

مبادئ الاحصاء

حل تمارين الفصل الخامس

د/عابد العبدلي

## الفصل الخامس: الارتباط والانحدار الخطي البسيط

### تمارين الفصل الخامس

(٥- ١) الجدول التالي يبين دخل ٨ أسر ومقدار ما تنفقه من هذا الدخل (بعشرات الريالات):-

|    |    |    |    |    |    |    |    |             |
|----|----|----|----|----|----|----|----|-------------|
| 64 | 68 | 56 | 76 | 64 | 84 | 52 | 64 | الدخل (x)   |
| 52 | 50 | 42 | 60 | 52 | 60 | 40 | 52 | الانفاق (y) |

المطلوب:

- ايجاد معامل الارتباط بطريقة بيرسون
- خط انحدار الانفاق على الدخل
- قدر انفاق الاسرة التي يبلغ دخلها ٧٠٠ ريال
- معامل الارتباط بطريقة الرتب
- قارن بين النتائج التي حصلت عليها في (أ) و(ب)

الحل:

أ- ايجاد معامل الارتباط بطريقة بيرسون باستخدام قانون بيرسون للارتباط التالي:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}$$

ومن نحتاج حساب البيانات التالية فقط :-  $(xy)$  و  $(y^2)$  و  $(x^2)$  كما في الجدول التالي:

|            |       |      |      |      |      |      |      |      |      |           |
|------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----------|
| $\sum x$   | ٥٢٨   | ٦٤   | ٦٨   | ٥٦   | ٧٦   | ٦٤   | ٨٤   | ٥٢   | ٦٤   | الدخل x   |
| $\sum y$   | ٤٠٨   | ٥٢   | ٥٠   | ٤٢   | ٦٠   | ٥٢   | ٦٠   | ٤٠   | ٥٢   | الاتفاق y |
| $\sum xy$  | ٢٧٤١٦ | ٣٣٢٨ | ٣٤٠٠ | ٢٣٥٢ | ٤٥٦٠ | ٣٣٢٨ | ٥٠٤٠ | ٢٠٨٠ | ٣٣٢٨ | $(xy)$    |
| $\sum y^2$ | ٢١١٧٦ | ٢٧٠٤ | ٢٥٠٠ | ١٧٦٤ | ٣٦٠٠ | ٢٧٠٤ | ٣٦٠٠ | ١٦٠٠ | ٢٧٠٤ | $(y^2)$   |
| $\sum x^2$ | ٣٥٥٨٤ | ٤٠٩٦ | ٤٦٢٤ | ٣١٣٦ | ٥٧٧٦ | ٤٠٩٦ | ٧٠٥٦ | ٢٧٠٤ | ٤٠٩٦ | $(x^2)$   |

## الفصل الخامس: الارتباط والانحدار

### حل تمارين الفصل الخامس

وبحساب القانون نحصل على:

$$r = \frac{68216 - \frac{(1328)(408)}{8}}{\sqrt{\left(221184 - \frac{(1328)^2}{8}\right)\left(21176 - \frac{(408)^2}{8}\right)}} = \frac{488}{\sqrt{(736)(368)}} = \frac{488}{520.43} = 0.937$$

النتيجة ان معامل الارتباط (٠,٩٤) يدل على وجود **علاقة قوية جدا وطرديّة بين الدخل والانفاق** لان الاشارة موجب

# الفصل الرابع: الارتباط والانحدار

## حل تمارين الفصل الخامس

ب- خط انحدار الانفاق على الدخل:

