزيع 80 خروف حسب الوزن.

الأوزان (كلغ)	]20-15]	]25-20]	]30-25]	]35-30]	]40-35]	المجموع
عدد الخرفان	10	18	30	15	7	80

المطلوب: حساب الوسط لهذه البيانات مع الشرح؟

الحل:

[1] ساعد بن فرحات، عبد الحميد قطوش، مرجع سابق، ص 68.

لحساب الوسط نتبع الخطوات التالية:

-تحديد الفئة المنوالية: وهي أول فئة تكرارها المتجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{n}{2}$ ، أي:

$=20 \frac{40}{2} \leq N_{Me}^{\nearrow}$ الفئة المنوالية هي **]16-12]**

$N_i^{\nearrow}$	التكرار المطلق ni	فئات الأجر Xi
6	6	]8 -4]
16	10	]12 -8]
34	18	]16-12]
38	4	]20 -16]
40	2	]24-20]
-	40	المجموع

- حساب الوسيط بطريقة المد الداخلي:

$$M_e = Lim_{M_e} + \left[\frac{\frac{n}{2} - N^{\uparrow}_{M_{e-1}}}{n_{M_e}}\right] \times A_{M_e} =$$

$$Me=12+\frac{20-16}{18} \quad X\ 4= 12.88$$

الشرح: هناك 50% من الطلبة علاماتهم أقل من 12.88، و50% من الطلبة علاماتهم أكبر من 12.88 .

4-الوسيط بيانيا للمتغير الإحصائي المتصل:

الوسيط بيانيا هو نقطة تقاطع بين المنحنى المتجمع الصاعد والنازل المطلق.

مثال رقم 11: بالرجوع إلى المثال 6 نستخرج الوسيط بيانيا

خواص الوسيط: يمتاز الوسيط باعتباره أحد مقاييس النزعة المركزية بميزتين:

- عدم تأثره بالقيم الشاذة.
- ربما أمكن استخدامه في البيانات الوصفية.

العيوب:

- يسهم في تحديده إلا مفردة أو مفردتين من البيانات.

تمارين

التمرين الأول: في دراسة إحصائية حول مادة الحليب في إحدى المزارع الموجودة بولاية سطيف توصلنا إلى البيانات التالية:

الإنتاج باللترات	]240− 200[	]280−240[	]320−280[	]360−320[	]400−360[	المجموع
عدد المزارع	5	6	8	4	2	25

المطلوب: حساب متوسط إنتاج الحليب بهذه المزارع؟

التمرين الثاني: في تصنيف تناول 2000 من المستجدين في الجامعة حصلنا على البيانات الإحصائية التالية:

لا يدخن	يدخن	
1483	389	يشرب القهوة
101	27	لا يشرب القهوة

المطلوب: ايجاد المنوال لهذه البيانات؟

التمرين الثالث:_إليك التوزيع التكراري لعدد الرضع حسب الوزن عند الولادة في أحد العيادات خلال سنة 2006:

الوزن كلغ	]1.5−1]	]2−1.5]	]2.5−2]	]3−2.5]	]3.5−3]	]4−3.5]
نسبة المواليد %	10	15	26	31	10	8

المطلوب: 1− ما طبيعة المتغير الإحصائي؟

2−مثل بيانيا معطيات الجدول أعلاه؟

3− أحسب كلا من: fi، fi% ؟

4− أوجد قيمة كلا من: المتوسط الحسابي، المنوال، الوسيط مع شرح النتائج؟ ثم استخرج المنوال والوسيط بيانيا؟

5− استخرج كلا من: $\overset{\nearrow}{N_3}$، $\overset{\swarrow}{N_5}$.

التمرين الرابع:

اختر جوابا واحدا فقط:

1- يسمى الرقم الأكثر تكرار وشيوعا:

أ/ الانحراف المعياري	ب/ المتوسط الحسابي	ج/ المنوال	د/ الوسيط

2- تدخل جميع قيم المجموعة في الحساب:

أ/ المتوسط الحسابي	ب/ الانحراف المعياري	ج/ المنوال	د/ الوسيط

3- يتأثر بالقيم الشاذة:

أ/ المنوال	ب/ المتوسط الحسابي	ج/ الوسيط

4- من بين عيوبه يعتبر غير دقيق؟

أ/ الوسيط	ب/ المتوسط الحسابي	ج/ المنوال