وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 08 ماي 1945 – قالمة

كلية العلوم الإقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم علوم العلوم التجارية

مطبوعة بعنوان:

دروس ملخصة وتمارين محلولة في الاحتمالات

مقياس الإحصاء (2)

موجهة لطلبة السنة أولى، علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير

إعداد:

د/ العابد محمد

السنة الجامعية: 2019/2018

بسم الله الرحـمان الرحيـم

{وَآتَاكُم مِّن كُلِّ مَا سَأَلْتُمُوهُ وَإِن تَعُدُّوا نِعْمَتَ اللَّهِ لَا تُحْصُوهَا إِنَّ الْإِنسَانَ لَظَلُومٌ كَفَّارٌ} (الآية 34– سورة ابراهيم)

{لَّقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا} (الآية 94– سورة مريم)

{ لِّيَعْلَمَ أَن قَدْ أَبْلَغُوا رِسَالَاتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا} (الآية 28– سورة الجن)

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

المقـــدمـــــة

المقدمة:

تندرج هذه المطبوعة ضمن مقياس الاحتمالات (الإحصاء 2)، وهي موجهة بالأساس إلى طلبة السنة أولى جذع مشترك لكلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، كما يمكن أن يستفيد منها طلبة مختلف الكليات الأخرى، الذين يدرسون هذا المقياس.

وهذه المادة هي من أكثر المواد التي يجد الطلبة صعوبة في فهمها، وهذا ناتج بالأساس إلى أن غالب طلبة العلوم الاقتصادية كانوا يدرسون شعبة العلوم الاقتصادية في الثانوية، ويجدون صعوبة في المواد الكمية مثل الرياضيات، الإحصاء، الاقتصاد الجزئي،...الخ، وكذلك أنها تتطلب ذكاء أكثر مقارنة مع مقياس الإحصاء الوصفي، حيث أن في هذا الأخير فالطالب مطالب فقط بحفظ القوانين ومعرفة كيفية تطبيقها، وصعوبته الأكبر تتمثل في التركيز في العمليات الحسابية أثناء حل التمرينات.

وفي الغالب عندما لا يتطلب الأمر شرح كبير، فإنه يمكن حل مختلف تمارين مادة الاحتمالات من خلال عدد أسطر صغير، وهذا مقارنة بحلول تمارين الاحصاء الوصفي التي تكون حلولها طويلة نوعا ما، حيث تتطلب الكثير من الجداول والعمليات الحسابية، وهي تتطلب وقت نوعا ما، وهذا حتى وإن كان الطالب يعرف الحل مسبقا، عكس مادة الاحتمالات فإن الصعوبة تتمثل في معرفة طريقة الحل، وبمجرد معرفة الطريقة فالحل لا يتطلب وقت كبير.

وهذه المطبوعة تغطي جميع محاور مادة الاحتمالات حسب ما هو مقرر من طرف وزارة التعليم العالي، وكل محور يتضمن ملخص له، ثم تمارين محلولة لهذا المحور، حيث تم الحرص قدر المستطاع أن تكون هذه التمارين متدرجة من الأسهل إلى الأصعب، وأن تكون في مستوى الطلبة نوعا ما، وأن يتم التوضيح قدر المستطاع في صياغة نصوص هذه التمارين، بالقدر الكافي الذي يسمح ويسهل الوصول إلى طريقة الحل، ونشير إلى أنه يمكن للطالب في الكثير من التمارين أن يتأكد بنفسه مما إذا كانت طريقة الحل صحيحة أو لا، وذلك من خلال تصغير عدد وحجم معطيات التمرين ثم حساب وتعداد الإمكانيات أو الاحتمالات بالحالة، وأيضا تطبيق القانون أو طريقة الحل الإحصائية، ثم مقارنة ما إذا كانت الطريقة الإحصائية تتوافق مع طريقة العد والحساب بالحالة.

الفصل الأول:

التحليل التوافقي (مبادئ العدّ)

1- ملخص:

- التـرتيب مهم والتكرار غير مسموح به.
- التـرتيب مهم والتكرار مسموح به.
- التـرتيب غير مهم والتكرار غير مسموح به.
- التـرتيب غير مهم والتكرار مسموح به.

2- تمارين محلولة.

1. ملخص:

الهدف من هذا المحور، هو معرفة عدد طرق وإمكانيات اختيار أو ترتيب مجموعة من العناصر، حيث في الحالة البسيطة عندما يكون عدد هذه العناصر صغير جدا، فإنه لا تكون هناك حاجة كبيرة إلى قوانين التحليل التوفيقي، بل يمكن إيجاد عدد الطرق بالحساب والتعداد بالحالة، وأما في الحالة العامة عندما يكون عدد هذه العناصر كبير فإنه لا بد من استخدام قانون معين، وقد تكون عندنا مجموعتين، مجموعة أصلية عدد عناصرها n، ونريد أن نختار منها أو نرتب منها مجموعة جزئية* عدد عناصرها r، وقد تكون عندنا مجموعة واحدة فقط لمعرفة عدد طرق ترتيبها، ونرمز لعدد عناصرها بـ n، ويمكن التمييز بين مختلف القوانين في هذا الشأن من خلال معيار الترتيب والتكرار، حيث قد يكون الترتيب مهم أو غير مهم، وقد يكون التكرار مسموح به أو غير مسموح به.

- ✓ **معنى الترتيب مهم أو غير مهم**: إذا كان الترتيب مهم، معناه أنه عند تغيير ترتيب عنصرين أو أكثر في مجموعة العناصر التي نريد اختيارها أو تكوينها، فإنه يتم حسابها وعدّها أنها حالة أخرى، فمثلا حالة **أ ب ج**، وحالة **أ ج ب** تعتبران هنا حالتان مختلفتان، والعكس صحيح عندما يكون الترتيب غير مهم، فهنا مثلا يتم اعتبار أن حالة **أ ب ج**، وحالة **أ ج ب**، نفس الحالة.
- ✓ **معنى التكرار مسموح به أو غير مسموح**: إذا كان التكرار مسموح به معناه أنه يمكن أن نختار نفس العنصر أكثر من مرة، وبالتالي تكون العناصر التي نريد اختيارها أو تكوينها يمكن أن تتضمن عناصر متشابهة أو مكررة أكثر من مرة، مثل المجموعات أ أ ب ج، أ أ أ أ،...الخ، أما إذا كان التكرار غير مسموح به فمعناه أن كل عنصر في المجموعة التي نريد تكوينها يمكن أن يظهر مرة واحدة أو لا يظهر أصلا، ويمكن فهم ذلك أكثر من خلال التمارين وحلولها في هذا المحور.

1.1 الترتيب مهم والتكرار غير مسموح به: تسمى هذه الحالة **ترتيبة بدون تكرار** ونرمز لها بـ A_n^r، حيث إذا

كانت لدينا مجموعة أصلية عدد عناصرها n، ونريد تشكيل منها مجموعة جزئية عدد عناصرها r، فإن عدد الحالات الممكنة للترتيب هو**:

$$A_n^r = \frac{(n)!}{(n-r)!}$$

حيث في هذه الحالة يكون عدد عناصر المجموعة الجزئية أقل من أو يساوي عدد عناصر المجموعة الأصلية؛ أي $r \leq n$، وفي حالة ما إذا كان $r=n$، أي أنه عندنا مجموعة واحدة ونريد ترتيب عناصرها، فهذه الحالة هي

* قد يكون عدد عناصر المجموعة الجزئية أكبر من الأصلية، كما في الحالة التي يكون فيها التكرار مسموح به.

** قد يتبادر إلى الذهن أنه ما دام القوانين تتضمن عملية قسمة، فإنه يمكن أن تكون النتيجة بالفاصلة، لكن نشير إلى أن **هذا مستحيل** في قوانين التحليل التوافقي.

حالة خاصة من الترتيبة بدون تكرار وتسمى **تبديلة بدون تكرار** (P_n)، حيث يكون عدد طرق الترتيب هو: $\boldsymbol{n!}$، وإذا ما استخدمنا قانون الترتيبة بدون تكرار سنجد نفس النتيجة، وذلك كالآتي:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

$n!$ يسمى القانون الأساسي للعدّ، حيث: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 1$، فمثلا:

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$، وفي الحالة العامة يكون: $1! = 0! = 1$

وفي حالة ما إذا كانت مجموعة العناصر n تتضمن عناصر مكررة، فإن هذه الحالة تسمى **تبديلة مع تكرار***
$(\widetilde{\boldsymbol{P_n}})$، فبافتراض أن عنصر معين مكرر α مرة، وعنصر آخر مكرر β مرة، فيكون قانون التبديلة مع التكرار كالآتي: $\widetilde{\boldsymbol{P_n}} = \frac{n!}{\alpha! \times \beta!}$

2.1 الترتيب مهم والتكرار مسموح به: تسمى **ترتيبة مع تكرار**، ونرمز لها بـ $\widetilde{\boldsymbol{A_n^r}}$، والبعض يسميها **قائمة**، ويتم حسابها كالآتي: $\widetilde{\boldsymbol{A_n^r}} = \boldsymbol{n^r}$

ونشير إلى أنه يمكن أن يكون عدد عناصر المجموعة الجزئية r، أكبر من عناصر المجموعة الأصلية n، وفي حالة ما إذا كان نفس عدد العناصر للمجموعتين، فإن: $\widetilde{\boldsymbol{A_n^n}} =^{\boldsymbol{n}}$

3.1 الترتيب غير مهم والتكرار غير مسموح به: وتسمى بالتوفيقة بدون تكرار، ونرمز لها بـ $\boldsymbol{C_n^r}$، حيث:

$$\boldsymbol{C_n^r} = \frac{(\boldsymbol{n})!}{\boldsymbol{r}! \times (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$$

حيث أن العلاقة بين التوفيقة بدون تكرار والترتيبة بدون تكرار، تتمثل في أن: $\boldsymbol{C_n^r} = \frac{\boldsymbol{A_n^r}}{\boldsymbol{r}!}$، ويمكن إثبات ذلك كالآتي: $\boldsymbol{C_n^r} = \frac{(n)!}{r! \times (n-r)!} = \frac{\frac{(\boldsymbol{n})!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}}{r!} = \frac{A_n^r}{r!}$

وهناك بعض الحالات العامة والشهيرة، كالآتي: $\boldsymbol{C_n^0 = 1}\ ,\ \boldsymbol{C_n^n = 1},\ \ \boldsymbol{C_n^1 = n}\ ,\ \boldsymbol{C_n^r = C_n^{n-r}}$

ونشير إلى أنه أثناء التطبيق العددي يمكن حساب التوفيقات بدون تكرار، أو الترتيبات بدون تكرار، مباشرة بالآلة الحاسبة، مثل حساب: $\boldsymbol{C_{10}^3}$، $\boldsymbol{A_7^4}$،...الخ.

4.1 الترتيب غير مهم والتكرار مسموح به: وتسمى التوفيقات مع التكرار، وهي حالة نادرة الحدوث في الواقع، ونرمز لها بـ $\widetilde{\boldsymbol{C_n^r}}$، حيث: $\widetilde{\boldsymbol{C_n^r}} = \boldsymbol{C_{n+r-1}^r} = \frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1})!}{\boldsymbol{r}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})!}$

* وهنا نشير إلى ملاحظة مهمة يغفل عليها الكثير من الطلبة، وهو أن تسمية تبديلة مع تكرار لا تعني أن التكرار مسموح به بل تعني وجود عناصر مكررة (متشابهة) في المجموعة الأصلية التي نريد تطبيق عليها قانون التبديلات؛ أي أن التبديلة مع التكرار تتضمن أن الترتيب مهم والتكرار غير مسموح به، ووجود عناصر متشابهة (مكررة) في المجموعة الأصلية.

2. تمارين محلولة:

تمرين1:

ماهي عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها (3) أشخاص في طاولة مستطيلة تحتوي على (5) مقاعد*؟

الحل:

يمكن ملاحظة أن **الترتيب مهم**؛ لأنه في حالة تغيير ترتيب وضعية جلوس الأشخاص تحسب على أنها طريقة وحالة أخرى، وهذا حتى وإن لم يتم التعبير عن ذلك صراحة في صيغة التمرين، إلى أنه يمكن استنتاج ذلك.

كذلك نلاحظ أن **التكرار غير مسموح به**، لأنه لا يمكن ومستحيل منطقيا أن يجلس نفس الشخص في مقعدين في نفس الوقت (من مسلمات وبديهيات العقل).

إذن والحالة هذه فإن القانون المناسب لهذا هو قانون الترتيبات بدون تكرار: $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$A_n^r = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 60 \text{ طريقة}$$

ونشير إلى أنه في حالة ما تم إحصاء عدد الحالات تجريبيا، فسنجد نفس النتيجة، وهو ما يؤكد أن القانون المستخدم صحيح، أو حتى يتم تسهيل عملية الحساب التجريبي، فيمكن الحفاظ على نفس صيغة التمرين وتصغير فقط حجم (عدد العناصر) لكل من المجموعة الجزئية والأصلية، كأن يأخذ مثلا **r=2** و **n=3**، ثم يتم تطبيق قانون الترتيبات بدون تكرار، والحساب التجريبي، فسنجد نفس النتيجة.

تمرين 2:

يرغب (5) أشخاص الجلوس في طاولة مستطيلة تحتوي على (5) مقاعد.

1/ ما هو عدد الطرق الممكنة لذلك؟

2/ إذا كان الشخصين **أ ب** يجب أن يكونوا بجانب بعضهم، بحيث يكون أ قبل ب، فما عدد الطرق الممكنة لجلوس الأشخاص الخمسة؟

---

* لا يهم ذكر في صيغة التمرين أن المقاعد مرقمة أو لا (متشابهة أو لا)، لأن ذلك لا يؤثر ولا يهم في طريقة الحل، وهذا عكس لو كانت الطاولة مستديرة، لأنه في حالة الطاولة المستطيلة فإنه يوجد معلم للترتيب، وهو طرفي الطاولة، أما في الطاولة المستديرة فلا يوجد معلم.

3/ إذا كان الشخصين **أ ب** يجب أن يكونوا بجانب بعضهم، بغض النظر عن ترتيبهم بالنسبة لبعضيهما (الترتيب بينهما لا يهم)، فما عدد الطرق الممكنة لجلوس الأشخاص الخمسة؟

4/ إذا كان الشخصين **أ ب** يجب أن يكونوا بجانب بعضهم، فما عدد الطرق الممكنة لجلوس الأشخاص الخمسة؟

5/ إذا كان الشخص (أ) يجب أن يكون في المكان الثالث، والشخص (**ب**) في المكان الخامس، فما هو عدد الطرق الممكنة لجلوس الأشخاص الخمسة؟

الحل:

1/ القانون المناسب هو قانون الترتيبات بدون تكرار، أو التبديلات بدون تكرار التي تعتبر حالة خاصة من الترتيبات بدون تكرار، لأن في هذه الحالة عدد عناصر المجموعة الجزئية (الأشخاص) يساوي عدد عناصر المجموعة الأصلية (المقاعد)؛ أي: n=r، ويكون: $A_n^r = A_n^n = n!$

إذن من خلال التطبيق العددي نجد عدد الطرق الممكنة هو:

$$A_n^n = A_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5!}{1} = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$ طريقة

ويمكن الحل مباشرة باستخدام قانون التبديلية بدون تكرار: $p_n = n! = 5! = 120$

كذلك نشير إلى أنه سنجد نفس النتيجة في حالة جلوس (4) أشخاص في طاولة مستطيلة تحتوي على (5) مقاعد، حيث أننا سنجد أن: $A_5^4 = \frac{5!}{1!} = \frac{5!}{1} = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

وهذا ناتج بالأساس على أن: $A_5^4 = A_5^5 = 120$.

أي أنه في الحالة العامة: $A_n^n = A_n^{n-1} = n!$ ، وذلك ناتج بالأساس على أن: $1! = 0!$

2/ بما أن الشخصين **أ ب** يتواجدون بجنب بعضهم بنفس الترتيب، يصبح وكأنهم شخص واحد، وبالتالي عدد الحالات الممكنة، هو عدد حالات جلوس 4 أشخاص، والعدد هو: $A_4^4 = 4! = 24$

3/ بما أن الشخصين أ، ب، لا يهم الترتيب بينهما، والمهم أن يتواجدوا إلى جنب بعضهم، فنفس نتيجة السؤال السابق، حيث نعتبر الشخصين كشخص واحد، ويصبح وكأنه عندنا 4 أشخاص، وبالتالي عدد طرق جلوسهم هو: $A_4^4 = 4! = 24$

4/ بما أنه في صيغة السؤال لم يقل أن الترتيب غير مهم بين الشخصين أ، ب، فيبقى يتبعان أصل التمرين وهو أن الترتيب مهم بينهم، مع شرط تواجدهما بجنب بعضهما، وبالتالي عدد الامكانيات هو عدد الحالات بحيث يكون الشخص أ قبل ب، ونضيف لها عدد الحالات بحيث يكون الشخص ب قبل أ، أي عدد الامكانيات هو:

$$4! + 4! = 48$$

5/ نضع الشخص (أ) في المكان الثالث، والشخص (**ب**) في المكان الخامس، فيصبح عدد الحالات الممكنة، هو عدد حالات جلوس (تبديل) الأشخاص الثلاثة الباقين، في ثلاثة الأماكن الباقية، والعدد هو: $A_3^3 = 3! = 6$

تمرين 3:

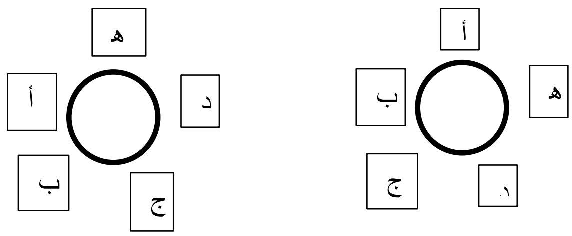
يرغب (5) أشخاص الجلوس حول طاولة مستديرة تحتوي على (5) مقاعد*.

1/ ما هي امكانيات الجلوس؟

2/ ما هي امكانيات الجلوس، إذا كان شخصين {أ، **ب**}، لا يجب أن يجلسا جنب إلى جنب؟

الحل:

1/ يعتمد حل هذا التمرين على فكرة أنه لا يوجد معلم معين لترتيب وجلوس الأشخاص في المقاعد، لأن المقاعد غير مرقمة، وبالتالي نقع في إشكالية تكرار حساب حالات معينة أكثر من مرة، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:



ففي هذا المثال فإن ترتيب الأشخاص هو نفسه، وهو **أ–ب–ج–د–هـ**، لأنه لا يوجد مَعْلم للتريب، وتصبح الطاولة المستديرة وكأنها في الفضاء، ولو استخدمنا قانون التبديلات بدون تكرار فسيحصي لنا نفس الحالات أكثر من مرة، لذلك ينبغي أن نثبت شخص معين في مقعد ما، كمعلم للترتيب، وبالتالي يصبح الأشخاص الذين نريد ترتيبهم هم (4) أشخاص، ثم نستخدم قانون التبديلات، وذلك كالآتي:

* لو تم ذكر في صيغة التمرين أن المقاعد مرقمة (غير متشابهة)، فإن طريقة الحل مثل التمرين 1 والتمرين 2 من هذا الفصل، لأنه يصبح هناك معلم وامكانية للترتيب، أي وكأننا في طاولة مستطيلة.

$$p_n = n! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$ طريقة

2/ عدد الحالات المرغوبة بحيث لا يجلس الشخصين {أ، ب}، بجانب بعضهم، هو كل الحالات منقوص منهم الحالات التي يتواجد الشخصين {أ، ب} بجانب بعضهم.

في الحالات التي يتواجد فيها الشخصين {أ، ب} بجانب بعضهم، يعتبر الشخصين وكأنهم شخص واحد، ونلاحظ أن هناك حالتين، حالة الشخص أ يكون قبل ب، وحالة الشخص ب يكون قبل أ.

ففي حالة أ قبل ب، فكأننا نريد اجلاس 4 أشخاص حول الطاولة، وبما أنه لا يوجد معلم للترتيب (مثل السؤال السابق)، فنقوم بتثبيت شخص كمعلم للترتيب، وبالتالي يصبح هناك 3 أشخاص معنيين بالترتيب، وعددهم هو: $3! = 6$، ونفس الشيء **في حالة ب قبل أ**، فالعدد هو: $3! = 6$، وبالتالي يكون عدد الحالات التي يكون فيها الشخصين {أ، ب} بجانب بعضهم، هو: $3! + 3! = 12$

وبالتالي عدد الحالات المرغوبة هو: $4! - (3! + 3!) = 24 - 12 = 12$

طريقة 2: نقوم بتثبيت الشخص أ في مكان معين كمعلم للترتيب، وبالتالي يصبح الشخص ب لا يمكنه أن يجلس في المكانين قبل وبعد مكان جلوس الشخص أ، أي الشخص ب يتبقى له مكانين فقط للجلوس (المكان الثالث والرابع بعد مكان جلوس الشخص أ)، فعند جلوس الشخص ب في المكان الثالث، يتبقى ثلاثة أماكن متاحة لثلاثة الأشخاص الباقيين، وعدد حالات جلوسهم هو $3! = 6$، ونفس الشيء عند جلوس الشخص ب في المكان الرابع، فعدد حالات جلوس الثلاثة الأشخاص الباقين هو $3! = 6$، وبالتالي يكون عدد الحالات المرغوبة هو: $3! + 3! = 12$

تمرين 4:

ما هو عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها (3) أشخاص حول طاولة مستديرة تحتوي على (5) مقاعد؟

الحل:

مثل التمرين السابق، فإننا نقوم بتثبيت شخص معين في مقعد معين، كمعلم للترتيب، ثم نقوم بترتيب الشخصين المتبقيين حول (4) المقاعد المتبقية، وبما أن الترتيب مهم والتكرار غير مسموح، إذن فسنستخدم قانون الترتيبات بدون تكرار كالآتي: $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12$ طريقة

تمرين 5:

انطلاقا من مجموعة مكونة من الأحرف الآتية {أ، ب، ت، ث}.

1/ ما عدد الكلمات التي يمكن أن نحصل عليها من خلال تغيير (تبديل) ترتيب هذه الأحرف؟

2/ ما هو عدد الكلمات بحيث يتواجد الحرفين أ، ب، بجانب بعضيهما وبالترتيب السابق (أ قبل ب)؟

3/ ما هو عدد الكلمات بحيث يتواجد الحرفين أ، ب، بجانب بعضيهما؟

الحل:

1/ نلاحظ أن الترتيب مهم، التكرار غير مسموح به، r=n، اذن نستخدم قانون التبديلات بدون تكرار:

$$A_n^n = P_n = n! = 4! = 24$$

2/ بما أن الحرفين أ، ب، يتواجدان بجانب بعضيهما، بحيث أ قبل ب، فإنهما يعتبران وكأنهما حرف واحد، وبالتالي يصبح عندنا 3 حروف، ويكون عدد الكلمات هو: $A_n^n = P_n = n! = 3! = 6$

3/ عدد الكلمات بحيث يتواجد الحرفين أ، ب، بجانب بعضيهما، هو مثل السؤال السابق (6 كلمات)، لكن كل كلمة تتضمن حالتين على حسب ترتيب الحرفين أ، ب، وبالتالي يصبح عدد الكلمات هو: $3! \times 2! = 12$

تمرين 6:

انطلاقا من مجموعة مكونة من الأحرف الآتية {أ، أ، ب، ب، ب، ت، ث}.

1/ ما عدد الكلمات التي يمكن أن نحصل عليها من خلال تغيير (تبديل) ترتيب هذه الأحرف؟

2/ ما هي عدد الكلمات المكونة من 3 أحرف التي يمكن تشكيلها من خلال المجموعة السابقة، بحيث أن أي حرف لا يمكن أن يظهر في هذه الكلمات أكثر مما هو موجود في المجموعة الأصلية؟

الحل:

1/ نلاحظ أن الترتيب مهم، التكرار غير مسموح به، r=n، بعض الأحرف مكررة في المجموعة الأصلية، إذن نستخدم التبديلات مع التكرار: $\widetilde{P_n} = \frac{7!}{2!\times 3!} = 420$

2/ يمكن حصر عدد الكلمات في ثلاث حالات، حالة الكلمات تتضمن حروف مختلفة، أو حالة الكلمات تتضمن حرفين متشابهين، أو حالة الكلمات تتضمن 3 حروف متشابهة.