**الحل:** نكون جدولاً ونحصل على البيانات المطلوبة لتقدير معادلة الانحدار وهي:  $(\bar{y}), (\bar{x}), (\sum xy), (\sum x^2)$

|            |       |      |      |      |      |      |      |      |      |           |
|------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----------|
| $\sum x$   | ٥٢٨   | ٦٤   | ٦٨   | ٥٦   | ٧٦   | ٦٤   | ٨٤   | ٥٢   | ٦٤   | الدخل x   |
| $\sum y$   | ٤٠٨   | ٥٢   | ٥٠   | ٤٢   | ٦٠   | ٥٢   | ٦٠   | ٤٠   | ٥٢   | الانفاق y |
| $\sum xy$  | ٢٧٤١٦ | ٣٣٢٨ | ٣٤٠٠ | ٢٣٥٢ | ٤٥٦٠ | ٣٣٢٨ | ٥٠٤٠ | ٢٠٨٠ | ٣٣٢٨ | $(xy)$    |
| $\sum x^2$ | ٣٥٥٨٤ | ٤٠٩٦ | ٤٦٢٤ | ٣١٣٦ | ٥٧٧٦ | ٤٠٩٦ | ٧٠٥٦ | ٢٧٠٤ | ٤٠٩٦ | $(x^2)$   |

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{408}{8} = 51$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{528}{8} = 66$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{8(27416) - (528)(408)}{8(35584) - (528)^2} = \frac{219328 - 215424}{284672 - 278784} = \frac{3904}{5888} = 0.66$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

$$\hat{a} = 51 - (0.66)(66) = 51 - 43.56 = 7.44$$

## الفصل الخامس: الارتباط والانحدار

### حل تمارين الفصل الخامس

ب- خط انحدار الانفاق على الدخل:

$$\hat{Y} = 7.44 + 0.66X$$

إذا تصبح معادلة (خط) الانحدار المقدره كالتالي:-

$$Y = a + bX$$

ج- قدر انفاق الاسرة التي يبلغ دخلها ٧٠٠ ريال

لتقدير الاستهلاك عندما يكون الدخل = ٧٠٠ نعوض في المعادلة كالتالي:-

$$\hat{Y} = 7.44 + 0.66(70) = 7.44 + 46.2 = 53.64$$

وبما ان وحدة القياس بعشرات الريالات فيصبح

فعندما يكون الدخل = ٧٠٠ ريال يصبح الاستهلاك (١٠ x ٥٣.٦٤) = ٥٣٦.٤ ريال

د- معامل الارتباط بطريقة الرتب

**الحل:** نتبع الخطوات التالية

١ - نرتب البيانات تصاعديا او تنازليا

٢- نرصد رتب (x) ونرصد رتب (y) (مثلا نعطي اصغر قيمة رقم (١) والقيمة التي تليها (٢) لكل من x و y)

٣- نحصل على الفرق (d) بين رتب (x) ورتب (y)

٤- نربع الفرق (d<sup>2</sup>)

٥- نطبق القانون

**ملاحظة:** اذا تكررت القيم نأخذ الوسط الحسابي للرتب

## الفصل الخامس: الارتباط والانحدار

### حل تمارين الفصل الخامس

د- معامل الارتباط بطريقة الرتب

|      |    |    |      |      |      |    |      |                 |
|------|----|----|------|------|------|----|------|-----------------|
| 64   | 68 | 56 | 76   | 64   | 84   | 52 | 64   | الدخل (x)       |
| 52   | 50 | 42 | 60   | 52   | 60   | 40 | 52   | الانفاق (y)     |
| 3.5  | 6  | 2  | 7    | 3.5  | 8    | 1  | 3.5  | ترتيب الدخل x   |
| 5    | 3  | 2  | 7.5  | 5    | 7.5  | 1  | 5    | ترتيب الانفاق y |
| -1.5 | 3  | 0  | -0.5 | -1.5 | 0.5  | 0  | -1.5 | الفرق<br>D=x-y  |
| 2.25 | 9  | 0  | 0.25 | 2.25 | 0.25 | 0  | 2.25 | d <sup>2</sup>  |

$\sum d^2$

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6(2.25)}{8(64 - 1)} = 1 - \frac{13.5}{504} = 1 - 0.026 = 0.97$$

مدلول معامل الارتباط ان هناك ارتباط طردي قوي جدا بين الدخل والانفاق

## الفصل الخامس: الارتباط والانحدار

### حل تمارين الفصل الخامس

هـ- قارن بين النتائج التي حصلت عليها في (أ) و(ب)

معامل الارتباط بين الدخل والانفاق بلغ (٠,٩٤) مما يدل على وجود علاقة قوية جدا وطرديّة بين الدخل والانفاق لان الاشارة موجب ، دون ان يفترض علاقة سببية بينهما

بينما معادلة الانحدار وهي :

$$\hat{Y} = 7.44 + 0.66X$$

وهي انحدار الانفاق على الدخل ويتضح ان الدخل (x) يؤثر في الانفاق (y)، حيث ان تغير الدخل بوحدة واحدة تؤدي الى تغير الانفاق بمقدار ٠.٦٦ في نفس الاتجاه لان الاشارة موجب. بمعنى اخر ان كل ريال في الدخل ينفق منه ٦٦ هللة

## الفصل الخامس: الارتباط والانحدار الخطي البسيط

### تمارين الفصل الخامس

(٥-٢) البيانات التالية توضح الإيرادات المحققة لإحدى الشركات بالملايين (y) وحجم الإنتاج بالآلاف (x) خلال الفترة ٢٠٠٤ - ٢٠١١ :-

| السنة             | ٢٠٠٤ | ٢٠٠٥ | ٢٠٠٦ | ٢٠٠٧ | ٢٠٠٨ | ٢٠٠٩ | ٢٠١٠ | ٢٠١١ |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| حجم الانتاج (x)   | ٨٠   | ٩٠   | ١٣٠  | ١٢٠  | ٩٠   | ١١٠  | ١٢٠  | ١٣٠  |
| حجم الإيرادات (y) | ١١٠  | ١٣٠  | ١٦٠  | ١٥٠  | ١٠٠  | ١٢٠  | ١٣٠  | ١٤٠  |

المطلوب:

- تحديد انحدار  $y$  على  $x$  على افتراض أن العلاقة بين الإيرادات وحجم الإنتاج خطية؟
- حساب معامل الارتباط وماذا تستنتج؟
- تقدير مستوى الإيرادات لسنة ٢٠١٢ إذ برمجت الشركة إنتاج ١٦٠ ألف وحدة؟

# الفصل الخامس: الارتباط والانحدار

## حل تمارين الفصل الخامس

أ- تحديد انحدار  $y$  على  $x$  على افتراض أن العلاقة بين الإيرادات وحجم الإنتاج خطية؟

**الحل:** نكون جدولاً ونحصل على البيانات المطلوبة لتقدير معادلة الانحدار وهي:  $(\bar{y}), (\bar{x}), (\sum xy), (\sum x^2)$

|            | ٢٠١١   | ٢٠١٠  | ٢٠٠٩  | ٢٠٠٨  | ٢٠٠٧ | ٢٠٠٦  | ٢٠٠٥  | ٢٠٠٤  | السنة |                   |
|------------|--------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------------------|
| $\sum x$   | ٨٧٠    | ١٣٠   | ١٢٠   | ١١٠   | ٩٠   | ١٢٠   | ١٣٠   | ٩٠    | ٨٠    | حجم الإنتاج $x$   |
| $\sum y$   | ١٠٤٠   | ١٤٠   | ١٣٠   | ١٢٠   | ١٠٠  | ١٥٠   | ١٦٠   | ١٣٠   | ١١٠   | حجم الإيرادات $y$ |
| $\sum xy$  | ١١٥٣٠٠ | ١٨٢٠٠ | ١٥٦٠٠ | ١٣٢٠٠ | ٩٠٠٠ | ١٨٠٠٠ | ٢٠٨٠٠ | ١١٧٠٠ | ٨٨٠٠  | $(xy)$            |
| $\sum x^2$ | ٩٧٣٠٠  | ١٦٩٠٠ | ١٤٤٠٠ | ١٢١٠٠ | ٨١٠٠ | ١٤٤٠٠ | ١٦٩٠٠ | ٨١٠٠  | ٦٤٠٠  | $(x^2)$           |