عدد الكلمات في الحالة الأولى هو: $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

الكلمات في الحالة الثانية تتضمن الكلمات التي يظهر فيها الحرف أ مرتين مع حرف آخر (ب، ت، ث) وهي 9 كلمات: $(C_2^2 \times A_3^1) \times 3 = 9$، أو الكلمات التي يظهر فيها الحرف ب مرتين مع حرف آخر (أ، ت، ث) وهي 9 كلمات: $(C_2^2 \times A_3^1) \times 3 = 9$، وبالتالي **عدد الكلمات الحالة الثانية** هو 18 كلمة.

عدد الكلمات في الحالة الثالثة هو كلمة واحدة (ب ب ب).

وبالتالي العدد الإجمالي للكلمات المكونة من 3 أحرف هو: 43 = 1 + 18 + 24

وفي الأخير نشير إلى أن نوع الأسئلة الشبيهة بالسؤال الأخير ليس لها طريقة حل عامة ومشتركة بينها، بل على حسب طبيعة السؤال.

تمرين 7:

صندوق به 6 كرات مرقمة من الرقم 1 إلى الرقم 6، نسحب 3 كرات واحدة بعد الأخرى وبدون إرجاع، فما هو عدد الأعداد التي يمكن الحصول عليها من هذا السحب.

الحل:

نلاحظ أن **الرتيب مهم**، لأن السحب واحدة بعد الأخرى؛ أي وكأننا نسجل الرقم الذي خرج أولا هو الأول، ثم الذي بعده، وهكذا، وكذلك نلاحظ أن **التكرار غير مسموح به**؛ لأن السحب بدون إرجاع؛ معناه عند سحب كرة معينة فلا يتم إرجاعها إلى الصندوق، ثم يتم سحب كرة أخرى، وهكذا، وبالتالي نستخدم قانون الترتيبات بدون تكرار، وذلك كالآتي: $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 120$

تمرين 8:

في سباق للعدو، يتسابق 7 أشخاص: أ1، أ2،...،أ7، فما هو عدد الإمكانيات أن يصل:

1/ الشخص أ1 في المرتبة الأولى، والشخص أ4 في المرتبة الثانية؟

2/ الشخص أ1 في المرتبة الثالثة، والشخص أ4 في المرتبة الخامسة؟

3/ الأشخاص أ1، أ2، أ3، قبل باقي الأشخاص؟

الحل:

1/ نضع الشخص أ1 في المرتبة الأولى، والشخص أ4 في المرتبة الثانية، فيكون عدد الحالات الممكنة هو عدد امكانيات ترتيب خمسة الأشخاص (المتسابقين) الباقين في خمسة المراتب المتبقية، والعدد هو: $5! = 120$

2/ تكون نفس نتيجة السؤال السابق، حيث أننا نضع الشخص أ1 في المرتبة الثالثة، والشخص أ4 في المرتبة الخامسة، وبالتالي يكون عدد امكانيات ترتيب خمسة الأشخاص الباقين، هو: $5! = 120$

أي أنه في الحالة العامة فإن النتيجة نفسها، عند تحديد أشخاص معينين في مواضع محددة، بغض النظر عن من هم الأشخاص بالضبط، وأي المواضع بالضبط، فيكون عدد الامكانيات هو عدد امكانيات ترتيب الأشخاص الباقين في المواضع الباقية.

3/ عدد الامكانيات هو عدد امكانيات ترتيب الأشخاص أ1، أ2، أ3، في المراتب الثلاثة الأولى ($3! = 6$) ، وعدد امكانيات ترتيب الأشخاص الأربعة الباقين، في المراتب الأربعة الأخيرة الباقية ($4! = 24$)، وبالتالي العدد هو: $3! \times 4! = 144$.

تمرين 9:

في مسابقة توظيف، أُجري امتحان لـ 10 متنافسين.

1/ من أجل اختيار 3 أشخاص، من أجل شغل المناصب الآتية: مدير، نائب أول، نائب ثاني، ماهي عدد إمكانيات هذا الاختيار؟

2/ من أجل اختيار 5 أشخاص، من أجل شغل المناصب الآتية: مدير، نائب أول، 3 أُمناء، ما هو عدد امكانيات هذا الاختيار؟

3/ نقوم بتكرار الامتحان 3 مرات للمتنافسين جميعهم، وفي كل مرة نختار الناجح الأول ونعطيه جائزة، بحيث أننا لدينا ثلاث جوائز متشابهة نريد توزيعها، فما هو عدد طرق توزيع هذه الجوائز؟

الحل:

1/ نلاحظ أن **الترتيب مهم**، لأنه في حالة مثلا نجاح ثلاثة أشخاص مترتبين كالآتي: (أ، ب، ج)، فإن بهذا الترتيب يعتبر (أ) هو المدير، (ب) النائب الأول و(ج) النائب الثاني، وأما إذا كانوا مرتبين كالآتي: (ب، أ، ج)،

فإنه تعتبر وتحسب حالة أخرى، لأن (ب) يصبح هو المدير، (أ) النائب الأول و(ج) النائب الثاني، وأما التكرار **فغير مسموح به**؛ لأنه مستحيل أن يوجد شخص معين في منصبين في نفس الوقت، فلذلك نستخدم الترتيبات بدون تكرار، وذلك كالآتي:

$$A_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{3!}=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}=604800 \text{ طريقة}$$

2/ نلاحظ أن التكرار غير مسموح به، والترتيب مهم للمنصبين الأول والثاني (مدير ونائبه)، وغير مهم للمناصب الثلاثة الأخيرة (ثلاثة أُمناء)، وبالتالي نستخدم الترتيبات بدون تكرار للمنصبين الأول والثاني، والتوفيقات بدون تكرار لثلاثة مناصب الأخيرة، حيث بعد اختيار شخصين من بين 10 أشخاص لوضعهم في المنصبين الأول والثاني، يتم اختيار ثلاثة أشخاص من بين 8 أشخاص الباقين، لوضعهم في ثلاثة المناصب الأخيرة، وبالتالي عدد الامكانيات هو: $A_{10}^{2}\times C_{8}^{3}=\frac{10!}{(10-2)!}\times\frac{8!}{3!\times(8-3)!}=90\times56=5040$

3/ نلاحظ أن الترتيب غير مهم لأن الجوائز متشابهة، والتكرار مسموح به لأنه يمكن لنفس الشخص أن ينجح أكثر من مرة، إذن نحن بصدد التوفيقات مع التكرار، ويكون عدد الطرق هو:

$$\widetilde{C_{10}^{3}}=C_{10+3-1}^{3}=C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!\times(12-3)!}=220$$

تمرين 10:

في مخبر للبحوث الطبية، يريد الباحثين صناعة دواء معين، وذلك من خلال اجراء تجارب بمزج 3 مواد أولية، بنسب مختلفة، كالآتي: 50%، 30%، 20%، حيث أن الباحثين يملكون 5 مواد أولية مختلفة لإجرائها في هذه التجارب، فما عدد أنواع المزيج التي يمكن الحصول عليها؟

الحل:

نلاحظ أن الترتيب مهم، لأنه عندما نختار 3مواد معينة لإدخالها في المزيج، فإن هناك حالات مختلفة لمزجها على حسب النسب، فمثلا المواد الأولية أ ب ج، يتم مزجها بالنسب الآتية: {أ(50%)، ب (30%) ج(20%)}، {أ(30%)، ب (50%) ج(20%)}،...الخ، وكذلك نلاحظ أن التكرار غير مسموح به؛ لأن كل مادة أولية تدخل مرة واحدة، وغير منطقي أن تدخل مرتين في المزيج، إذن نحن بصدد ترتيبات بدون تكرار، وبالتالي عدد أنواع المزيج (الأدوية) هو: $A_{5}^{3}=\frac{5!}{(5-3)!}=60$

تمرين 11:

ما هو عدد الطرق التي يمكن أن تختار بها مؤسسة 3 أسواق من بين 7 أسواق متاحة، وهذا لتوزيع 3 منتجات (أ، ب، ج)، حيث كل منتج يوجه لسوق معين؟

الحل:

نلاحظ أن **الترتيب مهم**، لأن اختيار 3 أسواق لا يهم فيها الترتيب، لكن لتوزيع 3 منتجات (أ، ب، ج) فإن الترتيب مهم، وبالتالي تكون النتيجة كالآتي: $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = 30$

أو يمكن أن نحل **بطريقة ثانية**، وذلك بملاحظة أنه عندنا تجربتين متتاليتين، أو ما يسمى بالتجربة المركبة (المجزئة)، حيث أنه لا يمكن أن تتم التجربة الثانية إلا بعد أن تتم الأولى، وبالتالي يكون:

العدد الكلي= (عدد طرق التجربة الأولى) و(عدد طرق التجربة الثانية)

عدد طرق التجربة الأولى هو عدد طرق اختيار 3 أسواق من بين 7 أسواق، وبالتالي فإن الترتيب غير مهم والتكرار غير مسموح به، أي نستخدم التوفيقات بدون تكرار، ومنه نجد أن عدد طرق التجربة الأولى هو:

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!\times(7-3)!} = \frac{7!}{3!\times4!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times(4\times3\times2\times1)} = 5$$

عدد طرق التجربة الثانية هو عدد طرق توزيع 3 منتجات (أ، ب، ج) على 3 أسواق مختارة (بعد أن تتم عملية اختيارها)، فنلاحظ بأن الترتيب مهم والتكرار غير مسموح به، وأيضا r=n، إذن نحن بصدد **تبديلة**، ويكون عدد الطرق هو: $3! = 6$.

ومنه فإن العدد الكلي= (عدد طرق التجربة الأولى) و* (عدد طرق التجربة الثانية)

= 5 × 6 = 30 طريقة (نفس نتيجة الطريقة الأولى)

* في الاحتمالات يترجم في التعبير اللغوي الحرف (و) إلى علامة الجداء ×، أما (أو) فتترجم إحصائيا إلى علامة الجمع (+)، وهذا إذا كنا بين أعداد، وأما إذا كنا بين مجموعات فيترجم الحرف (و) إلى رمز التقاطع (∩)، وأما (أو) فتترجم إلى رمز الاتحاد (∪).

تمرين12:

إذا كان لدينا 15 قارورة، حيث 5 قارورات منها تحتوي على محاليل سامة، نقوم باختيار 4قارورات، ثم نقوم بسحب قطرة من كل قارورة، ونقوم بمزج هذه القطرات، فنحصل على مزيج معين، ويكون هذا المزيج سام إذا كان يتضمن على الأقل على قطرة واحدة سامة.

1/ إذا تم سحب القارورات في آن واحد:

أ- كم مزيج يمكن الحصول عليه؟

ب- كم مزيج غير سام؟

ت- كم مزيج سام؟

2/ نفس الأسئلة السابقة، إذا تم سحب القارورات واحدة بعد الأخرى ومع الارجاع؟

الحل:

1/ نلاحظ أن الترتيب غير مهم والتكرار غير مسموح به، إذن نستخدم التوفيقات بدون تكرار.

1-أ/ عدد أنواع الأمزجة التي يمكن الحصول عليها هو: $C_{15}^4 = \frac{15!}{4!\times(15-4)!} = 1365$

1-ب/ عدد الأمزجة الغير سامة هو: $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\times(10-4)!} = 210$

1-ت/ عدد الأمزجة السامة هو: $(C_5^1 \times C_{10}^3) + (C_5^2 \times C_{10}^2) + (C_5^3 \times C_{10}^1) + (C_5^4)$

$$= \left(5 \times \frac{10!}{3! \times (10-3)!}\right) + \left(\frac{5!}{2! \times (5-2)!} \times \frac{10!}{2! \times (10-2)!}\right) + \left(\frac{5!}{3! \times (5-3)!} \times 10\right) + 5$$

$$= 600 + 450 + 100 + 5 = 1155$$

طريقة 2: عدد الأمزجة السامة هو: $C_{15}^4 - C_{10}^4 = 1365 - 210 = 1155$

2/ نلاحظ أن الترتيب مهم، لكن التكرار مسموح به، لأن سحب القارورات على التوالي ومع الارجاع؛ أي أنه يمكن سحب نفس القارورة أكثر من مرة، وبالتالي نستخدم الترتيبات مع التكرار.

2-أ/ عدد أنواع الأمزجة التي يمكن الحصول عليها هو: $\widetilde{A_{15}^4} = 15^4 = 50625$

2-ب/ عدد أنواع الأمزجة الغير سامة هو: $\widetilde{A_{10}^{4}} = 10^4 = 10000$

2-ت/ عدد أنواع الأمزجة السامة هو:

$$C_3^1 \times (\widetilde{A_5^1} \times \widetilde{A_{10}^3}) + C_4^2 \times (\widetilde{A_5^2} \times \widetilde{A_{10}^2}) + C_3^1 \times (\widetilde{A_5^3} \times \widetilde{A_{10}^1}) + (\widetilde{A_5^4})$$
$$= 4 \times (5^1 \times 10^3) + 6 \times (5^2 \times 10^2) + 4 \times (5^3 \times 10^1) + 5^4$$
$$= 20000 + 15000 + 5000 + 625 = 40625$$

طريقة 2: عدد أنواع الأمزجة السامة هو: $\widetilde{A_{15}^{4}} - \widetilde{A_{10}^{4}} = 15^4 - 10^4 = 40625$

تمرين 13:

شخص ما يريد تشكيل عدد سري مكون من (10) أرقام، انطلاقا من مجموعة أصلية من العناصر مكونة من الأرقام الآتية: {1، 2 ، 3}، فما هو عدد الأعداد السرية التي يمكن تشكيلها، إذا كانت يمكن أن تتضمن أرقام متشابهة؟

الحل:

نلاحظ أن **الترتيب مهم**، لأنه اذا كان عندنا عدد سري معين، فإنه عند تغيير ترتيب رقمين فهذا يعطينا عدد سري آخر (حالة أخرى).

ونلاحظ أيضا أن التكرار مسموح به، لأن الأرقام يمكن أن تكون متشابهة، ولأنه لو لم يكن التكرار مسموح به، فإنه لا يمكن ومستحيل تشكيل الأعداد السرية التي تحتوي 10 أرقام.

إذن نستخدم قانون الترتيبات مع التكرار: $\widetilde{A_n^r} = n^r = 3^{10} = 59049$

تمرين 14: تقدم 3 متنافسين (أ، ب، ج) لمسابقة معينة، فتم اجراء لهم 5 امتحانات متتالية (امتحان بعد الآخر)، حيث يمكن لمتنافس معين أن ينجح في أكثر من امتحان، فما هو عدد امكانيات النجاح؟

الحل:

نلاحظ أن الترتيب مهم، وكذلك فإن التكرار مسموح به، إذن نستخدم الترتيبات مع التكرار، حيث أن المجموعة الأصلية هي الأشخاص المتنافسين والمجموعة الجزئية هي الامتحانات، وبالتالي نجد:

$$\widetilde{A_n^r} = n^r = 3^5 = 243$$

تمرين 15:

مجموعة أصلية مكونة من خمسة حروف الآتية: {أ، ب، ت، ث، ج}، انطلاقا من أحرف هذه المجموعة، فما هو عدد الكلمات المكونة من:

1/ 3 أحرف؟

2/ 5 أحرف؟

3/ 6 أحرف؟

4/ 3 أحرف، مع وجوب أن تتضمن هذه الكلمات الحرف (أ)؟

5/ 3 أحرف متمايزة؟

6/ 3 أحرف متمايزة، مع وجوب أن تتضمن هذه الكلمات الحرف (أ)، وغياب الحرف (ب)؟

الحل:

1/ نلاحظ أن الترتيب مهم، والتكرار مسموح به، اذن نحن بصدد ترتيبة مع تكرار، وبالتالي نجد:

$$\widetilde{A_n^r} = n^r = 5^3 = 125$$

2/ عدد الكلمات المكونة من 5 أحرف هو: $\widetilde{A_n^r} =^r = 5^5 = 3125$

3/ عدد الكلمات المكونة من 6 أحرف هو: $\widetilde{A_n^r} =^r = 5^6 = 15625$

4/ عدد الكلمات المكونة من 3 أحرف، مع وجوب أن تتضمن الحرف (أ)، يحسب كالآتي:

العدد المعني= (عدد الطرق حيث يظهر الحرف "أ" مرة واحدة ويظهر حرفين آخرين) **أو** (عدد الطرق حيث يظهر الحرف "أ" مرتين ويظهر حرف آخر) أو (عدد الطرق حيث يظهر الحرف "أ" 3مرات)

عدد طرق ظهور الحرف (أ) مرة واحدة وظهور حرفين آخرين= (عدد طرق الحرف "أ") و(عدد طرق الحرفين)

عدد طرق الحرف (أ) مرة واحدة، هو 3 ، لأن هناك 3 مواضع ممكنه لظهوره، أو باستخدام القانون $C_3^1 = 3$

عدد طرق الحرفين الآخرين، وهذا بعد اختيار الحرف (أ)، وبالتالي المجموعة الأصلية يصبح فيها 4 أحرف، نلاحظ أن الترتيب بين الحرفين مهم ، والتكرار مسموح به، إذن نستخدم الترتيبات مع التكرار، والعدد هو:

$$\widetilde{A_n^r} = n^r = 4^2 = 16$$

إذن: عدد الطرق حيث يظهر الحرف (أ) مرة واحدة وظهور حرفين آخرين= 3×16=48

عدد طرق ظهور الحرف (أ) مرتين وظهور حرف آخر= (عدد طرق الحرف "أ" مرتين) و(عدد طرق الحرف الآخر)

عدد الطرق حيث يظهر الحرف (أ) مرتين (ضمن 3 أحرف)، نلاحظ أن **الترتيب غير مهم**، لأن الذي يهمنا هنا هو اختيار موضعين من بين 3 مواضع (لوضع فيهم الحرف "أ" مرتين)، فلا يهم التبديل بين الموضعين لوضع الحرف (أ) مرتين، كذلك **التكرار غير مسموح به**، لأنه مثلا إذا اخترنا الموضع الأول ووضعنا فيه الحرف (أ)، فإنه ينبغي اختيار موضع آخر (ليس الأول) لوضع فيه الحرف (أ) مرة ثانية، وبالتالي نستخدم قانون التوفيقات بدون تكرار، كالآتي: $C_n^r = C_3^2 = \frac{3!}{2!\times(3-2)!} = 3$

عدد طرق ظهور الحرف الآخر بعد اختيار الحرف أ مرتين؛ أي المجموعة الأصلية يصبح فيها 4 أحرف، هو 4 طرق، أو باستخدام القانون: $n^r = 4^1 = 4$

عدد طرق ظهور الحرف أ مرتين وظهور حرف آخر= $3 \times 4 = 12$

عدد الطرق حيث يظهر الحرف (أ) 3مرات، هو طريقة واحدة، أو باستخدام قانون: $C_3^3 = 1$

وبالتالي يكون العدد المعني = $48 + 12 + 1 = 61$

ويمكن تلخيص الحل كالآتي:

العدد المعني= (عدد الطرق حيث يظهر الحرف "أ" مرة واحدة ويظهر حرفين آخرين) **أو** (عدد الطرق حيث يظهر الحرف "أ" مرتين ويظهر حرف آخر) أو (عدد الطرق حيث يظهر الحرف "أ" 3مرات)

$$= (4^2\times C_3^1) + (4^1\times C_3^2) + (C_3^3)$$
$$= (16\times3) + (4\times3) + 1 = 61^{*}$$

* يمكن التأكد من النتيجة بالحساب التجريبي بالحالة، وبما أن الحالات كثيرة ويصعب احصائها (61) حالة، فإنه يمكن تصغير عدد عناصر المجموعة الأصلية، ثم المقارنة بين نتيجة الحساب بالقوانين والحسب التجريبي بالحالة (للتأكد من صحة القوانين).

طريقة 2: العدد المعني= العدد الكلي بدون شرط – العدد بحيث لا يظهر الحرف أ اطلاقا

$$= 5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$$

5/ نلاحظ أن الترتيب مهم، والتكرار غير مسموح به؛ لأن الأحرف متمايزة (غير متشابهة)، وبالتالي نستخدم قانون الترتيبات بدون تكرار، كالآتي: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 60$

6/ وجوب وجود الحرف (أ)؛ أي هناك 3 طرق لاختياره، ووجوب غياب الحرف (ب)؛ أي المجموعة الأصلية يصبح فيها 4 أحرف، وبعد اختيار الحرف (أ) فإن المجموعة الأصلية يبقى فيها 3 أحرف فقط؛ أي الحرفين الآخرين في المجموعة المراد تشكيلها يتم اختيارهم مما تبقى في المجموعة الأصلية (3 أحرف)، ومنه النتيجة تكون كالآتي: عدد الكلمات = (عدد طرق اختيار "أ") و (عدد طرق اختيار الحرفين الباقيين)

$$= 3 \times (A_3^2) = 3\times 6 = 18$$

تمرين 16:

صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء (متشابهة).

1/ ما هي امكانيات سحب 3 كرات على التوالي وبدون ارجاع؟

2/ ما هي امكانيات سحب 3 كرات على التوالي ومع الارجاع؟

3/ ما هي امكانيات سحب 3 كرات في آن واحد؟

الحل:

1/ نلاحظ أن التكرار غير مسموح به، لأن السحب بدون ارجاع، والترتيب مهم لأن السحب على التوالي*، ويمكن ايجاد عدد الإمكانيات بطريقتين، كالآتي:

طريقة1: نستخدم الترتيبات بدون تكرار، والعدد هو: $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$

طريقة **2**: العدد يساوي عدد امكانيات سحب الكرة الأولى و عدد امكانيات سحب الكرة الثانية، وعدد امكانيات سحب الكرة الثالثة وبالتالي عدد الامكانيات هو: $7\times6\times5 = 210$

* في حالة السحب على التوالي (تجربة مكررة أو تجارب متتالية)، فإن الترتيب مهم في الأصل إذا كنا نريد معرفة عدد امكانيات السحب (الاختيار)، وهذا حتى وإن كانت الأشياء التي سيتم سحبها أو اختيارها متشابهة، إلا في حالات إذا كنا نريد استخدام ما تم سحبه في أشياء متشابهة لا يهم الترتيب بينها، بحيث تدل صيغة السؤال على أن الترتيب غير مهم، أنظر مثلا السؤال 3 من التمرين 9 من هذا الفصل، بحيث وكأننا في حالة سحب على التوالي ومع التكرار، لكن استخدمنا التوفيقات مع التكرار.

** الطريقة الثانية يمكن تطبيقها في الكثير من الأسئلة الأخرى، وهي لا تعتمد على قوانين التحليل التوافقي، لذلك يمكن تسميتها بالطريقة التقليدية أو البدائية.

2/ نلاحظ أن التكرار مسموح به، لأن السحب مع الارجاع، والترتيب مهم لأن السحب على التوالي، ويمكن ايجاد عدد الإمكانيات بطريقتين، كالآتي:

طريقة1: نستخدم الترتيبات مع تكرار، والعدد هو: $\widetilde{A_7^3} = 7^3 = 343$

طريقة 2: العدد يساوي عدد امكانيات سحب الكرة الأولى و عدد امكانيات سحب الكرة الثانية، وعدد امكانيات سحب الكرة الثالثة وبالتالي عدد الامكانيات هو: $343 = 7 \times 7 \times 7$

3/ نلاحظ أن التكرار غير مسموح به، والترتيب غير مهم، لأن السحب في آن واحد، وبالتالي نستخدم التوفيقات بدون تكرار، وعدد الامكانيات هو: $C_7^3 = \frac{7!}{3! \times (7-3)!} = 35$

تمرين 17:

صندوق به 5 كرات بيضاء *، 4 سوداء، 3 زرقاء.

1/ نقوم بسحب 3 كرات في آن واحد (في نفس الوقت).

أ- ما هو عدد امكانيات السحب؟

ب- ما هو عدد الامكانيات المختلفة التي يمكن أن يلاحظها الساحب؟

ت- ما هو عدد الامكانيات أن تكون الكرات من نفس اللون؟

ث- // // // // من ألوان مختلفة؟

ج- // // // // تتضمن كرة واحدة بيضاء فقط؟

ح- // // // // تتضمن على الأقل كرة سوداء واحدة؟

2/ نقوم بسحب 3 كرات على التوالي ومع الإرجاع.

أ- ما هو عدد امكانيات السحب؟

ب- ما هو عدد الإمكانيات المختلفة التي يمكن أن يلاحظها الساحب؟

ت- ما هو عدد الامكانيات أن تكون الكرات من نفس اللون؟

---

* إذا ما أردنا التأكد من نتيجة ما بالحساب التجريبي بالحالة، فإنه ينبغي التمييز بين الكرات البيضاء، كأن نرمز لهم (ب1، ب2، ب3، ب4، ب5)، وكذلك السوداء (س1، س2، س3، س4)، وكذلك الزرقاء (ز1، ز2، ز3)، لأنه إن لم نفعل ذلك فإنه مثلا حالة ظهور 3 كرات بيضاء يتم حسابها مرة واحدة (لأنه لا يمكن التمييز بينها في الواقع)، وهذا خطأ، لأنها تتضمن حالات عديدة، مثل: (ب1، ب4، ب5)، (ب1، ب1، ب3)،...الخ، ويبقى طبعا الترتيب غير مهم إذا كان السحب في آن واحد، لأنه مثلا حالة (ب3، ب1، س1) يتم تصنيفها نفسها إذا غيرنا ترتيب الكرات التي ظهرت، مثل حالة (س1، ب1، ب3) فهي نفسها.

3/ نقوم بسحب 7 كرات، بحيث تكون طريقة السحب، كالآتي:

أ- إذا سحبنا 3 كرات في آن واحد أولا، ثم كرتين على التوالي وبدون ارجاع، ثم كرتين على التوالي ومع الارجاع، فما هو عدد امكانيات السحب؟

ب- إذا سحبنا 3 كرات في آن واحد أولا، ثم كرتين على التوالي ومع الارجاع، ثم كرتين على التوالي وبدون الارجاع، فما هو عدد امكانيات السحب؟

الحل

1-أ/ نلاحظ أن الترتيب غير مهم، لأن السحب يتم في آن واحد، كذلك نلاحظ أن التكرار غير مسموح به لأن السحب بدون إرجاع، لذلك نستخدم التوفيقات بدون تكرار:

$$C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!\times(12-3)!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{6\times9!}=(220)$$

1-ب/ نلاحظ أن الساحب لا يمكنه التمييز بين الكرات من نفس اللون، وحتى نجد عدد الحالات التي يمكن أن يلاحظها، فإننا نفترض أن المجموعة الأصلية تتضمن 3 كرات بألوان مختلفة، مع اعتبار أن التكرار مسموح به، لأنه يمكن أن تظهر أي من الكرات أكثر من مرة، والترتيب غير مهم (مثل السابق)، وبالتالي نستخدم التوفيقات مع التكرار، كالآتي:

$$\widetilde{C_{3}^{3}}=C_{5}^{3}=\frac{5!}{3!\times(5-3)!}=\frac{5\times4}{2}=10$$

وفعلا عند احصاء الحالات تجريبيا، فإننا نجد 10 حالات، وهي: **{ب ب ب، س س س، ز ز ز، ب س س، ب ز ز، ب ز س، ب ب ز، ب ب س، س س ز، ز ز س}**

ونشير إلا أن هذا النوع من الأسئلة ليس له طريقة ثابتة للحل، بل على حسب كل سؤال وحالته، فنفرض أنه في المجموعة الأصلية عندنا كرتين زرقاوتين فقط، فهنا مستحيل أن نسحب 3 كرات زرقاء، فهنا تكون عدد الإمكانيات مثل السابق، لكن ننقص حالة 3 كرات زرقاء، أي: $\widetilde{C_{3}^{3}}-1=10-1=9$

1-ت/ أن تكون الكرات من نفس اللون، يعني: (3 كرات بيضاء) أو (3 كرات سوداء) أو (3 كرات زرقاء)

وبالتالي عدد الإمكانيات = (C_{5}^{3}) + (C_{4}^{3}) + (C_{3}^{3})

$$= \frac{5!}{3!\times(5-3)!} + 4 + 1$$

$$= 10 + 5 = 15$$

1-ث/ أن تكون الكرات من ألوان مختلفة، يعني: (واحدة بيضاء) و (واحدة سوداء) و (واحدة زرقاء)

وبالتالي عدد الإمكانيات $= (C_5^1) \times (C_4^1) \times (C_3^1)$

$$= 5 \times 4 \times 3$$

$$= 60$$

1-ج/ أن تكون الكرات تتضمن كرة واحدة بيضاء فقط، يعني: (واحدة بيضاء) و (كرتين غير بيضاوتين)

وبالتالي عدد الإمكانيات $= (C_5^1) \times (C_7^2)$

$$= 5 \times \frac{7!}{2!\times(7-2)!}$$

$$= 5 \times 21 = 105$$

1-ح/ أن تكون الكرات تتضمن على الأقل كرة سوداء واحدة، يعني:

(1 سوداء و 2 غير سوداوتين) أو (2 سوداوتين و واحدة غير سوداء) أو (3 سوداوتين)

وبالتالي عدد الإمكانيات $= (C_4^1 \times C_8^2) + (C_4^2 \times C_8^1) + (C_4^3)$

$$= \left(4 \times \frac{8!}{2!\times(8-2)!}\right) + \left(\frac{4!}{2!\times(4-2)!} \times 8\right) + (4)$$

$$= 112 + 48 + 4$$

$$= 164$$

2-أ/ نلاحظ أن الترتيب مهم؛ لأن السحب على التوالي؛ لأنه لو لم يكن يهم الترتيب لقام الشخص بالسحب في آن واحد*، والتكرار مسموح به؛ لأن السحب مع الارجاع، وبالتالي يمكن نعيد إخراج نفس الكرة، اذن نستخدم قانون الترتيبات مع التكرار، وبالتالي عدد امكانيات السحب الممكنة هو:

$$\widetilde{A_n^r} = n^r = 12^3 = 1728$$

---

* المقصود في هذا السؤال الحالات الممكنة، وليس ما يمكن أن يلاحظه الساحب، حيث أن الحالات التي تظهر بالعين المجردة أنها نفس الحالة، مثل حالة ثلاثة كريات بيضاء، فإنها تتضمن حالات كثيرة، على حسب الكرات البيضاء الثلاثة التي ظهرت أثناء السحب من بين الأربعة الكرات البيضاء في السحب، أي أنه **لا يتم التمييز** بين الكرات من نفس اللون **في الواقع من طرف الساحب**، لذلك لا يستطيع الشخص الذي قام بالسحب على التوالي القيام بعملية الترتيب بين الكرات من نفس اللون، لكن **يتم التمييز نظريا** بين أي من الكرات من نفس اللون ظهرت أولا؛ لذلك يتم استخدام الترتيبات.

2-ب/ نلاحظ أنه كذلك حسب ما يتم ملاحظته من طرف الساحب، فإن الترتيب مهم، والتكرار مسموح به، إلا أنه يوجد حالات متشابهة بالنسبة للساحب لا يمكنه التمييز بينها، ويعتبرها نفس الحالة (لا يمكنه التمييز والترتيب بين الكرات من نفس اللون)، مثل حالة كرتين بيضاوتين ثم كرة سوداء، فالساحب لا يمكنه التمييز بين الكرتين البيضاوتين (أي كرتين من الكرات البيضاء ظهرت)، لذلك في هذا السؤال فإننا نستخدم الترتيبات مع التكرار، مع افتراض أن المجموعة الأصلية تتضمن 3 كرات بألوان مختلفة، ويكون عدد الحالات هو:

$$\widetilde{A_3^3} = 3^3 = 27$$

وفعلا عند احصاء الحالات تجريبيا، فإننا نجد 27 حالة، وهي: **{ب ب ب، س س س، ز ز ز، ب س س (3حالات)، ب ز ز(3حالات)، ب ز س(6حالات)، ب ب ز(3حالات)، ب ب س(3حالات)، س س ز(3حالات)، ز ز س(3حالات)}**

2-ت/ أن تكون الكرات من نفس اللون يعني: (3كرات بيضاء) أو (3 كرات سوداء) أو (3 كرات زرقاء)

وبالتالي عدد الامكانيات = $\widetilde{A_5^3} + \widetilde{A_4^3} + \widetilde{A_3^3}$

$= 5^3 + 4^3 + 3^3$

$= 125 + 64 + 27$

$= 216$

3/ إذا سحبنا 7 كرات:

أ- عند سحب 3 كرات في آن واحد أولا، ثم كرتين على التوالي وبدون ارجاع، ثم كرتين على التوالي ومع الارجاع، فإنه في 3 كرات الأولى نطبق قانون التوفيقات بدون تكرار، لأن السحب في آن واحد، ثم في الكرتين الرابعة والخامسة نطبق الترتيبات بدون تكرار، لأن السحب على التوالي وبدون ارجاع، لكن مع الأخذ في الاعتبار أننا سحبنا 3 كرات، أي المجموعة الأصلية يبقى فيها 9 كرات فقط، ثم في الكرتين السادسة والسابعة نطبق قانون الترتيبات مع التكرار، لأن السحب على التوالي ومع الارجاع، مع الأخذ في الاعتبار أن المجموعة الأصلية يبقى فيها 7 كرات فقط، وبالتالي عدد الامكانيات هو:

$$C_{12}^3 \times A_9^2 \times \widetilde{A_7^2} = \frac{12!}{3! \times 9!} \times \frac{9!}{7!} \times 7^2 = 220 \times 72 \times 49 = 776160$$

ب- إذا سحبنا 3 كرات في آن واحد أولا، ثم كرتين على التوالي ومع الارجاع، ثم كرتين على التوالي وبدون الارجاع، فطريقة الحل تشبه السؤال السابق، والاختلاف يتمثل، في أنه في الكرتين الثالثة والرابعة نطبق قانون الترتيبات مع التكرار، وفي الكرتين السادسة والسابعة نطبق قانون الترتيبات بدون تكرار، مع ملاحظة أن المجموعة الأصلية يبقى عدد الكرات فيها ثابت (9 كرات)، لأن سحب الكرتين الرابعة والخامسة كان مع الارجاع، وبالتالي عدد الامكانيات هو:

$$C_{12}^{3} \times \widetilde{A_9^2} \times A_9^2 = \frac{12!}{3! \times 9!} \times 9^2 \times \frac{9!}{7!} = 220 \times 81 \times 72 = 1283040$$

تمرين 18:

صندوق يحتوي على 5 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5، و4 كرات سوداء مرقمة من 6 إلى 9.

1/ نقوم بسحب 4 كرات على التوالي (واحدة بعد الأخرى) وبدون الإرجاع.

أ- ما هو عدد الأعداد التي يمكن أن نحصل عليها؟

ب- كم عدد فردي يمكن أن نحصل عليه؟

ت- كم عدد يقبل القسمة على الرقم (3) يمكن أن نحصل عليه؟

ث- كم عدد يمكن أن نحصل عليه، بحيث يتضمن الرقم (2)؟

2/ نفس الأسئلة السابقة، لكن إذا كان السحب على التوالي ومع الإرجاع؟

3/ إذا تم سحب على التوالي وبدون ارجاع كرتين بيضاوتين، وكرتين سوداوتين:

أ- ما هو عدد الأعداد الممكن الحصول عليها؟

ب- ما هي عدد الأعداد الفردية ؟

ت- ما هو عدد الأعداد الزوجية ؟

4/ نفس أسئلة السؤال السابق، إذا تم سحب على التوالي ومع الارجاع كرتين بيضاوتين، وكرتين سوداوتين.

الحل:

1/ نلاحظ أن الترتيب مهم، لأن السحب على التوالي، وأيضا الكرات مرقمة، وكذلك أن صيغة الأسئلة تدل على أن الترتيب مهم، أما التكرار فهو غير مسموح به، لأن السحب بدون إرجاع، وبالتالي نستخدم الترتيبات بدون تكرار.

1–أ/ عدد إمكانيات السحب هو: $A_9^4 = \frac{12!}{(9-4)!} = 3024$

1–ب/ حتى تكون الأعداد فردية فينبغي أن يكون رقم الآحاد فردي، أي يتم اختياره من المجموعة {1، 3، 5، 7، 9}، وبالتالي تبقى 8 كرات في المجموعة الأصلية بعد اختيار كرة معينة (الأولى)؛ أي أن 3 كرات الأخرى يتم اختيارهم من 8 الكرات المتبقية.

وبالتالي عدد امكانيات الأعداد الفردية هو: $A_5^1 \times A_8^3 = 5 \times \frac{8!}{(8-3)!} = 1680$

طريقة* 2: عدد امكانيات الأعداد الفردية هو: عدد امكانيات رقم الآحاد (5امكانيات) وعدد امكانيات رقم العشرات بعد اختيار رقم الأحاد (8امكانيات)،...الخ، وبالتالي عدد الامكانيات هو:

$$5 \times 8 \times 7 \times 6 = 1680$$

1–ت/ حتى تكون الأعداد تقبل القسمة على (3)، فينبغي أن يكون رقم الآحاد يقبل القسمة على (3)،

وحسب الأرقام الموجودة على الكرات، فإن رقم الآحاد يتم اختياره من المجموعة {3، 6، 9}، و3 كرات الأخرى يتم اختيارهم من 8 الكرات الباقية بعد اختيار كرة معينة (الأولى).

وبالتالي عدد الإمكانيات هو: $A_3^1 \times A_8^3 = 3 \times \frac{8!}{(8-3)!} = 1008$

1–ث/ حتى تكون الأعداد تتضمن الرقم 2، فإن هناك حالة واحدة فقط لاختياره، لكن هناك أربعة مواضع لترتيبه، وأما الأرقام الثلاثة الأخرى يتم اختيارهم من 8 الكرات الباقية بعد اختيار الكرة التي تحمل الرقم 2.

وبالتالي عدد الإمكانيات هو: $4 \times A_1^1 \times A_8^3 = 4 \times \frac{8!}{(8-3)!} = 1344$

2/ نلاحظ أن الترتيب مهم، والتكرار مسموح به، وبالتالي نستخدم الترتيبات مع التكرار.

* مثل الطريقة التي تم استخدامها في التمرين 16 من هذا الفصل.

2-أ/ عدد إمكانيات السحب هو: $n^r = 9^4 = 6561$

طريقة 2: عدد الامكانيات هو: عدد امكانيات رقم الآحاد (9امكانيات) وعدد امكانيات رقم العشرات بعد اختيار رقم الأحاد (9امكانيات، لأن السحب مع الارجاع)،...الخ، وبالتالي عدد الامكانيات هو:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$$

2-ب/ عدد الأعداد الفردية هو: $5^1 \times 9^3 = 3645$

2-ت/ عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 3 هو: $3^1 \times 9^3 = 2187$

2-ث/ عدد الأعداد التي تتضمن الرقم 2 هو: $4 \times 1^1 \times 9^3 = 2916$

3/ إذا تم سحب على التوالي وبدون ارجاع كرتين بيضاوتين، وكرتين سوداوتين:

3-أ/ فعدد الأعداد الممكن الحصول عليها، يتضمن أن الترتيب مهم والتكرار غير مسموح، بحيث أننا نسحب كرتين بيضاوتين، وكرتين سوداوتين، والعدد يتمثل في عدد الأعداد المكونة لسحب كرتين بيضاوتين من الكرات البيضاء، وعدد الأعداد المكونة لسحب كرتين سوداوتين من الكرات السوداء، ومع الأخذ بالاعتبار عدد امكانيات مواضع ظهور الكرتين البيضاوتين والسوداوتين (C_4^2) أو $\frac{4!}{2!\times 2!}$، وتساوي 6 امكانيات، إذن فعدد الأعداد الممكن الحصول عليها هو: $C_4^2 \times A_5^2 \times A_4^2 = 6 \times 20 \times 12 = 1440$

أو بطريقة ثانية فعدد الأعداد هو: $\frac{4!}{2!\times 2!} \times A_5^2 \times A_4^2 = 6 \times 20 \times 12 = 1440$

3-ب/ عدد الأعداد الفردية: بما أن السحب على التوالي وبدون ارجاع، فإن عدد الإمكانيات تعني أن نسحب (واحدة بيضاء ذات رقم فردي أولا ثم واحدة بيضاء وكرتين سوداوتين) أو (نسحب واحدة سوداء ذات رقم فردي أولا ثم نسحب واحدة سوداء وكرتين بيضاوتين)

في الحالة الأولى، هناك 3 امكانيات لاختيار كرة بيضاء ذات رقم فردي، ثم بعد اختيار هذه الكرة، يبقى 4 امكانيات لاختيار كرة بيضاء، وهذه الكرة هناك 3 امكانيات لوضعها مع الكرتين السوداوتين (لأن الترتيب مهم)، أما الكرتين السوداوتين فيتم اختيارهم من 4 الكرات السوداء.

في الحالة الثانية، هناك 2 امكانيات لاختيار كرة سوداء ذات رقم فردي، ثم بعد اختيار هذه الكرة، يبقى 3 امكانيات لاختيار كرة سوداء، وهذه الكرة هناك 3 امكانيات لوضعها مع الكرتين البيضاوتين (لأن الترتيب مهم)، أما الكرتين البيضاوتين فيتم اختيارهم من 5 الكرات البيضاء.

وبالتالي العدد هو:

$$(3 \times 4 \times 3 \times A_4^2) + (2 \times 3 \times 3 \times A_5^2) = 36 \times \frac{4!}{(4-2)!} + 18 \times \frac{5!}{(5-2)!}$$
$$= (36 \times 12) + (18 \times 20) = 792$$

3-ت/ عدد الأعداد الزوجية: يمكن **استنتاجها**، وتتمثل في جميع الأعداد الممكنة منقوص منها الأعداد الفردية، وبالتالي عددها هو: $1440 - 792 = 648$

ويمكن ايجاد عدد الأعداد الزوجية مثل طريقة ايجاد عدد الأعداد الفردية، الشرح يشبه السابق، فقط في الكرة الأولى يهمنا أن تكون تحمل رقم زوجي، وباختصار فإن عدد الأعداد هو:

$$(2 \times 4 \times 3 \times A_4^2) + (2 \times 3 \times 3 \times A_5^2) = 24 \times \frac{4!}{(4-2)!} + 18 \times \frac{5!}{(5-2)!}$$
$$= (24 \times 12) + (18 \times 20) = 648$$

4/ إذا تم سحب على التوالي ومع الارجاع كرتين بيضاوتين، وكرتين سوداوتين:

4-أ/ عدد الأعداد الممكن الحصول عليها: نلاحظ أن الترتيب مهم لأن الكرات مرقمة ونريد ايجاد عدد الأعداد، والتكرار مسموح به لأن السحب مع الارجاع، وبالتالي نستخدم الترتيبات مع التكرار، وطريقة الحل مثل السؤال 3-أ، مع الأخذ بالاعتبار أن التكرار مسموح به، وبالتالي والعدد هو:

$$C_4^2 \times 5^2 \times 4^2 = 6 \times 25 \times 16 = 2400$$

4-ب/ عدد الأعداد الفردية:

الامكانيات المعنية تعني أن نسحب (واحدة بيضاء ذات رقم فردي أولا ثم واحدة بيضاء و كرتين سوداوتين) أو (نسحب واحدة سوداء ذات رقم فردي أولا ثم نسحب واحدة سوداء وكرتين بيضاوتين)

في الحالة الأولى، هناك 3 امكانيات لاختيار كرة بيضاء ذات رقم فردي، ثم بعد اختيار هذه الكرة، هناك 5 امكانيات لاختيار كرة بيضاء (لأن التكرار مسموح به)، وهذه الكرة هناك 3 امكانيات لترتيبها (وضعها) مع الكرتين السوداوتين (لأن الترتيب مهم)، أما الكرتين السوداوتين فيتم اختيارهم من 4 الكرات السوداء.

في الحالة الثانية، هناك 2 امكانيات لاختيار كرة سوداء ذات رقم فردي، ثم بعد اختيار هذه الكرة، هناك 4 امكانيات لاختيار كرة سوداء (لأن التكرار مسموح به)، وهذه الكرة هناك 3 امكانيات لترتيبها (وضعها) مع الكرتين البيضاوتين (لأن الترتيب مهم)، أما الكرتين البيضاوتين فيتم اختيارهم من 5 الكرات البيضاء.

وبالتالي العدد هو: $(3\times5\times3\times4^2)+(2\times4\times3\times5^2)=720+600=1320$

4-ت/ عدد الأعداد الزوجية، يمكن استنتاجه مباشرة، بحيث يساوي جميع الأعداد منقوص منه عدد الأعداد الفردية، ويساوي: $2400-1320=1080$

أو يمكن حساب هذا العدد مثل **طريقة السؤال السابق**، مع أخذ في الاعتبار أن تكون الكرة الأولى تحمل رقما زوجيا، وذلك كالآتي:

$$(2\times5\times3\times4^2)+(2\times4\times3\times5^2)=480+600=1080$$

تمرين 19/

في 12 مواقف متمايزة لركن السيارات.

1/ ما هي إمكانيات التوقف لـ 3 سيارات {س1، س2، س3}؟

2/ ما هي إمكانيات التوقف لـ 3 سيارات متشابهة؟

3/ ما هي إمكانيات التوقف لـ 5 سيارات، بعضها متمايزة والأخرى متشابهة، كالآتي: {س1، س1، س1، س2، س2}؟

4/ ما هي امكانيات التوقف لـ 12 سيارة {س1، س2،...،س12}؟

5/ ما هي امكانيات التوقف لـ 12 سيارة متشابهة؟

6/ ما هي امكانيات التوقف لـ 12 سيارة بعضها متشابهة والأخرى متمايزة كالآتي: {س1، س1، س2، س3، س3، س3، س4، س5، س5، س5، س5، س6}؟

الحل:

1/ نلاحظ أن الترتيب مهم، والتكرار غير مسموح به؛ لأنه لا يمكن اختيار مكان ما في موقف معين أكثر من مرة، مثل أ1، فإنه لا يمكن أن تتوقف فيه إلا سيارة واحدة، إذن عدد الإمكانيات هو:

$$A_{12}^{3} = \frac{12!}{(12-3)!} = 1320$$

2/ نلاحظ أن الترتيب غير مهم لأن السيارات متشابهة، والتكرار غير مسموح به، إذن عدد الإمكانيات هو:

$$C_{12}^{3} = \frac{12!}{3! \times (12-3)!} = 220$$

3/ نلاحظ أن الترتيب مهم للسيارات المتمايزة، وغير مهم للسيارات المتشابهة، والتكرار غير مسموح به، اذن سنستخدم الترتيبات بدون تكرار مع وجود حالات متشابهة، وذلك باستخدام قانون الترتيبات بدون تكرار ونقوم بإنقاص الحالات المتشابهة، كالآتي: $\frac{A_{12}^{5}}{2! \times 3!} = \frac{\frac{12!}{(12-5)!}}{12} = 7920$

4/ نلاحظ أن الترتيب مهم، والتكرار غير مسموح به، و r=n، إذن نحن بصدد التبديلات بدون تكرار (لأن السيارات كلها متمايزة)، وعدد الإمكانيات هو: $A_{12}^{12} = P_{12} = 12! = 479001600$

5/ نلاحظ أن الترتيب غير مهم لأن السيارات متشابهة، والتكرار غير مسموح به، و r=n، إذن نحن بصدد توفيقات بدون تكرار، وعدد الإمكانيات هو امكانية واحدة، كالآتي: $C_{12}^{12} = 1$

6/ نلاحظ أن الترتيب مهم في ما يخص السيارات المتمايزة، وغير مهم في ما يخص السيارات المتشابهة، والتكرار غير مسموح به، و r=n، إذن نحن بصدد التبديلات مع تكرار، وعدد الإمكانيات هو:

$$\widetilde{P_n} = \widetilde{P_{12}} = \frac{12!}{2! \times 3! \times 4!} = 1663200$$

تمرين 20:

5 مواقف (متمايزة) لركن السيارات، كل موقف له طاقة استيعابية لأكثر من 10 سيارات.