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{1040}{8} = 130 \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{870}{8} = 108.8$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{8(115300) - (870)(1040)}{8(97300) - (870)^2} = \frac{922400 - 904800}{778400 - 756900} = \frac{17600}{21500} = 0.82$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

$$\hat{a} = 130 - (0.82)(108.8) = 130 - 89.2 = 40.8$$

## الفصل الخامس: الارتباط والانحدار

### حل تمارين الفصل الخامس

ويصبح خط انحدار الايرادات على الانتاج خلال فترة البيانات:

$$\hat{Y} = 40.8 + 0.82X$$

وتفسيرها: بما ان وحدة قياس الانتاج بالالف والاييرادات بالمليون، فان زيادة الانتاج بالف وحدة تؤدي الى زيادة الايرادات بمقدار ٠.٨٢ مليون ريال او ٨٢٠ الف ريال

## الفصل الخامس: الارتباط والانحدار

### حل تمارين الفصل الخامس

ب - حساب معامل الارتباط وماذا تستنتج؟  
باستخدام صيغة معامل الارتباط بيرسون التالي

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left( \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right) \left( \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \right)}}$$

ومنه نحتاج حساب البيانات التالية فقط :-  $(xy)$  و  $(y^2)$  و  $(x^2)$  كما في الجدول التالي:

# الفصل الخامس: الارتباط والانحدار

## حل تمارين الفصل الخامس

|            | ٢٠١١   | ٢٠١٠  | ٢٠٠٩  | ٢٠٠٨  | ٢٠٠٧  | ٢٠٠٦  | ٢٠٠٥  | ٢٠٠٤  | السنة             |
|------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------|
| $\sum x$   | ٨٧٠    | ١٣٠   | ١٢٠   | ١١٠   | ٩٠    | ١٢٠   | ١٣٠   | ٩٠    | حجم الانتاج x     |
| $\sum y$   | ١٠٤٠   | ١٤٠   | ١٣٠   | ١٢٠   | ١٠٠   | ١٥٠   | ١٦٠   | ١٣٠   | حجم الايرادات y   |
| $\sum xy$  | ١١٥٣٠٠ | ١٨٢٠٠ | ١٥٦٠٠ | ١٣٢٠٠ | ٩٠٠٠  | ١٨٠٠٠ | ٢٠٨٠٠ | ١١٧٠٠ | (xy)              |
| $\sum x^2$ | ٩٧٣٠٠  | ١٦٩٠٠ | ١٤٤٠٠ | ١٢١٠٠ | ٨١٠٠  | ١٤٤٠٠ | ١٦٩٠٠ | ٨١٠٠  | (x <sup>2</sup> ) |
| $\sum y^2$ | ١٣٨٠٠٠ | ١٩٦٠٠ | ١٦٩٠٠ | ١٤٤٠٠ | ١٠٠٠٠ | ٢٢٥٠٠ | ٢٥٦٠٠ | ١٦٩٠٠ | (y <sup>2</sup> ) |

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right) \left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}$$

$$r = \frac{115300 - \frac{(870)(1040)}{8}}{\sqrt{\left(97300 - \frac{(870)^2}{8}\right) \left(138000 - \frac{(1040)^2}{8}\right)}} = \frac{2200}{\sqrt{(2687.5)(2800)}} = \frac{2200}{2743.17} = 0.80$$

النتيجة ان معامل الارتباط (٠,٨٠) يدل على وجود علاقة قوية جدا وطرديّة بين الانتاج والايادات لان الاشارة موجب

ج - تقدير مستوى الإيرادات لسنة ٢٠١٢ إذ برمجت الشركة إنتاج ١٦٠ ألف وحدة؟

لتقدير مستوى الإيرادات نعوض في المعادلة المقدرة كالتالي:-

$$\hat{Y} = 40.8 + 0.82X$$

$$\hat{Y} = 40.8 + 0.82(160) = 40.8 + 131.2 = 172$$

ويكون مستوى الإيرادات المقدر في عام ٢٠١٢ م هو ١٧٢ مليون