1/ ما هي امكانيات التوقف لـ 3 سيارات متشابهة؟

2/ ما هي امكانيات التوقف لـ 6 سيارات متشابهة؟

3/ ما هي امكانيات التوقف لـ3 سيارات متمايزة؟

الحل:

1/ نلاحظ أن الترتيب غير مهم لأن السيارات متشابهة، التكرار مسموح به لأنه يمكن أن نختار موقف معين أكثر من مرة، وبالتالي نستخدم التوفيقات مع التكرار، كالآتي: $\widetilde{C_5^3} = C_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!\times 3!} = 35$

2/ عدد الإمكانيات هو: $\widetilde{C_5^6} = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!\times(10-6)!} = 210$

3/ نلاحظ أن الترتيب مهم لأن السيارات متمايزة، والتكرار مسموح به، وبالتالي عدد الإمكانيات لاختيار المواقف هو: $\widetilde{A_n^r} = 5^3 = 125$

تمرين 21:

3 مواقف لركن السيارات، حيث الموقف A يتضمن 3 أماكن متشابهة (يستوعب 3 سيارات)، والموقف B يتضمن مكانين متشابهين، والموقف C يتضمن مكان واحد، حيث أن الشخص المنظم لعملية توقف السيارات، يبدأ بموقف معين حتى يمتلئ، ثم يختار موقف آخر، وهكذا نفس الشيء، حتى يتم ركن جميع السيارات، إذا كان عندنا 6 سيارات نريد ركنها.

1/ ما هو عدد امكانيات توقف السيارات؟

2/ما هو عدد الإمكانيات، إذا كانت المواقف تتضمن أماكن متمايزة؟

الحل:

البعض يسمي هذا النوع من التجارب **بالتجربة المجزئة المرتبة**، حيث نلاحظ أن هذه التجربة مجزئة إلى 3 أجزاء (مواقف)، وكذلك التجربة مرتبة لأننا نبدأ بموقف معين، وعندما يمتلئ ننتقل إلى الذي بعده، وفي صيغة التمرين تم تعمد عدم ذكر تريب المواقف الذي ينبغي اتباعه لركن السيارات، وذلك لأن أي ترتيب يتم اعتماده يعطي نفس النتيجة.

1/ بما أن كل موقف تتضمن أماكن متشابهة، فمعناه أن الترتيب غير مهم، وكذلك نلاحظ أن التكرار غير مسموح به، إذن نحن بصدد التوفيقات بدون تكرار، وأما ترتيب المواقف، فنفرض أننا اخترنا الموقف A ثم B ثم C، إذن فعدد الإمكانيات هو: $C_6^3 \times C_3^2 \times C_1^1 = \frac{6!}{3!\times 3!} \times 3 \times 1 = 60$

وعند اختيار ترتيب آخر للمواقف، فإننا نجد نفس النتيجة، فنفرض أننا اخترنا الموقف B ثم C ثم A، فيكون عدد الإمكانيات هو: $C_6^2 \times C_4^1 \times C_3^3 = \frac{6!}{2!\times 4!} \times 4 \times 1 = 60$

ويمكن الحل **بطريقة أخرى**، وذلك باعتبار أننا نريد توزيع 6 سيارات على 6 أماكن، أي وكأننا نريد ترتيب (تبديل) 6 أماكن، مع وجود أماكن متشابهة لا يهم الترتيب بينها، أي أننا بصدد تبديلات مع تكرار، ومنه يكون عدد الإمكانيات هو:

$$\widetilde{p_n} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{2} = 60$$

2/ بما أن المواقف تتضمن أماكن متمايزة، فمعناه أن الترتيب مهم، وكذلك نلاحظ أن التكرار غير مسموح به، إذن نحن بصدد الترتيبات بدون تكرار، وأما ترتيب المواقف، فنفرض أننا اخترنا الموقف A ثم B ثم C، فيكون عدد الإمكانيات هو: $A_6^3 \times A_3^2 \times A_1^1 = \frac{6!}{3!} \times 6 \times 1 = 720$

وعند اختيار ترتيب آخر للمواقف، فإننا نجد نفس النتيجة، فنفرض أننا اخترنا الموقف C ثم B ثم A، فيكون عدد الإمكانيات هو: $A_6^1 \times A_5^2 \times A_3^3 = 6 \times \frac{5!}{3!} \times 6 = 720$

ويمكن الحل **بطريقة أخرى**، وذلك باعتبار أننا نريد توزيع 6 سيارات على 6 أماكن، أي وكأننا نريد ترتيب (تبديل) 6 أماكن، وبما أن الأماكن متمايزة، فإن الترتيب بينها مهم، أي أننا بصدد تبديلات بدون تكرار، ومنه يكون عدد الإمكانيات هو: $p_n = 6! = 720$

الفصل الثاني:

المبادئ الأساسية للاحتمالات

1- ملخص:

- القانون العام للاحتمال.
- خواص الاحتمالات.

2- تمارين محلولة.

1. ملخص:

- **القانون العام للاحتمال:**

إذا كان لدينا حدث A، فإننا نرمز لاحتمال هذا الحدث بـ p(A)، والقانون العام للاحتمال هو:

$$p(A) = \frac{\text{عدد الحالات (الملائمة) الموافقة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة (الكلية)}} = \frac{Cas\ favorables}{Cas\ possibles} = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)}$$

- **المبادئ الأساسية للاحتمالات:**

يمكن ذكر بعض المبادئ الأساسية للاحتمالات كالآتي:

1- مهما يكن الحدث A، فإن: $0 \leq p(A) \leq 1$

2- $P(A \cap B) = p(B \cap A)$

3- $P(A \cup B) = p(B \cup A)$

4- $P[A \cap (B \cup C)] = p[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

5- $P[A \cup (B \cap C)] = p[(A \cup B) \cap (A \cup C)]$

6- $p[A \cup (B \cup C)] = p[(A \cup B) \cup C] = p(A \cup B \cup C)$

7- $p[A \cap (B \cap C)] = p[(A \cap B) \cap C] = p(A \cap B \cap C)$

8- $p[A \cap (B \cap A)] = p(A \cap B)$

9- إذا كان لدينا حدثين غير متنافيين A، B، فإن: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

10- إذا كان لدينا حدثين متنافيين A، B، فإن: $p(A \cap B) = 0$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

11- إذا كان لدينا ثلاثة حوادث غير متنافية A، B، C، فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

12- إذا كان لدينا ثلاثة حوادث متنافية A، B، C، فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$$

13- إذا كان لدينا حدثين مستقلين A، B، فذلك يعني أنه عند وقوع الحدث A، فإن ذلك لا يؤثر على احتمال وقوع الحدث B مستقبلا؛ أي: $P\left({B}/{A}\right) = P(B)$، وكذلك عند وقوع الحدث B، فإن ذلك لا يؤثر على احتمال وقوع الحدث A مستقبلا؛ أي: $P\left({A}/{B}\right) = P(A)$، وينتج عن ذلك أن:

$$p(A\cap B)= p(A) \times P\left({B}/{A}\right) = p(A) \times p(B)$$

$$p(B\cap A)= p(B) \times P\left({A}/{B}\right) = p(B) \times p(A)$$

$$P(A\cup B)= p(A) + p(B) - p(A)\times p(B)$$

14- إذا كان لدينا ثلاثة حوادث مستقلة A، B، C، فإن: $p(A\cap B\cap C)= p(A)\times p(B)\times p(C)$

15- نرمز للحادث المتمّم (المكمّل/المعاكس) للحادث A، بـ $p(\bar{A})$، حيث: $p(\bar{A})= 1 - p(A)$

$$P(\bar{\bar{A}})= p(A)$$

16- إذا كان لدينا حدثين A، B، فإن:

$$p(\overline{A\cap B})= p(\bar{A}\cup\bar{B})$$

$$P(\overline{A\cup B})= p(\bar{A}\cap\bar{B})$$

$$P(\overline{\bar{A}\cap\bar{B}})= p(A\cup B)$$

$$P(A\cap\bar{A})= \emptyset$$

$$P(\overline{\bar{A}\cup\bar{B}})= p(A\cap B)$$

17- إذا كان A، B، حدثين متنافيين، فهذا لا يعني أن $\bar{A}$، $\bar{B}$، متنافيين أيضا.

18- إذا كان A، B، حدثين متنافيين، فهذا يعني أنهما غير مستقلين، وهذا لأن:

$$p(A\cap B)= 0 \Rightarrow p(A) \times P\left({B}/{A}\right) = 0 \Rightarrow P\left({B}/{A}\right) = 0$$

أي أنه بعد وقوع الحدث A، فإن ذلك يؤثر على احتمال وقوع الحدث B مستقبلا، حيث يتغير احتمال وقوع الحدث B ويصبح صفر؛ أي أن وقوع الحدث A يؤثر على احتمال وقوع الحدث B مستقبلا، والعكس صحيح، وبالتالي يكون الحدثين A وB غير مستقلين (مرتبطين)، حيث يكون:

$p(A\cap B)\neq p(A) \times p(B)$، بل أن: $p(A\cap B)= 0$

19- إذا كان (A، B) حدثين مستقلين، فإنه يكون أيضا: ($\overline{A}$، $\overline{B}$) مستقلين، ($\overline{A}$، B) مستقلين، (A، $\overline{B}$) مستقلين.

20- الحوادث A، B، C، مستقلة بصفة مجتمعة معناه:

$$\begin{cases} p(A\cap B)= p(A)\times p(B) \\ \text{و} \\ p(A\cap C)= p(A)\times p(C) \\ \text{و} \\ p(B\cap C)= p(B)\times p(C) \\ \text{و} \\ p(A\cap B\cap C)= p(A)\times p(B)\times p(C) \end{cases}$$

21- الحوادث A، B، C، مستقلة مثنى مثنى، معناه:

$$\begin{cases} p(A\cap B)= p(A)\times p(B) \\ \text{و} \\ p(A\cap C)= p(A)\times p(C) \\ \text{و} \\ p(B\cap C)= p(B)\times p(C) \end{cases}$$

22- إذا كانت الحوادث A، B، C،...الخ، مستقلة بصفة مجتمعة، فهذا يعني أنها مستقلة مثنى مثنى، والعكس غير صحيح؛ أي إذا كانت هذه الحوادث مستقلة مثنى مثنى، فهذا لا يعني أنها مستقلة بصفة مجتمعة.

23- إذا كان الحدثان A، B، مستقلين، والحدثان A، C، مستقلين أيضا، وكان الحدثان B، C، متنافيان، فإن الحدثان A، ($B\cup C$)، مستقلين أيضا، ويمكن التعبير عن ذلك كالآتي:

$$\begin{cases} p(A\cap B)= p(A)\times p(B) \\ \text{و} \\ p(A\cap C)= p(A)\times p(C) \\ \text{و} \\ p(B\cap C)= 0 \end{cases} \Rightarrow P[A\cap(B\cup C)] = p(A)\times p(B\cup C)$$

2. تمارين محلولة:

تمرين 1/

صندوق يحتوي على 5 كرات بيضاء (b)، 3 كرات سوداء(n) ، 2حمراء (r).

أ/ نقوم بسحب 3 كرات في آن واحد، فما احتمال:

1- أن يكونوا من نفس اللون؟

2- أن يكونوا من ألوان مختلفة؟

3- أن لا يتضمنوا أي كرة سوداء؟

4- أن يتضمنوا على الأقل كرة بيضاء؟

5- أن يتضمنوا كرتين بيضاوتين على الأكثر؟

6- أن يتضمنوا كرتين حمراوتين على الأكثر؟

ب/ نقوم بسحب 3 كرات على التوالي ومع الإرجاع، فما احتمال:

1- أن يكونوا من نفس اللون؟

2- أن يتضمنوا كرة سوداء على الأقل؟

الحل:

أ/ نلاحظ أن الترتيب غير مهم والتكرار غير مسموح به، لأن السحب في آن واحد، وبالتالي فإن الأسئلة ضمن هذا الفرع تتبع قانون التوفيقات بدون تكرار C_n^r.

أ-1/ نرمز لحدث سحب 3كرات (في آن واحد) من نفس اللون بالرمز A1، ومعناه سحب 3كرات بيضاء أو 3كرات سوداء، أي: $p(A1) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{10+1}{120} = 0,092$

أ-2/ نرمز بـ A2 لحدث سحب 3 كرات (في آن واحد) من ألوان مختلفة، معناه: سحب كرة بيضاء، وأخرى سوداء، وأخرى حمراء، أي: $p(A2) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{5\times3\times2}{120} = 0,25$

أ-3/ نرمز بـ A3 لحدث سحب 3كرات لا يتضمنوا أي كرة سوداء، أي:

$$p(A3) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120} = 0,292$$

أ-4/ نرمز بـ A4 لحدث سحب 3كرات (في آن واحد) يتضمنوا على الأقل كرة بيضاء، أي:

$$p(A4) = \frac{(C_5^1 \times C_5^2) + (C_5^2 \times C_5^1) + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{110}{120} = 0,917$$

ويمكن حل هذا السؤال **بطريقة أخرى،** وذلك بالتعبير عن الاحتمالات المعنية (الموافقة، الملائمة) بصيغة أخرى، وهي أن كل الاحتمالات مقبولة ومعنية باستثناء الاحتمالات التي تتضمن 3 كرات جميعها غير بيضاء (سوداء أو حمراء)، والتي مجموعها 5 كرات، ويمكن ترجمة ذلك إحصائيا كالآتي:

$$p(A4) = 1 - \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{10}{120} = \frac{110}{120} = 0,917$$

أ-5/ نرمز بـ A5 لحدث سحب 3كرات (في آن واحد) يتضمنوا كرتين بيضاوتين على الأكثر، ويمكن التعبير عن ذلك كالآتي: أن لا يتضمنوا أي كرة بيضاء أو يتضمنوا كرة بيضاء واحدة أو يتضمنوا كرتين بيضاوتين.

أو بتعبير آخر: أن يتضمنوا كل الحالات باستثناء أن يتضمنوا 3كرات بيضاء.

ومنه الاحتمال هو: $p(A5) = \frac{(C_5^3)+(C_5^1 \times C_5^2)+(C_5^2 \times C_5^1)}{C_{10}^3} = \frac{110}{120} = 0,917$

أو بطريقة أخرى: $p(A5) = 1 - \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{10}{120} = 0,917$

أ-6/ نرمز بـ A6 لحدث سحب 3كرات (في آن واحد) يتضمنوا كرتين حمراوتين على الأكثر، ونلاحظ أنه مستحيل أن يتضمن الكرات الثلاث أكثر من كرتين حمراوتين، لأن الصندوق يتضمن كرتين حمراوتين فقط، وبالتالي يكون الاحتمال هو 1، ويمكن التأكد من ذلك كالآتي:

$$P(A6) = \frac{(C_8^3) + (C_2^1 \times C_8^2) + (C_2^2 \times C_8^1)}{c_{10}^3} = \frac{56+56+8}{120} = \frac{120}{120} = 1$$

أو بطريقة أخرى: $P(A6) = 1 - \frac{C_2^3}{C_{10}^3} = 1 - (0) = 1$

ب/ نلاحظ أن الترتيب مهم* لأن السحب على التوالي، والتكرار مسموح به لأن السحب مع الارجاع**، وبالتالي في الأسئلة ضمن هذا الفرع نستخدم الترتيبات مع التكرار $\widetilde{A_n^r}$.

ب-1/ نرمز بـ B1 لحدث سحب 3 كرات من نفس اللون (على التوالي ومع الارجاع)، ومنه الاحتمال هو:

$$p(B1) = \frac{\widetilde{A_5^3} + \widetilde{A_3^3}}{\widetilde{A_{10}^3}} = \frac{5^3+3^3}{10^3} = \frac{152}{1000} = 0{,}152$$

ب-2/ نرمز بـ B2 لحدث سحب 3 كرات (على التوالي ومع الارجاع) يتضمنوا كرة سوداء على الأقل.

$$p(B2) = 1 - \frac{7^3}{10^3} = 1 - \frac{343}{1000} = 1 - 0{,}343 = 0{,}657$$

تمرين 2/

صندوق يحتوي على 8 كرات مرقمة من 0 إلى 7.

أ/ نفرض أننا سحبنا 3كرات على التوالي وبدون إرجاع، فما احتمال الحصول على:

1- عدد فردي؟

2- عدد يقبل القسمة على 5؟

3- عدد أكبر أو يساوي 400؟

4- عدد أكبر أو يساوي 200 وأصغر من 500؟

ب/ نفس الأسئلة في حالة السحب على التوالي ومع الإرجاع؟

* لمزيد من التوضيح، أنظر هامش الصفحة 17.

** في حالة السحب على التوالي ومع الارجاع، سنجد نفس النتيجة عند استخدام طريقة شجرة الاحتمال، حيث هذه الحالة تعتبر تجارب احتمالية مستقلة متكررة ذات احتمالات ثابتة، حيث تتضمن إعادة نفس التجربة 3 مرات، ونتائج كل مرة مستقلة عن المرات الأخرى، وبالتالي تبقى الاحتمالات هي نفسها في كل تجربة (أنظر الفصل الرابع).

الحل:

أ/ بما أن الكرات مرقمة وأيضا من صيغة الأسئلة نستنتج أن الترتيب مهم، وأما التكرار فهو غير مسموح به.

أ-1/ نرمز بـ A1 لحدث عدد فردي، إذن: $P(A1)=\frac{4\times A_7^2}{A_8^3}=\frac{168}{336}=0,5$

أ-2/ نرمز بـ A2 لحدث عدد يقبل القسمة على 5، إذن: $p(A2)=\frac{2\times A_7^2}{A_8^3}=\frac{84}{336}=0,25$

أ-3/ نرمز بـ A3 لحدث عدد أكبر أو يساوي 400، إذن: $p(A3)=\frac{4\times A_7^2}{A_8^3}=\frac{168}{336}=0,5$

نشير إلى أنه حتى يكون عدد مكون من 3 أرقام أكبر أو يساوي 400 في حالة التكرار غير مسموح به، فإنه ينبغي أن يكون رقم المئات أكبر أو يساوي 4؛ أي هناك 4 امكانيات لاختياره.

أ-4/ نرمز بـ A4 لحدث عدد أكبر أو يساوي 200 وأصغر من 500، إذن:

$$p(A4)=\frac{3\times A_7^2}{A_8^3}=\frac{126}{336}=0,375$$

ب/ نلاحظ أن الترتيب مهم، والتكرار مسموح به، أي نستخدم الترتيبات مع التكرار.

ب-1/ نرمز بـ B1 لحدث عدد فردي، إذن: $p(B1)=\frac{4\times 8^2}{8^3}=0,5$

ب-2/ نرمز بـ B2 لحدث عدد يقبل القسمة على 5، إذن: $p(B2)=\frac{2\times 8^2}{8^3}=0,25$

ب-3/ نرمز بـ B3 لحدث عدد أكبر أو يساوي 400، إذن: $p(B3)=\frac{4\times 8^2}{8^3}=0,5$

نشير إلى أن حتى يكون عدد مكون من 3 أرقام أكبر أو يساوي 400 في حالة التكرار مسموح به، فإنه ينبغي أن يكون رقم المئات أكبر أو يساوي 4 (مثل حالة التكرار غير مسموح به)؛ أي هناك 4 امكانيات لاختياره.

ب-4/ نرمز بـ B4 لحدث عدد أكبر أو يساوي 200 وأصغر من 500، حيث أن هناك 3 امكانيات لاختيار رقم المئات {2، 3، 4}، إذن: $p(B4)=\frac{3\times 8^2}{8^3}=0,375$

وفي الأخير نلاحظ أنه تم التوصل إلى نفس النتائج، سواء تم استخدام الترتيبات بدون تكرار، أو مع تكرار، وتعتبر هذه حالة خاصة فقط، حيث يمكن تعميم هذه الحالة، والقول أنه في الحالة العامة يكون: $\frac{A_{n-1}^{\propto-1}}{A_n^{\alpha}}=\frac{n^{\propto-1}}{n^{\alpha}}$، ويمكن البرهان على ذلك كالآتي:

$$\frac{A_{n-1}^{\propto-1}}{A_n^{\alpha}}=\frac{n^{\propto-1}}{n^{\alpha}} \Rightarrow \frac{\frac{(n-1)!}{(n-\propto)!}}{\frac{n!}{(n-\alpha)!}}=\frac{n^{\propto-1}}{n\times n^{\alpha-1}} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n)!}=\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

تمرين3:

نقوم برمي زهرتي نرد*، فما احتمال:

1/ أن يظهر الرقم 2؟

2/ أن يظهر رقمين مجموعهما 3؟

3/ أن لا يظهر الرقم 5؟

الحل:

نلاحظ أن المجموعة الأصلية تتكون من العناصر {1، 2، 3، 4، 5، 6}، أما المجموعة الجزئية فتتكون الأعداد فيها من رقمين، بحيث أن الترتيب مهم، لأنه في حالة ظهور رقمين مختلفين، تتضمن حالتين، فيمكن أن يكون رقم معين ظهر في زهرة نرد معين، والرقم الآخر ظهر في زهرة النرد الأخرى، أو العكس، والتكرار مسموح به لأنه يمكن أن يظهر نفس الرقم في زهرتي النرد، وبالتالي نستخدم قانون الترتيبات مع التكرار، وعدد الحالات الكلية هو:

$$\widetilde{A_6^2}=6^2=36$$

ويمكن حساب وإحصاء الحالات الكلية، أو الحالات الملائمة لكل سؤال بالحالة، حيث الحالات الكلية تتمثل في الآتي:

* نشير إلى أنه حتى وإن لم يتم ذكر أن زهرتي النرد متمايزتين (أي أن الشخص الرامي لا يمكن التمييز بينهما)، فإنه لا يهم ذلك، لأنه الذي يهمنا هو احصاء الحالات الممكنة حتى وإن لم يلاحظها الشخص الرامي، فمثلا في حالة ظهور الرقمين 1، 2، فالشخص الرامي يعتبرهما حالة واحدة ولا يفرق بين أي من الزهرتين ظهر فيها الرقم 1 أو 2، لكن الحالات الممكنة هنا هي حالتين (1،2)، (2،1).

{(1،1)، (1، 2)، (1، 3)، (1، 4)، (1، 5)، (1، 6)
(2، 1)، (2، 2)، (2، 3)، (2، 4)، (2، 5)، (2، 6)
(3، 1)، (3، 2) (3، 3)، (3، 4)، (3، 5)، (3، 6)
(4، 1)، (4، 2)، (4، 3) (4، 4)، (4، 5)، (4، 6)
(5، 1)، (5، 2) (5، 3)، (5، 4)، (5، 5)، (5، 6)
(6، 1)، (6، 2) (6، 3)، (6، 4)، (6، 5)، (6، 6)}

1/ نرمز بـ A لحدث ظهور الرقم 2، ومن الحالات الكلية نلاحظ أن هناك 11 حالة يظهر فيها الرقم 2 إذن:

$$P(A) = \frac{11}{36} \approx 0,305$$

2/ نرمز بـ B لحدث ظهور رقمين مجموعهما 3، ونلاحظ من الحالات الكلية أن هناك حالتان توافقان هذا الحدث وهي (1، 2)، (2، 1)، إذن: $P(B) = \frac{2}{36} \approx 0,055$

3/ نرمز بـ C لحدث عدم ظهور الرقم 5، ومن الحالات الكلية نلاحظ أن هناك 25 حالة توافق هذا الحدث، إذن: $P(C) = \frac{25}{36} \approx 0,694$

تمرين 4/

نقوم برمي زهرة نرد 3مرات متتالية، فما احتمال:

1/ أن يظهر عدد فردي؟

2/ أن يظهر عدد أرقامه متمايزة؟

3/ أن يظهر عدد يتضمن أرقام متشابهة؟

4/ أن يظهر عدد أصغر من 300؟

الحل:

بما أن هناك رميات يمكن التمييز بين نتائجها، وكذلك من صيغة الأسئلة يهمنا معرفة أعداد معينة، ومعروف أن تغيير ترتيب رقمين يعطينا عدد آخر، فيمكن استنتاج أن الترتيب مهم، وكذلك التكرار مسموح به، لأنه يمكن

أن يظهر نفس الرقم في أكثر من رمية، إذن نستخدم الترتيبات مع التكرار، ويكون عدد الحالات الكلية هو:

$$6^3 = 216$$

1/ نرمز بـ A لحدث ظهور عدد فردي، إذن: $p(A)=\frac{3\times 6^2}{6^3} = \mathbf{0{,}5}$

2/ نرمز بـ B لحدث ظهور عدد يتضمن أرقام متمايزة، إذن: $p(B)= \frac{A_6^3}{6^3} = \frac{\frac{6!}{(6-3)!}}{216} = \frac{120}{216} = \mathbf{0{,}555}$

3/ نرمز بـ C لحدث ظهور عدد يتضمن أرقام متشابهة، نلاحظ أن الحدث C مكمل للحدث B، إذن:

$$p(C)= 1-p(B)=1- 0{,}555=0{,}445$$

4/ نرمز بـ D لحدث ظهور عدد أصغر من 300، إذن: $p(D)=\frac{2\times 6^2}{6^3} = \mathbf{0{,}333}$

تمرين5/

قسم يحتوي على 15 طالب، منهم8 ذكور، 7 إناث.

أ/ نقوم باختيار مجموعة مكونة من 3 أشخاص لتمثيل القسم، فما احتمال أن:

1/ تتضمن ذكرين وأنثى؟

2/ لا يوجد الطالب **سعيد** في المجموعة؟

3/ يوجد الطالب **صالح** في المجموعة؟

4/ تتضمن على الأقل طالب ذكر؟

ب/ نفس الأسئلة السابقة، عندما نقوم باختيار مجموعة 3 أشخاص لتمثيل القسم، حيث تتضمن رئيس، نائب أول، نائب ثاني.

الحل:

أ/ نلاحظ أن الترتيب غير مهم، والتكرار غير مسموح به، إذن نستخدم التوفيقات بدون تكرار.

أ-1/ نرمز بـ A1 لحدث المجموعة تتضمن ذكرين وأنثى، إذن:

$$p(A1)=\frac{C_8^2\times C_7^1}{C_{15}^3}=\frac{\frac{8!}{2!\times(8-2)!}\times 7}{\frac{15!}{3!(15-3)!}}=\frac{196}{455}=0{,}431$$

أ-2/ نرمز بـ A2 لحدث لا يوجد الطالب سعيد في المجموعة، إذن: $p(A2)=\frac{C_{14}^3}{C_{15}^3}=\frac{364}{455}=0{,}8$

أ-3/ نرمز بـ A3 لحدث يوجد الطالب صالح في المجموعة، إذن: $p(A3)=\frac{1\times C_{14}^2}{c_{15}^3}=\frac{91}{455}=0{,}2$

أ-4/ نرمز بـ A4 لحدث تتضمن المجموعة على الأقل طالب ذكر، إذن:

$$p(A4)=\frac{(C_8^1\times C_7^2)+(C_8^2\times C_7^1)+C_8^3}{C_{15}^3}=\frac{168+196+56}{455}=\frac{420}{455}=0{,}923$$

أو بطريقة أخرى، فالاحتمال المطلوب هو كل الاحتمالات باستثناء احتمال ظهور 3 إناث، إذن:

$$P(A3)=1-\frac{C_7^3}{C_{15}^3}=1-\frac{35}{455}=\frac{420}{455}=0{,}923$$

ب/ نلاحظ أن الترتيب مهم لأن هناك تمايز ورتب مختلفة للأشخاص في المجموعة الجزئية، وأما التكرار فهو غير مسموح به، إذن نستخدم الترتيبات بدون تكرار.

ب-1/ نرمز بـ B1 لحدث المجموعة تتضمن ذكرين وأنثى، حيث أن عدد امكانيات اختيار ذكرين هو A_8^2، وعدد امكانيات اختيار أنثى هو 7، لأن المجموعة الأصلية فيها 7 إناث، وبالتالي عدد امكانيات اختيار ذكرين وأنثى هو $(A_8^2\times 7)$، وبما أن الترتيب مهم فينبغي اخذ في الاعتبار امكانيات ظهور الأنثى، هل كرئيس أو نائب أول أو نائب ثاني، أي هناك 3 حالات، ويمكن حساب ذلك كالآتي: $C_3^1=3$، وبالتالي يصبح عدد امكانيات اختيار ذكرين وأنثى هو $(A_8^2\times 7)\times 3$، إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$p(B1)=\frac{(A_8^2\times 7)\times 3}{A_{15}^3}=\frac{\frac{8!}{(8-2)!}\times 21}{\frac{15!}{(15-3)!}}=\frac{1176}{2730}=0{,}431$$

ب-2/ نرمز بـ B2 لحدث لا يوجد الطالب سعيد في المجموعة، إذن: $p(B2)=\frac{A_{14}^3}{A_{15}^3}=\frac{2184}{2730}=0{,}8$

ب-3/ نرمز بـ B3 لحدث يوجد الطالب صالح في المجموعة، إذن:

$$p(B3)=\frac{(1\times A_{14}^{2})\times 3}{A_{15}^{3}}=\frac{546}{2730}=0,2$$

ب-4/ نرمز بـ B4 لحدث تتضمن المجموعة على الأقل طالب ذكر، إذن:

$$p(B4)=\frac{3\times\left(A_8^1\times A_7^2\right)+3\times\left(A_8^2\times A_7^1\right)+A_8^3}{A_{15}^{3}}=\frac{1008+1176+336}{2730}=\frac{2520}{2730}=0,923$$

في الأخير نلاحظ أن نتائج الأسئلة ضمن هذا الفرع هي نفسها نتائج السؤال السابق، وذلك ناتج بالأساس على أنه في الحالة العامة يكون: $\boldsymbol{\frac{C_n^r}{C_m^r}}=\boldsymbol{\frac{A_n^r}{A_m^r}}\Rightarrow\frac{\frac{n!}{r!\times(n-r)!}}{\frac{m!}{r!\times(m-r)!}}=\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{m!}{(m-r)!}}\Rightarrow 1=1$

تمرين 6/

مؤسسة إنتاجية تنتج وحدتين انتاجيتين A1، A2، حيث يمثل المنتج A1 60% من إجمالي الإنتاج، وتتم عملية الإنتاج من خلال 3 فروع تملكها المؤسسة، حيث الفرع B1 ينتج 50%، الفرع B2 ينتج 35%، نقوم باختيار وحدة انتاجية من انتاج هذه المؤسسة بصفة عشوائية، فما احتمال الحصول على:

1/ وحدة انتاجية A1 وتتبع الفرع B2؟

2/ وحدة انتاجية A1 وتتبع الفرع B1 أو B3؟

الحل:

1/ الاحتمال المطلوب هو: $p(A1\cap B2)=p(A1)\times p(B2)=0,60\times 0,35=0,21$

2/ الاحتمال المطلوب هو $p[A1\cap(B1\cup B3)]$، ويمكن حسابه بطريقتين:

طريقة 1: $p[A1\cap(B1\cup B3)]=p(A1)\times p(B1\cup B3)$

$$=p(A1)\times[p(B1)+p(B3)]$$

$$=0,60\times(0,50+0,15)$$

$$=0,60\times 0,65$$

$$=0,39$$

طريقة 2:

$$p[A1\cap(B1\cup B3)] = p[(A1\cap B1)\cup(A1\cap B3)]$$

$$= p(A1\cap B1) + p(A1\cap B3)$$

$$= p(A1)\times p(B1) + p(A1)\times p(B3)$$

$$= 0{,}60\times 0{,}50 + 0{,}60\times \mathbf{p(B3)}$$

بما أن الحوادث B1، B2، B3، هي متكاملة، إذن: $p(B1)+p(B2)+p(B3)=1$

$$\Rightarrow p(B3)= 1- p(B1) - p(B2)$$

$$\Rightarrow p(B3)=1 - 0{,}50 - 0{,}3$$

$$\Rightarrow \mathbf{p(B3)}= 0{,}15$$

ومنه: $p[A1\cap(B1\cup B3)]= 0{,}60\times 0{,}50 + 0{,}60\times 0{,}15$

$$= 0{,}39$$

تمرين 7/

لدينا الحوادث المستقلة: A، B، C، D، حيث $p(A)= 0{,}60$، $P(B)= 0{,}70$، $p(C)= 0{,}20$، $p(D)= 0{,}40$، أحسب الاحتمالات الآتية:

1/ $p(A\cap B)$، $p(A\cap C)$، $p(B\cap C)$، $p(A\cap B\cap C)$؟

2/ $p(A\cup B)$، $p(A\cup C)$، $p(B\cup C)$، $p(A\cup B\cup C)$؟

3/ $p(\bar{A}\cap B)$، $p(\bar{B}\cap\bar{C})$، $p(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$؟

4/ $p(\overline{A\cap B})$، $p(\overline{A\cap B\cap C})$، $p(\overline{A\cap\bar{B}})$، $p(\overline{A\cap\bar{B}\cap C})$؟

5/ $p(\bar{A}\cup B)$، $p(\bar{B}\cup\overline{C})$، $p(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})$؟

6/ $p(\overline{\bar{A}\cup\bar{B}})$، $p(\overline{\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}})$، $p(\overline{\bar{B}\cup\bar{C}})$، $p(\overline{\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}})$؟

7/ $p[A\cap(B\cup C)]$، $p[A\cup(B\cap C)]$؟

8/ $p(A\cup B\cup C\cup D)$؟

الحل:

1/ $p(A\cap B) = p(A) \times p(B) = 0,60 \times 0,70 = 0,42$

$p(A\cap C) = p(A) \times p(C) = 0,60 \times 0,20 = 0,12$

$p(B\cap C) = p(B) \times p(C) = 0,70 \times 0,20 = 0,14$

$p(A\cap B\cap C) = p(A) \times p(B) \times p(C) = 0,60 \times 0,70 \times 0,20 = 0,084$

2/ $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0,60 + 0,70 - 0,42 = 0,88$

$p(A\cup C) = p(A) + p(C) - p(A\cap C) = 0,60 + 0,20 - 0,12 = 0,68$

$p(B\cup C) = p(B) + p(C) - p(B\cap C) = 0,70 + 0,20 - 0,14 = 0,76$

$$p(A\cup B\cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A\cap B) - p(A\cap C) - p(B\cap C) + p(A\cap B\cap C)$$

$$= 0,60 + 0,70 + 0,20 - 0,42 - 0,12 - 0,14 + 0,084$$

$$= 0,904$$

3/ $p(\bar{A}\cap B) = p(\bar{A}) \times p(B) = [1 - p(\bar{A})] \times p(B) = (1 - 0,60) \times 0,70 = 0,28$

$p(\bar{B}\cap\bar{C}) = p(\bar{B}) \times p(\bar{C}) = [1 - p(\bar{B})] \times [1 - p(\bar{C})] = (1 - 0,70) \times (1- 0,20)$
$= 0,24$

$$p(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) = [1-p(\bar{A})]\times[1-p(\bar{B})]\times[1-p(\bar{C})]$$

$$=(1-0{,}60)\times(1-0{,}70)\times(1-0{,}20) = 0{,}096$$

$$p(\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}) = p(\bar{A}\cup\bar{B}) = p(\bar{A}) + p(\bar{B}) - p(\bar{A}\cap\bar{B})$$ /4

$$= p(\bar{A}) + p(\bar{B}) - p(\bar{A})\times p(\bar{B})$$

$$= (1-0{,}60)+(1-0{,}70)-(1-0{,}60)\times(1-0{,}70)$$

$$= 0{,}40 + 0{,}30 + 0{,}40\times0{,}30$$

$$= 0{,}58$$

$$p(\overline{\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}}) = p(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})$$

$$= p(\bar{A}) + p(\bar{B}) + p(\bar{C}) - p(\bar{A}\cap\bar{B}) - p(\bar{A}\cap\bar{C}) - p(\bar{B}\cap\bar{C}) + p(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$$

$$= 0{,}40+0{,}30+0{,}80-0{,}40\times0{,}30-0{,}40\times0{,}80-0{,}30\times0{,}80+0{,}40\times0{,}30\times0{,}80$$

$$= 1{,}5 - 0{,}12 - 0{,}32 - 0{,}24 + 0{,}096 = 0{,}916$$

$$p(\overline{\bar{A}\cap\bar{\bar{B}}}) = p(\bar{A}\cup\bar{\bar{B}}) = p(\bar{A}\cup B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(\bar{A}\cap B)$$

$$= 0{,}40 + 0{,}70 - 0{,}40\times0{,}70 = 0{,}82$$

$$p(\overline{\bar{A}\cap\bar{\bar{B}}\cap\bar{C}}) = p(\bar{A}\cup\bar{\bar{B}}\cup\bar{C}) = p(\bar{A}\cup B\cup\bar{C})$$

$$= p(\bar{A}) + p(B) + p(\bar{C}) - p(\bar{A}\cap B) - p(\bar{A}\cap\bar{C}) - p(B\cap\bar{C}) + p(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})$$

$$= 0{,}40+0{,}70+0{,}80-0{,}40\times0{,}70-0{,}40\times0{,}80-0{,}70\times0{,}80+0{,}40\times0{,}70\times0{,}80$$

$$= 1{,}9 - 0{,}28 - 0{,}32 - 0{,}56 + 0{,}224 = 0{,}964$$

$$p(\bar{A}\cup B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(\bar{A}\cap B) = 0{,}40+0{,}70-0{,}40\times0{,}70 = 0{,}82$$ /5

$p(\bar{B} \cup \bar{C}) = p(\bar{B}) + p(\bar{C}) - p(\bar{B} \cap \bar{C}) = 0{,}30 + 0{,}80 - 0{,}30 \times 0{,}80 = 0{,}86$

$p(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = p(\bar{A}) + p(\bar{B}) + p(\bar{C}) - p(\bar{A} \cap \bar{B}) - p(\bar{A} \cap \bar{C}) - p(\bar{B} \cap \bar{C})$

$+ p(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$

$= 0{,}40 + 0{,}30 + 0{,}80 - 0{,}40 \times 0{,}30 - 0{,}40 \times 0{,}80 - 0{,}30 \times 0{,}80 + 0{,}40 \times 0{,}30 \times 0{,}80$

$= 1{,}5 - 0{,}12 - 0{,}32 - 0{,}24 + 0{,}096 = 0{,}916$

$p(\overline{A \cup B}) = p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B}) = 0{,}40 \times 0{,}30 = 0{,}12$ /6

$p(\overline{A \cup B \cup C}) = p(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0{,}40 \times 0{,}30 \times 0{,}80 = 0{,}096$

$p(\overline{B \cup \bar{C}}) = p(\bar{B} \cap \bar{\bar{C}}) = p(\bar{B} \cap C) = p(\bar{B}) \times p(C) = 0{,}30 \times 0{,}20 = 0{,}06$

$p(\overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup C}) = p(\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} \cap \bar{C}) = p(A) \times p(B) \times p(\bar{C}) = 0{,}60 \times 0{,}70 \times 0{,}80 = 0{,}336$

$p[A \cap (B \cup C)] = p(A) \times p(B \cup C) = p(A) \times [\,p(B) + p(C) - p(B) \times p(C)]$ /7

$= 0{,}60 \times (0{,}70 + 0{,}20 - 0{,}70 \times 0{,}20) = 0{,}60 \times (0{,}90 - 0{,}14) = 0{,}456$

$p[A \cup (B \cap C)] = P(A) + p(B \cap C) - p[(A \cap (B \cap C)]$

$= p(A) + p(B \cap C) - p(A \cap B \cap C)$

$= 0{,}60 + 0{,}70 \times 0{,}20 - 0{,}60 \times 0{,}70 \times 0{,}20$

$= 0{,}60 + 0{,}14 - 0{,}084 = 0{,}656$

$p(A \cup B \cup C \cup D) = p[(A \cup B \cup C) \cup D]$ /8

$= p(A \cup B \cup C) + p(D) - p[(A \cup B \cup C) \cap D]$

$= p(A \cup B \cup C) + p(D) - p(A \cup B \cup C) \times p(D)$

$= 0{,}904 + 0{,}4 - 0{,}904 \times 0{,}40$

$= 1{,}304 - 0{,}3616 = 0{,}9424$

تمرين 8/

لدينا الحوادث المتنافية: A، B، C، حيث $p(A)= 0,40$، $P(B)= 0,25$، $p(C)= 0,15$، أحسب الاحتمالات الآتية:

1/ $p(A\cup B)$، $p(A\cup C)$، $p(B\cup C)$، $p(A\cup B\cup C)$؟

2/ $p[A\cap(B\cup C)]$، $p[A\cup(B\cap C)]$؟

الحل:

1/

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) = 0,40 + 0,25 = 0,65$$

$$p(A\cup C) = p(A) + p(C) = 0,40 + 0,15 = 0,55$$

$$p(B\cup C) = p(B) + p(C) = 0,25 + 0,15 = 0,40$$

$$p(A\cup B\cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = 0,40 + 0,25 + 0,15 = 0,80$$

2/

$$p[A\cap(B\cup C)] = p(A) + p(B\cup C) - p[A\cup(B\cup C)]$$

$$= p(A) + p(B\cup C) - p(A\cup B\cup C)$$

$$= p(A) + p(B) + p(C) - p(A) - p(B) - p(C) = 0$$

$$p[A\cup(B\cap C)] = p(A) + p(B\cap C) = p(A) = 0,40$$

تمرين 9/

شخص يقوم بإطلاق ثلاث رميات متتالية على هدف معين، حيث احتمال أن يصيب في الرمية الأولى هو (0,40)، واحتمال أن يصيب في الرمية الثانية هو (0,70)، واحتمال أن يصيب في الرمية الثالثة هو (0,75)، بافتراض هذه الرميات، هي عبارة عن تجارب احتمالية مستقلة، فما احتمال:

1/ أن يصيب في الرمية الأولى ولا يصيب في الرمية الثانية؟

2/ أن يصيب في الرمية الأولى والثانية ولا يصيب في الثالثة؟

الحل:

نرمز بـ A لحدث الإصابة في الرمية الأولى، B الإصابة في الرمية الثانية، C الإصابة في الرمية الثالثة.

1/ احتمال أن يصيب في الرمية الأولى ولا يصيب في الرمية الثانية معناه:

$$p(A) \times p(\bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B}) = 0{,}40 \times 0{,}30 = 0{,}12$$

2/ الاحتمال المطلوب هو:

$$P(A \cap B \cap \bar{C}) = p(A) \times p(B) \times p(\bar{C}) = 0{,}40 \times 0{,}70 \times 0{,}25 = 0{,}07$$

تمرين 10/

شخص يقوم بإطلاق رمية واحدة على 3 أهداف A، B، C، حيث احتمالات اصابة هذه الأهداف هي: $p(A)=0{,}40$، $p(B)= 0{,}20$، $p(C)=0{,}25$، فما احتمال:

1/ أن يصيب هدف معين؟

2/ أن لا يصيب أي هدف؟

الحل:

1/ $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = 0{,}40 + 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}85$

2/ $p[\Omega - (A \cup B \cup C)] = p(\Omega) - p(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

تمرين 11/

احتمال أن ينجح طالب جامعي في امتحان مادة المحاسبة (C) هو $(0{,}60)$، وفي مادة الإحصاء(S) $(0{,}30)$، وفي مادة الرياضيات (M) $(0{,}35)$، بافتراض أن نجاحه في مادة معينة لا يؤثر على احتمال نجاحه في مادة أخرى، فما احتمال:

1/ أن ينجح في جميع المواد؟

2/ أن ينجح في المحاسبة أو الإحصاء أو الرياضيات؟

3/ أن ينجح في مادة واحدة فقط؟

4/ أن ينجح في مادة واحدة على الأقل؟

الحل:

1/ احتمال أن ينجح في جميع المواد:

$$p(C \cap S \cap M) = p(C) \times p(S) \times p(M) = 0,60 \times 0,30 \times 0,35 = 0,063$$

2/ احتمال أن ينجح في المحاسبة أو الإحصاء أو الرياضيات:

$$p(C \cup S \cup M) = p(C) + p(S) + p(M) - p(C \cap S) - p(C \cap M) - p(S \cap M) + p(C \cap S \cap M)$$

$$= 0,60+0,30 + 0,35 - (0,60\times 0,30) - (0,60\times 0,35) - (0,30\times 0,35) +(0,60\times 0,30\times 0,35)$$

$$= 1,25 - 0,18 -0,21-0,105 +0,063 = 0,818$$

3/ احتمال أن ينجح في مادة واحدة فقط:

$$P[(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) \cup (\bar{A}\cap B\cap\bar{C}) \cup (\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)]$$

$$= (0,60\times 0,70 \times 0,65) + (0,40+0,30 + 0,65) + (0,40+0,70 + 0,35)$$

$$= 0,273 + 0,078 + 0,098 = 0,449$$

4/ احتمال أن ينجح في مادة واحدة على الأقل:

$$P[(\Omega - (\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})] = p(\Omega) - p(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$$

$$=1 - (0,60\times 0,30\times 0,35) = 1 - 0,063 = 0,937$$

الفصل الثالث:
الاحتمالات الشرطية

1- ملخص:

- مفهوم الاحتمالات الشرطية.
- خواص الاحتمالات الشرطية.

2- تمارين محلولة.

1. ملخص:

- **مفهوم الاحتمالات الشرطية:**

وتسمى أيضا الاحتمالات التي تتعلق بالحوادث الغير مستقلة (المترابطة)، حيث أنه إذا كان عندنا حدثين غير مستقلين A، B، وإذا علمنا بأن الحادث B قد وقع وتحقق، ونريد حساب احتمال أن يقع الحادث A، فإن صياغة هذا الاحتمال تكتب كالآتي: $p({A}/{B})$، حيث يحسب كالآتي:

$$p({A}/{B}) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

وأما إذا كان الحدث A هو الذي وقع، ونريد حساب احتمال وقوع الحادث B، فإن صياغة هذا الاحتمال تكتب كالآتي: $p({B}/{A})$ ، حيث يحسب كالآتي: $p({B}/{A}) = \frac{p(B\cap A)}{p(A)}$

- **خواص الاحتمالات الشرطية:**

ويمكن ذكر بعض الخواص المرتبطة بالاحتمالات الشرطية والحوادث المترابطة، كالآتي:

1- إذا كان A، B، حدثين غير مترابطين (مستقلين)، فإن: $p({A}/{B}) = p(A)$

2- إذا كان A، B، حدثين متنافيين، فهما بالضرورة مرتبطين، وهذا لأن: $p({A}/{B}) \neq p(A)$

$P({A}/{B}) = 0$

3- إذا كان A، B، حدثين مترابطين، فإن $\overline{A}$، $\overline{B}$، مترابطين أيضا.

4- $P(A\cap B)= p(A)\times p({B}/{A})$

5- $P(B\cap A)= p(B)\times p({A}/{B})$

6- $P(A\cap B)= p(B\cap A) \Rightarrow p(A)\times p({B}/{A}) = p(B)\times p({A}/{B})$

7- $P(A\cap B\cap C) = p(A) \times p({B}/{A}) \times p\left[{C}/{(A\cap B)}\right]$

8- $p\left[A/_{(A\cap B)}\right] = 1$

9- إذا كان لدينا حدثين متنافيين A، B، فإن:

$$p\left[{(A\cup B)}/_{C}\right] = p\left(A/_{C}\right) + p\left(B/_{C}\right)$$

10- إذا كان لدينا ثلاثة حوادث A، B، C، فإن:

$$P\left[{(A\cup B)}/_{C}\right] = p\left(A/_{C}\right) + p\left(B/_{C}\right) - p\left[{(A\cap B)}/_{C}\right]$$

2 تمـــارين محــلولة

تمرين 1/

ليكن لدينا الحدثين A، B، حيث: $p(A)=0,45$، $p(B)=0,75$، $p(A\cup B)=0,80$، أحسب الاحتمالات الآتية:

1/ $p(A\cap B)$؟

2/ $p(A/B)$؟

3/ $p(B/A)$؟

4/ $p\left((A\cap B)/B\right)$؟

5/ $p\left(B/A\cap B\right)$؟

الحل:

1/ $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

$\Rightarrow p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B)$

$= 0,45 + 0,75 - 0,85 = 0,35$

2/ $p\left(A/B\right) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{0,35}{0,75} \approx 0,47$

3/ $p\left(B/A\right) = \frac{p(B\cap A)}{p(A)} = \frac{0,35}{0,45} \approx 0,78$

4/ $$p\left({(A\cap B)}/{B}\right)=\frac{p[(A\cap B)\cap B]}{p(B)}=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0,35}{0,75}=0,47$$

5/ $$p\left({B}/{A\cap B}\right)=\frac{P[B\cap(A\cap B)]}{p(A\cap B)}=\frac{p(A\cap B)}{p(A\cap B)}=1$$

تمرين2/

احتمال أن ينجح طالب معين في مادة الاحصاء (S) هو (0,45)، وفي مادة المحاسبة هو (0,75)، وأن ينجح في المادتين معا هو (0,25)، فما هو احتمال:

1/ أن ينجح في الإحصاء أو المحاسبة؟

2/ أن ينجح في المحاسبة علما أنه ناجح في الاحصاء؟

3/ أن ينجح في الاحصاء علما أنه ناجح في المحاسبة؟

4/ أن ينجح في الاحصاء علما أنه ناجح في الاحصاء أو المحاسبة؟

5/ أن ينجح في الإحصاء أو المحاسبة علما أنه ناجح في الإحصاء؟

الحل:

1/ $p(S\cup C)=p(S)+p(C)-p(S\cap C)=0,45+0,75-0,25=0,95$

2/ $$p\left({C}/{S}\right)=\frac{p(C\cap S)}{p(S)}=\frac{0,25}{0,45}\approx 0,55$$

3/ $$p\left({S}/{C}\right)=\frac{p(S\cap C)}{p(C)}=\frac{0,25}{0,75}\approx 0,33$$

4/ $$p\left({S}/{S\cup C}\right)=\frac{P[s\cap(s\cup c)]}{p(s\cup c)}=\frac{p(S)}{p(s\cup c)}=\frac{0,45}{0,95}\approx 0,47$$

5/ $$p\left({S\cup C}/{S}\right)=\frac{P[(s\cup c)\cap s]}{p(s)}=\frac{p(S)}{p(s)}=1$$

تمرين 3/

نسبة الذكور في منطقة سكانية معينة هو (55%)، و 75% من الذكور في هذه المنطقة مصابين بمرض (X)، و50% مصابين بمرض (Y)، و40% مصابين بالمرضين معا، و60% من الإناث مصابين بالمرض (X)، و45% مصابين بالمرض Y، و30% مصابين بالمرض معا، نقوم باختيار شخص عشوائيا من هذه المنطقة، فما احتمال أن يكون:

1/ ذكر ومصاب بالمرض (X)؟

2/ أنثى ومصابة بالمرض (X) و(Y)؟

3/ مصاب بالمرض X؟

4/ مصاب بالمرض Y؟

5/ مصاب بالمرض X وY؟

6/ مصاب؟

7/ غير مصاب (سليم)؟

8/ ذكر، إذا كان مصاب بالمرض (X)؟

9/ أنثى، إذا كانت غير مصابة بالمرض (Y)؟

10/ أنثى، إذا كانت غير مصابة بالمرض (X) أو غير مصابة بالمرض(Y)؟

11/ ذكر، إذا كان غير مصاب؟

الحل:

نرمز للذكور بـ G، وللإناث بـ F، وبالتالي معطيات التمرين تتمثل في:

$$P(G)=0{,}55 \qquad p(F)=0{,}45 \qquad p\left(X/_G\right)=0{,}75 \qquad p\left(\bar{X}/_G\right)=0{,}25$$

$p\left(Y/_{G}\right) = 0{,}50 \quad p\left(\bar{Y}/_{G}\right) = 0{,}50 \quad p\left(X/_{F}\right) = 0{,}60 \quad p\left(\bar{X}/_{F}\right) = 0{,}40$

$p\left(Y/_{F}\right) = 0{,}45 \qquad p\left(\bar{Y}/_{F}\right) = 0{,}65$

$p\left(X\cap Y/_{G}\right) = 0{,}40 \quad p\left(\overline{X\cap Y}/_{G}\right) = 0{,}60$

$p\left(X\cap Y/_{F}\right) = 0{,}30 \quad p\left(\overline{X\cap Y}/_{F}\right) = 0{,}70$

1/ $p(G\cap X) = p(G)\times p\left(X/_{G}\right) = 0{,}55\times 0{,}75 = 0{,}4125$

2/ $p[F\cap(X\cap Y)] = p(F)\times p\left(X\cap Y/_{F}\right) = 0{,}45\times 0{,}30 = 0{,}135$

3/ $p(X) = p[(G\cap X)\cup(F\cap X)] = p(G\cap X) + p(F\cap X)$

$= p(G)\times p\left(X/_{G}\right) + p(F)\times p\left(X/_{F}\right)$

$= 0{,}55\times 0{,}75 + 0{,}45\times 0{,}60 = 0{,}6825$

4/ $p(Y) = p[(G\cap Y)\cup(F\cap Y)] = p(G\cap Y) + p(F\cap Y)$

$= p(G)\times p\left(Y/_{G}\right) + p(F)\times p\left(Y/_{F}\right)$

$= 0{,}55\times 0{,}50 + 0{,}45\times 0{,}45 = 0{,}4775$

5/ $p(X\cap Y) = p\left[\left(G\cap(X\cap Y)\right)\cup F\cap(X\cap Y)\right]$

$= p[G\cap(X\cap Y)] + p[F\cap(X\cap Y)]$

$$= p(G) \times p\left(X\cap Y/_{G}\right) + p(F)\times p\left(X\cap Y/_{F}\right)$$

$$= 0{,}55\times 0{,}40 + 0{,}45\times 0{,}30 = 0{,}355$$

/6 $p(X\cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X\cap Y)$

$$= 0{,}6825 + 0{,}4775 - 0{,}355 = 0{,}805$$

/7 $p(\bar{X}\cap\bar{Y}) = P(\overline{X\cup Y}) = 1- p(X\cup Y) = 1- 0{,}805 = 0{,}195$

/8 $P\left(G/_{X}\right) = \frac{p(G\cap X)}{p(X)} = \frac{0{,}4125}{0{,}6825} \approx 0{,}6044$

/9 $p\left(F/_{\bar{Y}}\right) = \frac{p(F\cap\bar{Y})}{p(\bar{Y})} = \frac{p(F)\times p\left(\bar{Y}/_{F}\right)}{1-p(Y)} = \frac{0{,}45\times 0{,}65}{1-0{,}4775} = \frac{0{,}2925}{0{,}5225} \approx 0{,}5598$

/10 $p\left(F/_{\bar{X}\cup\bar{Y}}\right) = \frac{p[F\cap(\bar{X}\cup\bar{Y})]}{p(\bar{X}\cup\bar{Y})}$

$$= \frac{p(F)\times p\left(\bar{X}\cup\bar{Y}/_{F}\right)}{p(\bar{X}\cup\bar{Y})}$$

$$= \frac{p(F)\times p\left(\overline{X\cap Y}/_{F}\right)}{p(\overline{X\cap Y})}$$

$$= \frac{p(F)\times p\left(\overline{X\cap Y}/_{F}\right)}{[1-p(X\cap Y)]} = \frac{0{,}45\times 0{,}70}{(1-0{,}355)} = \frac{0{,}315}{0{,}645} \approx 0{,}4884$$

/11 $p\left((X\cup Y)/_{G}\right) = p\left(X/_{G}\right) + p\left(Y/_{G}\right) - p\left(X\cap Y/_{G}\right)$

$$= 0{,}75 + 0{,}50 - 0{,}40 = 0{,}85$$

/12 $p\left((\bar{X}\cap\bar{Y})/_{G}\right) = p\left((\overline{X\cup Y})/_{G}\right)$

$$= 1 - p\left(\frac{(X \cup Y)}{G}\right) = 1 - 0,85 = 0,15$$

/13 $$p\left(\frac{G}{\bar{X} \cap \bar{Y}}\right) = \frac{p[G \cap (\bar{X} \cap \bar{Y})]}{p(\bar{X} \cap \bar{Y})}$$

$$= \frac{p(G) \times p\left(\frac{(\bar{X} \cap \bar{Y})}{G}\right)}{p(\bar{X} \cap \bar{Y})} = \frac{0,55 \times 0,15}{0,195} \approx 0,4231$$

تمرين 4/

مؤسسة تنتج منتجين (A، B)، ويتطلب إنتاج وحدة من A 1كغ من المادة أولية M، ويتطلب إنتاج وحدة من B 0,5 كغ من المادة الأولية M، حيث أن 40% من المادة الأولية M يستخدم في المنتج A، و60% في انتاج المنتج B، وأنه تم استخدام 300 كغ من هذه المادة الأولية.

ويتم الانتاج من خلل فرعين (E1، E2) تملكهما المؤسسة، حيث 75% من المنتج A يتبع الفرع E1، و60% من المنتج B يتبع الفرع E2، نقوم باختيار وحدة إنتاجية بصفة عشوائية، فما احتمال أن تكون:

1/ وحدة انتاجية A؟

2/ وحدة إنتاجية B وتتبع الفرع E1؟

3/ تتبع الفرع E1 ؟

4/ وحدة انتاجية B، علما أنها تتبع الفرع E2؟

5/ وحدة إنتاجية A، علما أنها تتبع الفرع E1؟

الحل:

من معطيات التمرين لدينا: $p\left(\frac{E1}{A}\right) = 0,75 \quad p\left(\frac{E2}{A}\right) = 0,25$

$$p\left(\frac{E1}{B}\right) = 0,40 \quad p\left(\frac{E2}{B}\right) = 0,60$$

1/ لدينا: 40 كغ من M تستخدم في A ← 100 كغ من إجمالي M

x ← 300 كغ من M

ومنه: $x=\frac{40\times 300}{100}=120$، إذن 120 كغ من المادة الأولية M يتم استخدامها في المنتج A.

ولدينا: 180=120-300، إذن 180 كغ يتم استخدامها في المنتج B.

لإنتاج وحدة واحدة من A يتطلب استخدام 1كغ من المادة M، إذن فهناك 120 وحدة منتجة من A.

ولإنتاج وحدة واحدة من B يتطلب استخدام 0,5كغ من M، إذن فهناك 360 وحدة منتجة من B.

باستخدام القاعدة الثلاثية نجد نسبة الوحدات الإنتاجية A، وذلك كالآتي: 120← 480

x ← 100 ومنه $x=\frac{120\times 100}{480}=\%25$

إذن نسبة الوحدات الإنتاجية A هي 25%، ونسبة الوحدات الإنتاجية B هي 75%.

وبالتالي: $p(A)=0,25$، وهو المطلوب.

2/ $$p(B\cap E1)=p(B)\times p\left(E1/_B\right)=0,75\times 0,40=0,3$$

3/ $$p(E1)=p[(A\cap E1)\cup(B\cap E1)]$$

$$=p(A\cap E1)+p(B\cap E1)$$

$$=p(A)\times p\left(E1/_A\right)+p(B\cap E1)$$

$$=0,25\times 0,75+0,3=0,4875$$

4/ $$p\left(B/_{E2}\right)=\frac{p(B\cap E2)}{p(E2)}$$

$$=\frac{p(B)\times p\left(E2/_B\right)}{1-p(E1)}=\frac{0,75\times 0,60}{1-0,4875}=\frac{0,45}{0,5125}=0,8780$$

/5 $$p\left(A/_{E1}\right)=\frac{p(A\cap E1)}{p(E1)}=\frac{p(A)\times p\left(E1/_{A}\right)}{P(E1)}=\frac{0,25\times 0,75}{0,4875}=0,3846$$

تمرين 5/

صندوق يحتوي على 6 كرات بيضاء B، 4 كرات سوداء N ، نقوم بسحب كرتين على التوالي وبدون ارجاع، ما احتمال أن تكون:

1/ الكرة الثانية بيضاء؟

2/ الكرة الأولى سوداء إذا كانت الكرة الثانية بيضاء؟

3/ الكرة الأولى بيضاء إذا كانت الكرة الثانية بيضاء؟

الحل:

/1 $$p(B2)=p[(B1\cap B2)\cup(N1\cap B2)]$$

$$=p(B1)\times p\left(B2/_{B1}\right)+p(N1)\times p\left(B2/_{N1}\right)$$

$$=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{54}{90}=0,6$$

/2 $$p\left(N1/_{B2}\right)=\frac{p(N1\cap B2)}{p(B2)}$$

$$=\frac{P(N1)\times p\left(B2/_{N1}\right)}{p(B2)}=\frac{\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}}{0,6}=\frac{0,2667}{0,6}=0,4445$$

/3 $$p\left(B1/_{B2}\right)=\frac{p(B1\cap B2)}{p(B2)}$$

$$=\frac{P(B1)\times p\left(B2/_{B1}\right)}{p(B2)}=\frac{\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}}{0,6}=\frac{0,3333}{0,6}=0,5555$$

الفصل الرابع:

التجارب الاحتمالية المتتالية

(التجربة المركبة / شجرة الاحتمال)

1- ملخص:

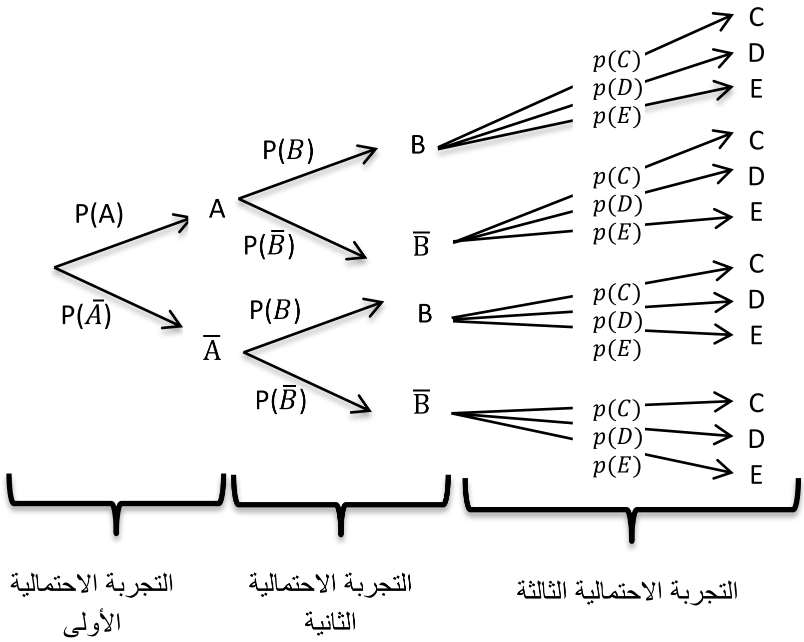
- **التجارب الاحتمالية المتتالية والمستقلة:**
  - حساب الاحتمال الكلي.
  - حساب احتمال تقاطع مجموعة من الحوادث.
- **التجارب الاحتمالية المتتالية والمترابطة:**
  - حساب الاحتمال الكلي.
  - حساب احتمال تقاطع مجموعة من الحوادث.
  - نظرية بايز (الاحتمالات الشرطية).

2- تمارين محلولة.

1. ملخص:

1.1 التجارب الاحتمالية المتتالية والمستقلة:

نفرض أنه لدينا 3 تجارب احتمالية مستقلة، حيث التجربة الأولى تتضمن حدثين (متكاملين) A، $\overline{A}$، والتجربة الاحتمالية الثانية تتضمن حدثين (متكاملين) B، $\overline{B}$، والتجربة الاحتمالية الثالثة تتضمن حوادث (متكاملة) C، D، E، ومعنى أن تكون التجارب متتالية هو أن تكون متتالية زمنيا؛ أي أنه تحدث التجربة الأولى، ثم بعد ذلك تحدث التجربة الثانية، ثم التجربة الثالثة، وبما أن التجارب مستقلة، فإن احتمالات نتائج حدوث التجربة الثانية مستقلة* عن نتائج التجربة الأولى، واحتمالات نتائج التجربة الثالثة مستقلة عن نتائج التجربتين الأولى والثانية، فمثلا احتمالات نتائج التجربة الثانية بعد وقوع الحادث A مثلا من التجربة الأولى، هي نفس احتمالات النتائج بعد وقوع الحادث $\overline{A}$ من التجربة الأولى، ويمكن تمثيل احتمالات حدوث الحوادث الممثلة لهذه التجارب الاحتمالية، من خلال شجرة الاحتمال كالآتي:



---

* في بعض التمارين إذا لم يتم ذكر أن التجارب مستقلة أو مترابطة بعبارة صريحة، فإن معطيات التمرين قد تدل على أنها مستقلة أو مترابطة، وفي بعض التمارين قد يكون النظر إلى كيفية حدوث التجارب في الواقع يكشف هل هي مستقلة أو مترابطة، وقد تكون بعض التجارب مستقلة حسب حدوثها في الواقع، ويتم افتراض في التمرين أنها مترابطة.

شجرة الاحتمال* في حالة التجارب المستقلة تسهل معرفة احتمال **تقاطع مجموعة من الحوادث**، وذلك من خلال تتبع المسار الذي يتوافق مع هذا التقاطع، ثم نقوم بحساب جداء الأجزاء المكونة له؛ أي جداء الاحتمالات المكونة له، ويمكن توضيح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

1/ $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

2/ $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B})$

3/ $p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B) \times p(C)$

4/ $p(A \cap \bar{B} \cap D) = p(A) \times p(\bar{B}) \times p(D)$

5/ $$\begin{aligned} p(A \cap C) &= p[(A \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C)] \\ &= p(A \cap B \cap C) + p(A \cap \bar{B} \cap C) \\ &= p(A) \times p(B) \times p(C) + p(A) \times p(\bar{B}) \times p(C) \\ &= p(A) \times p(C) \times [p(B) + p(\bar{B})] \\ &= (A) \times p(C) \times (1) = (A) \times p(C) \end{aligned}$$

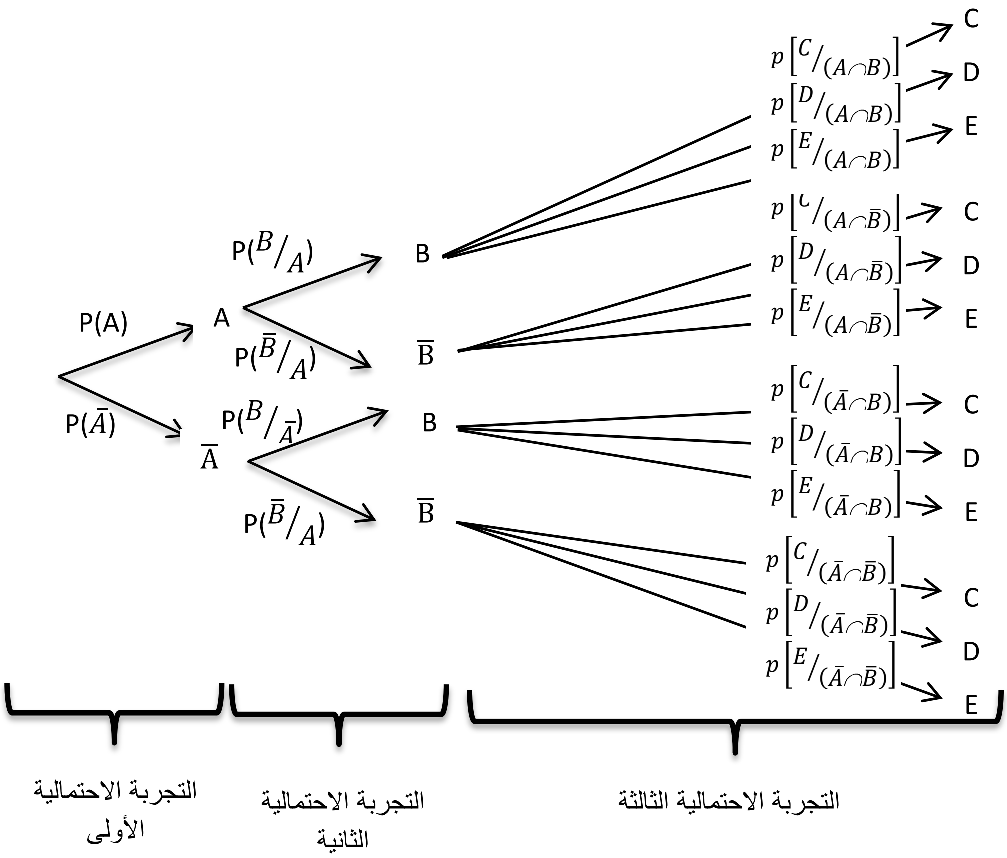
6/ $p(\bar{A} \cap E) = p(\bar{A}) \times p(E)$

1 .2. التجارب الاحتمالية المتتالية والمترابطة:

نفس المثال للحالة السابقة، لكن هنا نفرض بأن التجارب الاحتمالية الثلاثة مترابطة، أي أن احتمالات نتائج حدوث التجربة الثانية مرتبطة بنتائج التجربة الأولى، واحتمالات نتائج التجربة الثالثة مرتبطة بنتائج التجربتين الأولى والثانية، فمثلا احتمالات نتائج التجربة الثانية بعد وقوع الحادث A مثلا من التجربة الأولى، قد تختلف عن

* عندما يكون عدد التجارب الاحتمالية المكررة كبير، فإنه يصعب استخدام شجرة الاحتمال، ويكون الحل من خلال استخدام قوانين التوزيعات الاحتمالية، كما سنرى لاحقا، كذلك نشير إلى أن شجرة الاحتمال هي تمثيل للتجارب المتتالية، وقد تكون مستقلة أو مترابطة، وكل تجربة احتمالية تتضمن مجموعة من الحوادث المتكاملة، أي مختلف الحوادث متنافية (احتمال تقاطعها يساوي الصفر)، وأيضا مجموع احتمالاتها يساوي الواحد.
- كذلك نشير إلى أن بعض التجارب الاحتمالية في التمارين السابقة، يمكن تمثيلها بطريقة الشجرة، مثل **التمرين 3 من الفصل السابق**، فإنه يمكن تمثيل هذه الشجرة بكيفيات مختلفة على حسب صيغة السؤال والاحتمال الذي نريد حسابه، فمثلا في **السؤال الأول**، فالشجرة في التجربة الأولى تتضمن حدثين F ،G، وفي التجربة الثانية تتضمن الحدثين X، $\bar{X}$، **وأما في السؤال الثاني**، فالشجرة في التجربة الأولى هي نفسها، لكن في التجربة الثانية تتضمن الحدثين $X \cap Y$، $\overline{X \cap Y}$، وفي السؤال الثالث أيضا التجربة الأولى هي نفسها، لكن في التجربة الثانية، تتضمن حدثين X، $\bar{Y}$.
- بعض التجارب قد تبدو وكأنها غير متتالية في الواقع، وكأنها تجربة واحدة، لكن يمكن تفكيكها وتصويرها وكأنها متتالية، لتسهيل الحل.
- كذلك نشير إلى أنه في حالة إذا كانت التجارب المتتالية مستقلة واحتمالات الحوداث هي ثابتة في جميع التجارب فإن هذه حالة خاصة من التجارب المتتالية المستقلة، تسمى بالتجارب المتكررة المستقلة ذات الاحتمال الثابت، أي أنه نفس التجربة يتم تكرارها عدد من المرات، مع كل مرة تكون مستقلة عن الأخرى، مثل في **التمرين 1 في (الفصل 2)** في حالة السحب على التوالي ومع الارجاع.

احتمالات النتائج بعد وقوع الحادث $\overline{A}$ من التجربة الأولى، ويمكن تمثيل احتمالات حدوث الحوادث الممثلة لهذه التجارب الاحتمالية، من خلال شجرة الاحتمال كالآتي:



شجرة الاحتمال تسهل معرفة احتمال حادث معين، وذلك من خلال تتبع مسارات هذا الحادث في شجرة الاحتمال، حيث نقوم بجمع مختلف المسارات المتوافقة مع الاحتمال المراد حسابه، وكل مسار يساوي إلى جداء الأجزاء المكونة له؛ أي جداء الاحتمالات المكونة له، ويمكن توضيح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

حساب الاحتمال الكلي:

$$P(B) = p(A)\times p(B/A) + p(\bar{A})\times p(B/\bar{A})$$

$$P(\bar{B}) = p(A)\times p\left(\bar{B}/A\right) + p(\bar{A})\times p(\bar{B}/\bar{A})$$

$$p(C) = p(A)\times p(B/A)\times p\left[C/(A\cap B)\right] + p(A)\times p\left(\bar{B}/A\right)\times p\left[C/(A\cap\bar{B})\right] + p(\bar{A}) \times p(B/A)\times p\left[C/(\bar{A}\cap B)\right] + p(\bar{A})\times p\left(\bar{B}/\bar{A}\right)\times p\left[C/(\bar{A}\cap\bar{B})\right]$$

حساب احتمال تقاطع مجموعة من الحوادث:

$$p(A\cap B) = p(A)\times p(B/A)$$

$$p(A\cap \bar{B}) = p(A)\times p(\bar{B}/A)$$

$$p(A\cap B\cap C) = p(A) \times p(B/A) \times p\left[C/(A\cap B)\right]$$

$$p(A\cap \bar{B}\cap D) = p(A) \times p(\bar{B}/A) \times p\left[D/(A\cap \bar{B})\right]$$

$$p(A\cap C) = p[(A\cap B\cap C)\cup(A\cap \bar{B}\cap C)]$$

$$= p(A\cap B\cap C) + p(A\cap \bar{B}\cap C)$$

$$= p(A) \times p\left(B/A\right) \times p\left[C/(A\cap B)\right] + p(A) \times p(\bar{B}/A) \times p\left[C/(A\cap \bar{B})\right]$$

نظرية بايز (الاحتمالات الشرطية):

$$p\left(A/B\right) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)\times p(B/A)}{p(A)\times p(B/A) + p(\bar{A})\times p(B/\bar{A})}$$

$$p\left(A/\bar{B}\right) = \frac{p(A\cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{p(A)\times p(\bar{B}/A)}{p(A)\times p(\bar{B}/A) + p(\bar{A})\times p(\bar{B}/\bar{A})}$$

إن العلاقتين الأخيرتين يعتبران كتطبيق **لنظرية (قانون) بايز**، ونشير إلى أن هذه النظرية يتم تطبيقها بدون أن يُطلب ذلك في التمرين، وقد يتم تطبيقها بدون أن ننتبه لذلك.

2. تمـــارين محلولة

تمرين* 1/

شخص معين يقوم بإطلاق 3 رميات متتالية (مستقلة) على هدف معين، حيث احتمال الإصابة في الرمية الأولى هو 0,20، وفي الرمية الثانية 0,50، وفي الرمية الثالثة 0,90.

1/ أرسم شجرة الاحتمال الممثلة لهذه التجارب المتتالية؟

2/ احسب الاحتمالات الآتية:

أ/ أن يصيب في جميع الرميات؟

ب/ أن لا يصيب في جميع الرميات؟

ت/ أن يصيب في الرمية الأولى والثالثة؟

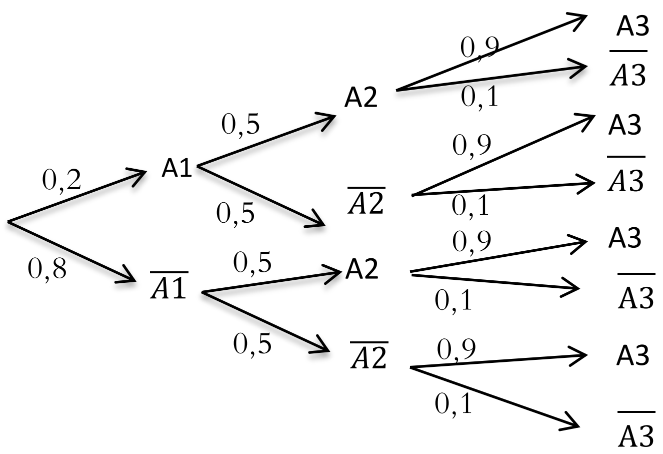
الحل:

1/ نرمز للرمية الأولى بـ A1، وللرمية الثانية بـ A2، وللرمية الثالثة بـ A3، ومنه معطيات التمرين تتمثل في:

$$p(A1)=0,20 \quad p(\overline{A1})=0,80 \quad p(A2)=0,50$$

$$p(\overline{A2})=0,50 \quad p(A3)=0,90 \quad p(\overline{A3})=0,10$$

وبالتالي يكون شكل شجرة الاحتمال، كالآتي:



* نشير إلا أن هذا التمرين يشبه التمرين 9 من الفصل الثاني، ونفس طريقة الحل، فقط هنا يتم توضيح طريقة شجرة الاحتمال، ونشير إلى أنه حتى وإن لم يُطلب رسمها، فإنه يمكن الاستعانة بها لتوضيح وتصور التجارب المتتالية واحتمالات حدوث مختلف الحوادث الممثلة لها، لأن الكثير من التمارين من هذا النوع يصعب حلها، إذا لم نقم برسم شجرة الاحتمال.

2/ حساب الاحتمالات الآتية:

أ- أن يصيب في جميع الرميات:

$$p(A1 \cap A2 \cap A3) = p(A1) \times p(A2) \times p(A3) = 0,20 \times 0,50 \times 0,90 = 0,09$$

ب- أن لا يصيب في جميع الرميات:

$$p(\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap \overline{A3}) = p(\overline{A1}) \times p(\overline{A2}) \times p(\overline{A3}) = 0,80 \times 0,50 \times 0,10 = 0,04$$

ت- أن يصيب في الرمية الأولى والثالثة:

$$p(A1 \cap A3) = p(A1) \times p(A3) = 0,20 \times 0,90 = 0,18$$

تمرين 2/

شخص معين يقوم بإطلاق رميتين متتاليتين (غير مستقلتين) على هدف معين، حيث احتمال الإصابة في الرمية الأولى هو 0,30، وفي الرمية الثانية 0,65، وأن احتمال الإصابة في الرميتين هو 0,10، فما احتمال:

1/ أن يصيب في الرمية الثانية، علما أنه اصاب في الرمية الأولى؟

2/ أن يصيب في الرمية الأولى أو الثانية؟

3/ أن لا يصيب في الرميتين؟

4/ أن لا يصيب في الرمية الثانية، علما أنه لم يصب في الرمية الأولى؟

5/ أن يصيب في الرمية الأولى ولا يصيب في الثانية؟

6/ أن لا يصيب في الرمية الأولى ويصيب في الثانية؟

7/ أن يصيب في الرمية الأولى، علما أنه أصاب في الرمية الثانية؟

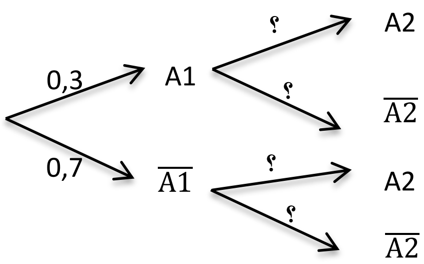
8/ أن لا يصيب في الرمية الأولى علما أنه أصاب في الرمية الثانية؟

الحل:

نرمز للرمية الأولى بـ A1، وللرمية الثانية بـ A2، ومنه معطيات التمرين تتمثل في: $p(A1 \cap A2) = 0,10$

$p(A1)=0,30 \quad P(\overline{A1})= 0,70 \quad P(A2)= 0,65 \quad P(\overline{A2})= 0,35$

وشجرة الاحتمال لا يمكن تمثيلها بشكل كامل، لأن هناك بعض الاحتمالات ناقصة، ويمكن تمثيلها بصفة جزئية كالآتي:



/1 $$p\left(A2/_{A1}\right) = \frac{p(A2 \cap A1)}{p(A1)} = \frac{0,10}{0,30} \approx 0,3333$$

/2 $$p(A1 \cup A2) = p(A1) + p(A2) - p(A1 \cap A2)$$

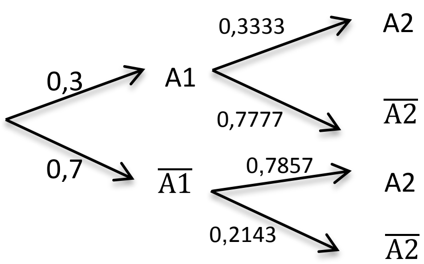
$$= 0,30 + 0,65 - 0,10 = 0,85$$

/3 $$p(\overline{A1} \cap \overline{A2}) = 1 - p\left(\overline{\overline{A1} \cap \overline{A2}}\right)$$

$$= 1 - p(A1 \cup A2) = 1 - 0,85 = 0,15$$

/4 $$p\left(\overline{A2}/_{\overline{A1}}\right) = \frac{p(\overline{A2} \cap \overline{A1})}{p(\overline{A1})} = \frac{0,15}{0,70} \approx 0,2143$$

بعد الإجابة عن هذا السؤال، والسؤال (1)، يمكن تمثيل شجرة الإحتمال بمختلف الأحتمالات الممثلة لها، وذلك كالآتي:



/5 $$p(A1 \cap \overline{A2}) = p(A1) \times p\left(\overline{A2}/_{A1}\right)$$

$$= \ p(A1) \times \left[1 - p\left({}^{A2}/_{A1}\right)\right]$$

$$= 0{,}30 \times (1 - 0{,}3333) = 0{,}2$$

/6 $$p(\overline{A1} \cap A2) = p(\overline{A1}) \times p\left({}^{A2}/_{\overline{A1}}\right)$$

$$= \ p(\overline{A1}) \times \left[1 - p\left({}^{\overline{A2}}/_{\overline{A1}}\right)\right]$$

$$= 0{,}70 \times (1 - 0{,}2143) \approx 0{,}55$$

/7 $$p\left({}^{A1}/_{A2}\right) = \frac{p(A1 \cap A2)}{p(A2)} = \frac{0{,}10}{0{,}65} = 0{,}1538$$

/8 $$p\left({}^{\overline{A1}}/_{A2}\right) = \frac{p(\overline{A1} \cap A2)}{p(A2)} = \frac{0{,}55}{0{,}65} = 0{,}8461$$

تمرين 3/

نقوم برمي قطعة نقود 4 مرات متتالية، فما احتمال الحصول على:

1/ وجه في جميع الرميات؟

2/ ظهر في جميع الرميات؟

3/ وجه في المرة الأولى وظهر في المرة الثالثة؟

4/ وجه في المرة الثانية والثالثة؟

5/ ظهر في المرة الأولى ووجه المرة الرابعة؟

6/ ظهر مرة واحدة؟

7/ وجه مرتين؟

الحل:

نرمز لمختلف الحوادث الممثلة للتجارب الاحتمالية الأربعة، كالآتي: الرمية الأولى تتضمن وجه (F1)، وظهر (D1)، الرمية الثانية تتضمن وجه (F2)، وظهر (D2)، الرمية الثالثة تتضمن وجه (F3)، وظهر (D3)، الرمية الرابعة تتضمن وجه (F4)، وظهر (D4)، ونلاحظ أن التجارب الأربعة المتتالية مستقلة، لأنه كما هو موجود في الواقع، فإن نتائج رمية معينة، لا تؤثر على التي بعدها، وبما أن قطعة النقود غير مغشوشة، فيكون احتمال أن تكون النتيجة وجه تساوي احتمال نتيجة ظهر، وتساوي ($\frac{1}{2}$)، وهذا في جميع الرميات، والتي تتضمن جميعها نفس الحوادث، وبنفس الاحتمالات، وبالتالي يمكن رسم شجرة الاحتمال، وذلك بأخذ بعين الاعتبار أن:

$$p(F1) = p(F2) = p(F3) = p(F4) = p(D1) = p(D2) = p(D3) = p(D4) = \frac{1}{2}$$

/1
$$\mathrm{P}(F1 \cap F2 \cap F3 \cap F4) = p(F1) \times p(F2) \times p(F3) \times p(F4)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

/2
$$\mathrm{P}(D1 \cap D2 \cap D3 \cap D4) = p(D1) \times p(D2) \times p(D3) \times p(D4)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

/3
$$\mathrm{P}(F1 \cap D3) = p(F1) \times p(D3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

/4
$$\mathrm{P}(F2 \cap F3) = p(F2) \times p(F3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

/5
$$\mathrm{P}(D1 \cap F4) = p(D1) \times p(F4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

6/ نرمز لحدث ظهر مرة واحدة بـ D، ومنه:

$$\mathrm{P}(D) = p(D1 \cap F2 \cap F3 \cap F4) + p(F1 \cap D2 \cap F3 \cap F4) + p(F1 \cap F2 \cap D3 \cap F4) + p(F1 \cap F2 \cap F3 \cap D4)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = 0{,}25$$

طريقة 2: $p(D)=C_4^1 \times p(D1 \times F2 \times F3 \times F4)$

حيث C_4^1 تمثل عدد إمكانيات ظهور **ظهر** مرة واحدة في موضع ما من بين أربعة مواضع، ويمكن وضع 4 مواضع بدون الحاجة إلى قانون التوفيقات بدون تكرار، لكن في الحالة العامة* ينبغي استخدام قانون التوفيقات بدون تكرار، مثل احتمال ظهور ظهرين عند رمي قطعة نقود 7 مرات، ومنه:

$$P(D)= C_4^1 \times p(D1) \times p(F2) \times p(F3) \times p(F4)$$

$$=4\times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = 0,25$$

7/ نرمز لحدث وجه مرتين بـ FF، ومنه:

$$P(FF)= C_4^2 \times p(F1) \times p(F2) \times p(D3) \times p(D4)$$

$$= \frac{\mathbf{4}!}{(\mathbf{4-2})!\times \mathbf{2}!} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{4\times 3\times 2}!}{(\mathbf{2})!\times \mathbf{2}!} \times \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{6}{16} = 0,375$$

تمرين 4/

لدينا صندوقين A، B، الصندوق A يحتوي على 3 زهرات نرد متمايزة (F1, F2, F3)، حيث زهرة النرد F2 مزورة (تتضمن 5 أوجه)؛ إذ لا تتضمن الوجه رقم 5، وزهرة النرد F3 مزورة (تتضمن 4 أوجه)؛ إذ لا تتضمن الأوجه رقم 3، 4، الصندوق B يحتوي مثل الصندوق A، لكن يتضمن زهرتين نرد F1، خراج الصندوقين لدينا زهرة نرد، نقوم برميها، فإذا ظهرت الأعداد {1، 2} نختار الصندوق A، وإذا ظهرت باقي الأعداد نختار الصندوق B، ثم نقوم بسحب زهرة نرد من الصندوق المختار، ونقوم برميها.

1/ ما احتمال الحصول على عدد فردي؟

2/ ما احتمال سحب زهرة النرد F3؟

3/ إذا تم الحصول على العدد 2، فما احتمال أنه تم اختيار الصندوق A؟

* طريقة الحل في الحالة العامة تتبع **قانون ثنائي الحد** كما سنرى في الفصل القادم، وخاصة ينبغي استخدام هذا القانون عندما يكون عدد التكرارات للتجربة كبير جدا.

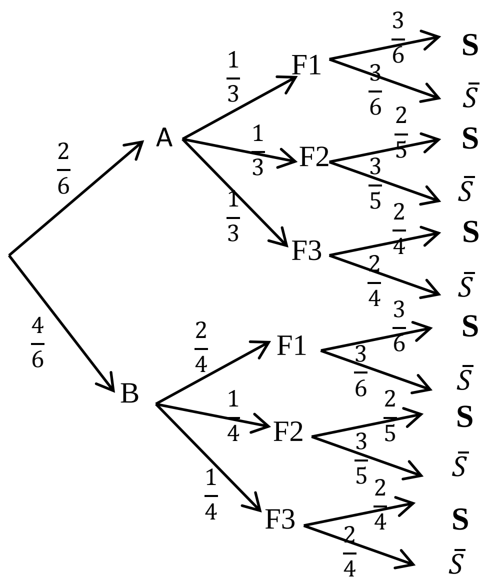
الحل:

1/ نرمز لحدث عدد فردي بـ S، ونلاحظ أن هناك 3 تجارب احتمالية متتالية، حيث:

التجربة الأولى تتمثل في اختيار صندوق معين، وتتضمن حدثين، الصندوق A، والصندوق B، حيث $P(A)=\frac{2}{6}$، لأنه يتم اختيار هذا الصندوق إذا ظهر الرقمين {1، 2} عند رمي زهرة نرد، وإذا ظهرت باقي الأعداد نختار الصندوق B، أي: $P(B)=\frac{4}{6}$.

والتجربة الثانية تتمثل في اختيار زهرة نرد من الصندوق، وحسب شروط التمرين، فيكون في الصندوق A، $p(F1)=p(F2)=p(F3)=\frac{1}{3}$، ويكون في الصندوق B، $p(F1)=\frac{2}{4}$ (يتضمن 4زهرات نرد، من بينهم زهرتين F1)، $p(F2)=p(F3)=\frac{1}{4}$.

التجربة الثالثة: تتمثل في أن يكون العدد فردي S في زهرة النرد المختارة، أو أن يكون العدد غير فردي $\bar{S}$، حيث كل زهرة نرد تتضمن رقم معين من الأرقام الفردية والزوجية، على حسب طبيعة زهرة نرد، إذا كانت غير مغشوشة، أو مغشوشة بكيفية معينة، وبما أن الحالات كثيرة، فنعطي مثال عن حالة فقط، فمثلا عند رمي زهرة النرد F2، المسحوبة من الصندوق A، فإن احتمال أن يظهر عدد فردي، هو: $\frac{2}{5}$، ويمكن تلخيص مختلف الاحتمالات، في شجرة الاحتمال الآتية:



ومن خلال شجرة الاحتمال يمكن حساب p(S)، حيث نلاحظ أن له 6 مسارات، وبالتالي يكون:

$$p(S) = \left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\right)$$

$$= \frac{85}{180} \approx 0{,}472$$

وعند الحل باستخدام الرموز والقوانين، فإننا نجد نفس النتيجة، حيث يكون:

$$p(S) = p\begin{bmatrix}(A\cap F1\cap S)\cup(A\cap F2\cap S)\cup(A\cap F3\cap S)\cup(B\cap F1\cap S)\\ \cup(B\cap F2\cap S)\cup(B\cap F3\cap S)\end{bmatrix}$$

$$= p(A\cap F1\cap S)+p(A\cap F2\cap S)+p(A\cap F3\cap S)$$

$$+(B\cap F1\cap S)+(B\cap F2\cap S)+(B\cap F3\cap S)$$

$$= p(A).p\left({F1}/_{A}\right).p\left({s}/_{A\cap F1}\right)+p(A).p\left({F2}/_{A}\right).p\left({s}/_{A\cap F2}\right)$$

$$+p(A).p\left({F3}/_{A}\right).p\left({s}/_{A\cap F3}\right)+p(B).p\left({F1}/_{B}\right).p\left({s}/_{B\cap F1}\right)$$

$$+p(B).p\left({F2}/_{B}\right).p\left({s}/_{B\cap F2}\right)+p(B).p\left({F3}/_{B}\right).p\left({s}/_{B\cap F3}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\right)$$
$$+\left(\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\right)$$
$$=\frac{85}{180}\approx 0{,}472$$

إذن نلاحظ أن طريقة الشجرة تكون أسهل، وبدون الحاجة إلى تعقيدات استخدام الرموز والقوانين.

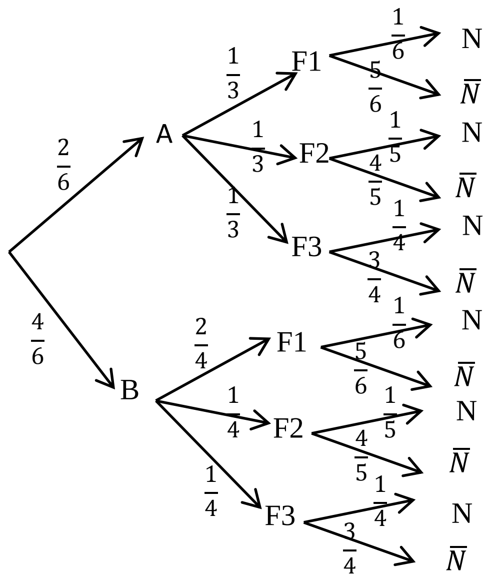
/2 $p(F3) = p[(A\cap F3)\cup(B\cap F3)]$

$$= p(A\cap F3)+p(B\cap F3)$$

$$= p(A)\times p\left({F3}/_{A}\right)+p(B)\times p\left({F3}/_{B}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{18}\approx 0{,}2778$$

3/ نشير إلى أنه ينبغي رسم شجرة احتمال أخرى، بحيث أن التجربة الثالثة يتم صياغتها بما يتوافق ويخدم هذا السؤال، بحيث تتضمن حدثين، نرمز مثلا بـ N لحدث ظهور الرقم 2، و $\overline{N}$ لحدث عدم ظهور الرقم 2 (أي ظهور الأرقام الأخرى)، ويتم تشكيل شجرة الاحتمال، مثل السابق، لكن في التجربة الثالثة تكون احتمالات أخرى، فمثلا عند رمي زهرة النرد F3، المسحوبة من الصندوق A، فإن احتمال أن يظهر الرقم 2، هو: $\frac{1}{5}$، ويمكن تلخيص مختلف الاحتمالات، في شجرة الاحتمال الآتية:



نرمز لحدث ظهور الرقم 2 بـ N، ومنه الاحتمال المطلوب هو: $p\left(A/_N\right) = \frac{p(A\cap N)}{p(N)}$

من خلال شجرة الاحتمال يمكن حساب البسط $p(A\cap N)$، حيث أنه له 3 مسارات، وكذلك نحسب المقام $p(N)$، حيث أن له 6 مسارات، وبالتالي يكون:

$$\left(A/_N\right) = \frac{p(A\cap N)}{p(N)} = \frac{\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)}$$

$$\approx \frac{0{,}0555}{0{,}0555 + 0{,}1305} \approx \frac{0{,}0555}{0{,}186} \approx 0{,}2984$$

وباستخدام الرموز والقوانين، فإنها طريقة الحل تكون أكثر تعقيد، حيث نجد نفس النتيجة، وذلك كالآتي:

$$p(A\cap N) = p[(A\cap F1\cap N) \cup (A\cap F2\cap N) \cup (A\cap F3\cap N)]$$

$$= p(A).p\left({F1}/_{A}\right).p\left({N}/_{A\cap F1}\right)$$

$$+ p(A).p\left({F2}/_{A}\right).p\left({N}/_{A\cap F2}\right)$$

$$+ p(A).p\left({F3}/_{A}\right).p\left({N}/_{A\cap F3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)\approx 0,0555$$

$P(N) = p[(A\cap N)\cup(B\cap N)]$

$= p(A\cap N) + p(B\cap N)$

$p(B\cap N) = p[(B\cap F1\cap N)\cup(B\cap F2\cap N)\cup(B\cap F3\cap N)]$

$$= p(B).p\left({F1}/_{B}\right).p\left({N}/_{B\cap F1}\right)$$

$$+ p(B).p\left({F2}/_{B}\right).p\left({N}/_{B\cap F2}\right)$$

$$+ p(B).p\left({F3}/_{B}\right).p\left({N}/_{B\cap F3}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)$$

$$\approx 0,1305$$

ومنه: $p(N) = 0,0555 + 0,1305 = 0,186$

إذن: $p\left({A}/_{N2}\right) = \frac{0,0555}{0,186} \approx 0,2984$

الفصل الخامس:

المتغيرات العشوائية

1- ملخص:

- **المتغيرات العشوائية المتقطعة:**
  - قانون التوزيع الاحتمالي.
  - تابع التوزيع الاحتمالي.
  - الأمل الرياضي (التوقع الرياضي).
  - التباين.
  - الانحراف المعياري.
- **المتغيرات العشوائية المستمرة:**
  - تابع الكثافة الاحتمالية.
  - تابع التوزيع الاحتمالي.
  - الأمل الرياضي (التوقع الرياضي).
  - التباين.
  - الانحراف المعياري.

2- تمارين محلولة.

1. ملخص:

رأينا في الفصول السابقة أنه، أنه كل تجربة احتمالية معنية، تتضمن مجموعة من الحوادث، أو ما يسمى بفراغ الحوادث الأولية، حيث أن كل حادث يقابله احتمال معين عبارة عن عدد حقيقي، إن هذه عملية التحول من مجموعة الحوادث الأولية إلى مجموعة أخرى من الأعداد الحقيقة، تعتبر كتطبيق رياضي، تعبر عن معنى المتغير العشوائي، حيث يمكن تلخيص كيفية توزع مختلف الاحتمالات، وذلك سواء في شكل جداول أو صيغ ودوال رياضية، وذلك لتسهيل حساب مختلف الاحتمالات، وسواء كان المتغير العشوائي متصل أو منفصل، وكذلك هناك صيغ وقوانين ثابتة (كما سنرى في الفصل القادم) لبعض أنواع التجارب الاحتمالية، التي تسهل علينا حساب مختلف الاحتمالات، وخاصة عندما تكون التجربة الاحتمالية مكررة لعدد كبير من المرات.

1.1. المتغيرات العشوائية المتقطعة:

في هذه الحالة، فإن المتغير العشوائي يأخذ قيم متقطعة (منفصلة)، وتكون قيم صحيحة (موجبة أو سالبة)، ويكون مجال تغيره عبارة عن مجموعة قابلة للعد، مثل: عدد الأطفال في العائلة، عدد الطلبة الناجحين، عدد الكريات الحمراء عند السحب من الصندوق،...الخ.

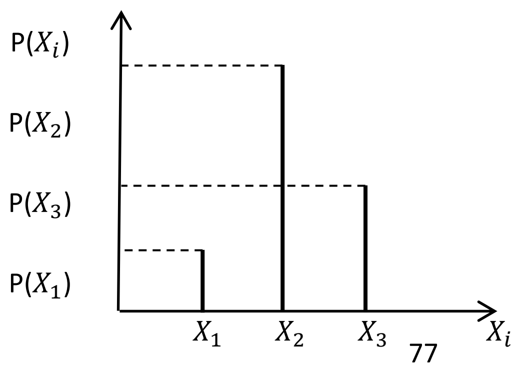
قانون التوزيع الاحتمالي:

قانون التوزيع الاحتمالي، هو عبارة عن جميع قيم المتغير العشوائي والاحتمالات التي تقابلها، نفرض أنه لدينا متغير عشوائي X، فيكون الشكل العام لقانون التوزيع الاحتمالي، كما في الجدول كالآتي:

جدول 1: قانون التوزيع الاحتمالي وتابع التوزيع الاحتمالي.

$\boldsymbol{X_i}$	X_1	X_2	X_3	……..	……….	X_n	$\sum$
P($\boldsymbol{X_i}$)	P(X_1)	P(X_2)	P(X_3)	……….	……….	P(X_n)	1
F($\boldsymbol{X_i}$)	P(X_1)	P(X_1)+ P(X_2)	P(X_1)+ P(X_2)+ P(X_3)	……….	……….	1	-

ويمكن تمثيل قانون التوزيع الاحتمالي بيانيا، ويكون الشكل العام للتمثيل كالآتي:



تابع التوزيع الاحتمالي:

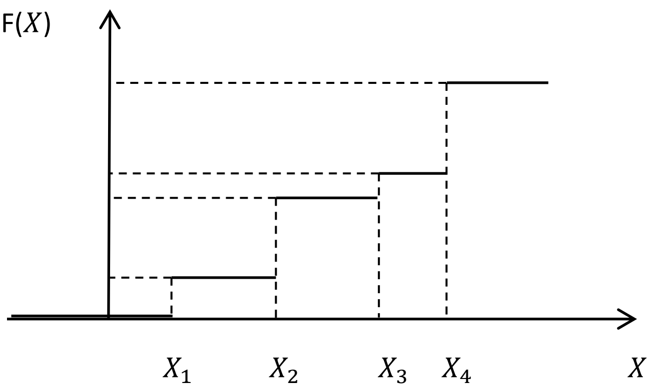
أما تابع التوزيع $F(X_i)$، فيعطينا الاحتمال للمتغير العشوائي عندما يكون في مجال معين، ونحصل عليه من خلال العملية التجميعية المتكاملة لاحتمالات قيم المتغير العشوائي، أو بتعبير آخر هو الاحتمالات التراكمية إلى غاية قيمة محددة X_k، ونكتب:

$$F(X_k) = p(X \le X_k) = p(X_1) + p(X_2) + \cdots + p(X_k) = \sum_{i=1}^{i=k} p(X_i)$$

ويمكن التعبير عن هذا التابع إما من خلال جدول (كما في الجدول السابق)، أو من خلال صيغة الدالة الرياضية الآتية:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & X<X_1 \\ p(X_1), & X_1 \le X<X_2 \\ p(X_1)+p(X_2), & X_2 \le X<X_3 \\ p(X_1)+p(X_2)+p(X_3), & X_3 \le X<X_4 \\ \vdots & \\ p(X_1)+p(X_2)+p(X_3)+\cdots+p(X_n)=1, & X_n \le X \end{cases}$$

ويمكن تمثيل تابع التوزيع الاحتمالي، ويكون الشكل العام للتمثيل كالآتي:



الأمل الرياضي (التوقع الرياضي): وهو القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي، ويرمز له بـ $E(X)$، ويتم حسابه من خلال القانون الآتي: $E(X) = \sum_{i=1}^{n}(X_i . P_i)$

التباين: ويعبر عن مدى تشتت قيم المتغير العشوائي، ويرمز له بـ $V(X)$، ويتم حسابه من خلال القانون الآتي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 . P_i\right)\right] - [E(X)]^2$$

الانحراف المعياري: ويعبر كذلك عن مدى تشتت قيم المتغير العشوائي، ويرمز له بـ x ، ويساوي جذر التباين، $S_x = \sqrt{V(X)}$.

إذا كان عندنا a، b، عددين حقيقيين وX، Y، متغيرين عشوائيين متقطعين، فيمكن ذكر بعض خواص الأمل الرياضي والتباين كالآتي:

$E(aX) = a.E(X) \qquad E(X \mp b) = E(X) \mp b \qquad E(a) = a$

$E(aX + b) = a.E(X) + b \qquad E(X \mp Y) = E(X) \mp E(Y)$

$E(XY) = E(X).E(Y)$ / Y ،X مستقلان

$V(aX) = a^2.V(X) \qquad V(X + b) = V(X) \qquad V(aX + b) = a^2.V(X)$

$V(X \mp Y) = V(X) + V(Y)$ / Y ،X مستقلان

$V(X \mp Y) = V(X) + V(Y) \mp 2Cov(X, Y)$ / Y ،X غير مستقلان

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X).E(X)$ (المشترك التباين)

(Y ،X مستقلان) $\Rightarrow Cov(X, Y) = 0$

(Y ،X مستقلان) $\not\Leftarrow Cov(X, Y) = 0$

2.1. المتغيرات العشوائية المستمرة:

في هذه الحالة، فإن قيم المتغير العشوائي تعتبر أعداد حقيقة، حيث بين كل عددين حقيقيين يوجد ما لا نهاية من الأعداد الحقيقية؛ أي هناك استمرارية وعدم تقطع بين كل عددين حقيقيين، مثل: الطول، الوزن،...الخ،

تابع الكثافة الاحتمالية:

قانون التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة يسمى بتابع الكثافة الاحتمالية $f(\mathrm{x})$ (دالة الكثافة الاحتمالية)، حيث من خلال هذا التابع يمكن حساب احتمال مجال معين لقيم المتغير العشوائي، وأما من أجل أي قيمة معينة لوحدها فاحتمالها هو صفر دوما، لأن هناك لا نهاية من قيم المتغير العشوائي، واحتمال قيمة واحدة مهمل، واحتمال مجال معين لقيم المتغير العشوائي، يمثل الدالة الأصلية لتابع الكثافة الاحتمالية في هذا المجال، ويمكن توضيح ذلك كالآتي: $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(\mathrm{x}).d\mathrm{x}$

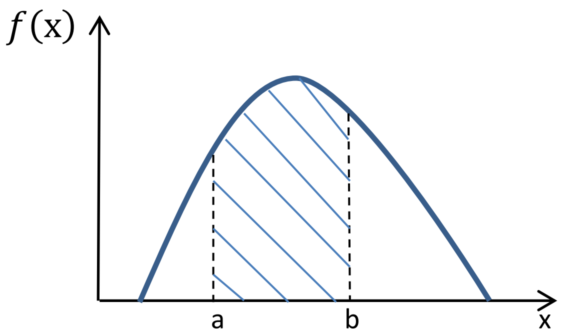
وهندسيا هذا الاحتمال يمثل المساحة المحصورة بين التمثيل البياني لتابع الكثافة ومحور الفواصل في المجال المعني لقيم المتغير العشوائي، وبالتالي كلما صغر المجال، كلما صغر الاحتمال؛ لأن المساحة تكون أقل، وعندما يكون a=b، فإن الاحتمال يساوي الصفر؛ لأن المساحة تكون معدومة، ومعناه أن:

$$\mathrm{p}(\mathrm{a} \leq \mathrm{X} \leq \mathrm{a}) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} f(\mathrm{x}).\mathrm{dx} = 0$$

وبما أن الاحتمال عند قيمة معينة يساوي صفر، فإنه ينتج عن ذلك أن:

$$\mathrm{p}(\mathrm{a} \leq \mathrm{X} \leq \mathrm{a}) = \mathrm{p}(\mathrm{a}<\mathrm{X} \leq \mathrm{a}) = \mathrm{p}(\mathrm{a} \leq \mathrm{X}<\mathrm{a}) = \mathrm{p}(\mathrm{a}<\mathrm{X}<\mathrm{a})$$

ويمكن توضيح بيانيا تابع الكثافة الاحتمالية، ومعنى الاحتمال بيانيا، كالآتي:



واعتبار أن $f(\mathrm{x})$ هو تابع كثافة احتمالية يتضمن تحقق الشرطين الآتيين:

1/ $\forall X, f(\mathrm{x}) \geq 0$

2/ $\forall X, \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{x}).d\mathrm{x} = 1$

تابع التوزيع الاحتمالي:

أما تابع التوزيع* $\mathrm{F}(X)$، فهو يعطينا الاحتمال للمتغير العشوائي عندما يكون في مجال معين من الشكل $]-\infty\ ,\ a[$، وهو عبارة دالة تكاملية لدالة الكثافة الاحتمالية، ويمكن التعبير عن هذا التابع في الحالة العامة من خلال الدالة الرياضية الآتية: $p(X \leq a) = \mathrm{F}(a) = \int_{-\infty}^{a} f(\mathrm{x}).\, d\mathrm{x}$

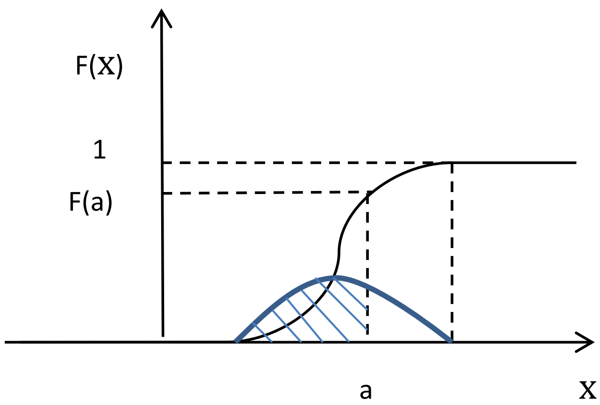
وحتى تكون الصيغة النهائية لتابع التوزيع مصاغة بدلالة المتغير X، فيمكن استخدام العلاقة الآتية:

$$\mathrm{F}(X) = \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} f(t).\, dt$$

ومعرفة الدالة الممثلة لتابع التوزيع، تسهل علينا حساب احتمالات المتغير العشوائي، وذلك كالآتي:

$$p(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(\mathrm{x}).\, d\mathrm{x} = \int_{-\infty}^{b} f(\mathrm{x}).\, d\mathrm{x} - \int_{-\infty}^{a} f(\mathrm{x}).\, d\mathrm{x} = F(b) - F(a)$$

ويمكن توضيح بيانيا تابع التوزيع، كالآتي:



الأمل الرياضي (التوقع الرياضي): $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X.\, f(\mathrm{x}).\, d\mathrm{x}$

التباين: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^2.\, f(\mathrm{x}).\, d\mathrm{x}\right) - [E(X)]^2$

الانحراف المعياري: $S_x = \sqrt{V(X)}$.

* الصيغة المعبرة عن تابع الكثافة الاحتمالية، والصيغة المعبرة عن تابع التوزيع، هي نفسها، فقط الاختلاف أنه تابع التوزيع نكتب حرف بالشكل (F)، وفي تابع الكثافة نفس الحرف نكتبه بالشكل (f).

2. تمارين محلولة.

تمرين 1/

مجموعة من المرضى تتكون من 15 شخص، تتضمن 7 رجال، 5 نساء، 3 أطفال، ونقوم باختيار عينة منهم مكونة من 3 أشخاص للمباشرة في الفحص الطبي، نفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد الأطفال في العينة.

1/ حدد فراغ الحوادث الأولية؟

2/ حدد قانون التوزيع الاحتمالي (دالة الاحتمال) للمتغير العشوائي X؟

3/ ما هو احتمال أن يكون في العينة على الأقل طفل؟

4/ ما احتمال أن يكون في العينة طفلين على الأكثر؟

5/ ما احتمال أن يكون في العينة طفلين فأكثر؟

6/ حدد تابع (دالة التوزيع)، ومثله بيانيا؟

7/ أحسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X؟

8/ أحسب: $E(2X)$، $E(3X+4)$، $V(3X)$، $V(2X+7)$؟

الحل:

1/ تحديد فراغ الحوادث الأولية: $\Omega=\{0, 1, 2, 3\}$

2/ تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

$$p(X=0)=\frac{C_{12}^{3}}{C_{15}^{3}}=\frac{\frac{12!}{3!\times(12-3)!}}{\frac{15!}{3!\times(15-3)!}}=\frac{2\times 11\times 10}{5\times 7\times 13}=\frac{220}{455}$$

$$p(X=1)=\frac{C_3^1\times C_{12}^2}{C_{15}^3}=\frac{3\times\frac{12!}{2!\times(12-2)!}}{455}=\frac{3\times 6\times 11}{455}=\frac{198}{455}$$

$$p(X=2)=\frac{C_3^2\times C_{12}^1}{C_{15}^3}=\frac{3\times 12}{455}=\frac{36}{455}$$

$$p(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{15}^3}=\frac{1}{455}$$

ويمكن تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي في الجدول الآتي:

X	0	1	2	3	Σ
P(X)	$\frac{220}{455}$	$\frac{198}{455}$	$\frac{36}{455}$	$\frac{1}{455}$	1

3/ احتمال أن يكون في العينة على الأقل طفل هو:

$$p(X\geq 1)=p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)$$

$$=\frac{198}{455}+\frac{36}{455}+\frac{1}{455}=\frac{235}{455}$$

4/ احتمال أن يكون في العينة طفلين على الأكثر هو:

$$p(X\leq 2)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)$$

$$=\frac{220}{455}+\frac{198}{455}+\frac{36}{455}=\frac{454}{455}$$

5/ احتمال أن يكون في العينة طفلين فأكثر هو:

$$p(X\geq 2)=p(X=2)+p(X=3)$$

$$=\frac{36}{455}+\frac{1}{455}=\frac{37}{455}$$

6/ تحديد تابع (دالة) التوزيع وتمثيله بيانيا:

$F(X) = p(X<0) = 0$ .... $(X<0)$

$F(X) = p(X\leq 0) = p(X=0) = \frac{220}{455}$ .... $(0\leq X<1)$

$F(X) = p(X\leq 1) = p(X=0) + p(X=1) = \frac{220}{455} + \frac{198}{455} = \frac{418}{455}$ .... $(1\leq X<2)$

$F(X) = p(X\leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$= \frac{220}{455} + \frac{198}{455} + \frac{36}{455} = \frac{454}{455}$ .... $(2\leq X<3)$

$F(X) = p(X\leq 3) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)$

$= \frac{220}{455} + \frac{198}{455} + \frac{36}{455} + \frac{1}{455} = 1$ .... $(X\geq 3)$

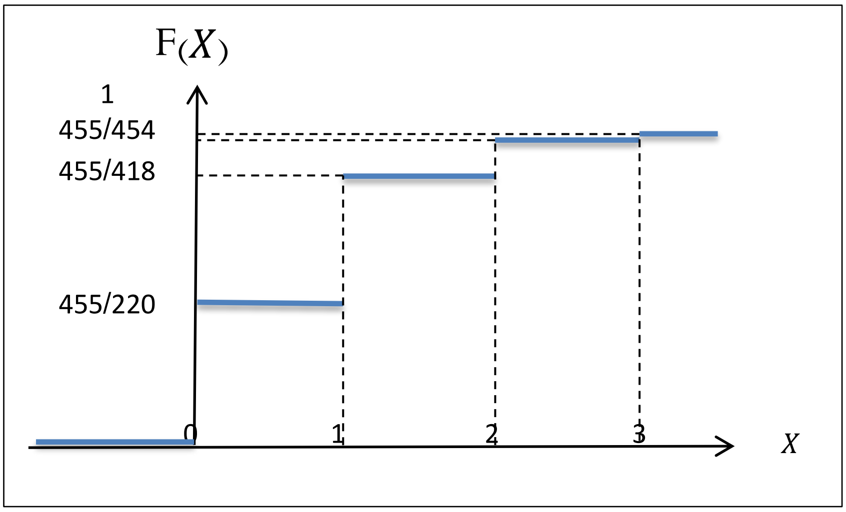
ويمكن تلخيص قيم تابع التوزيع الاحتمالي كما في الجدول الآتي:

X	0	1	2	3
F(X)	$\frac{220}{455}$	$\frac{418}{455}$	$\frac{454}{455}$	1

وكذلك يمكن تلخيص قيم تابع التوزيع الاحتمالي كالآتي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (X<0) \\ \frac{220}{455} \ldots\ldots\ldots\ldots (0\leq X<1) \\ \frac{418}{455} \ldots\ldots\ldots\ldots (1\leq X<2) \\ \frac{454}{455} \ldots\ldots\ldots\ldots (2\leq X<3) \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3\leq X) \end{cases}$$

التمثيل البياني لتابع التوزيع:



/7 الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو: $\mathrm{E(X)} = \sum_{i=1}^{n}(X_i.P_i)$

$$= \left(0 \times \frac{220}{455}\right) + \left(1 \times \frac{198}{455}\right) + \left(2 \times \frac{36}{455}\right) + \left(3 \times \frac{1}{455}\right)$$

$$= \frac{273}{455} = 0{,}6$$

التباين للمتغير العشوائي X هو: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$\mathrm{E(X^2)} = \sum_{i=1}^{n}\left({X_i}^2.P_i\right)$$

$$= \left(0^2 \times \frac{220}{455}\right) + \left(1^2 \times \frac{198}{455}\right) + \left(2^2 \times \frac{36}{455}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{455}\right)$$

$$= \frac{351}{455} \approx 0{,}7714$$

ومنه نجد أن: $V(X) = 0{,}7714 - 0{,}6^2 = 0{,}7714 - 0{,}36 = 0{,}4114$

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو: $\sigma(X) = \sqrt{v(X)} = \sqrt{0{,}4114} \approx 0{,}6414$

/8 حساب: $E(2X) = 2E(X) = 2 \times (0{,}6) = 1{,}2$

$$\mathrm{E(3X\ +\ 4)} = 3E(X) + 4 = 3 \times (0{,}6) + 4 = 5{,}8$$

$V(3X) = 3^2 \times V(X) = 9 \times 0{,}4114 = 3{,}7026$

$\mathrm{V}(2\mathrm{X} + 7) = 2^2 \times V(X) = 4 \times 0{,}4114 = 1{,}6456$

تمرين 2/

نفس معطيات التمرين (1)، حيث نرمز لعدد الرجال بـ a، عدد النساء b، عدد الأطفال d، حدد فراغ الحوادث الأولية وقانون التوزيع الاحتمالي في الحالات الآتية:

1/ بافتراض متغير عشوائي آخر نسميه Y، حيث يمثل جداء عدد الأطفال والرجال في العينة ($Y=a\times b$).

2/ بافتراض متغير عشوائي آخر نسميه Z، حيث يمثل عدد الرجال ناقص عدد النساء في العينة ($Z=a-b$).

3/ بافتراض متغير عشوائي آخر نسميه L، حيث: $L= 3a + 4$.

4/ بافتراض متغير عشوائي آخر نسميه M، حيث: $M= 5a^2 + b + 2$.

5/ بافتراض متغير عشوائي آخر نسميه N، حيث: N=1 إذا لم يظهر أي رجل، N=3 إذا ظهر رجل مرة أو مرتين، N=5 إذا ظهر رجل 3 مرات.

الحل:

مختلف الثنائيات لأعداد ظهور الرجال والنساء في العينة تتمثل في الآتي:

$(a,b)=\{(0,0), (0, 1), (0, 2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2),(2,0), (2,1), (3,0)\}$.

1/ تحديد فراغ الحوادث الأولية وقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y:

حسب الثنائيات الممثلة لأعداد ظهور الرجال والنساء، فإن قيم Y تتمثل في:

$Y=a\times b= \{0,0,0,0,0,1,2 ,0,2 ,0\}$

وبالتالي فراغ الحوادث الأولية الذي يتضمن قيم Y يتمثل في: $\Omega=\{0,1,2\}$؛ أي أنه مثلا يوجد 7 حالات من الثنائيات لأعداد الرجال والنساء المتوافقة مع Y=0، ويمكن حساب احتمالات مختلف قيم Y، كالآتي:

$$P(Y=0)=\frac{C_3^3+(C_5^1\times C_3^2)+(C_5^2\times C_3^1)+C_5^3+(C_7^1\times C_3^2)+(C_7^2\times C_3^1)+C_7^3}{C_{15}^3}$$

$$=\frac{1+15+30+10+21+63+35}{455}=\frac{175}{455}$$

$$P(Y=1)=\frac{C_7^1\times C_5^1\times C_3^1}{C_{15}^3}=\frac{105}{455}$$

$$p(Y=2)=\frac{C_7^1\times C_5^2+C_7^2\times C_5^1}{C_{15}^3}=\frac{70+105}{455}=\frac{175}{455}$$

ويمكن تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي في الجدول الآتي:

Y	0	1	2	Σ
P(Y)	$\frac{175}{455}$	$\frac{105}{455}$	$\frac{175}{455}$	1

2/ تحديد فراغ الحوادث الأولية وقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Z:

حسب الثنائيات الممثلة لأعداد ظهور الرجال والنساء، فإن قيم Z تتمثل في:

Z = a – b = {0, -1, -2, -3, 1, 0, -1, 2, 1, 3}

وبالتالي فراغ الحوادث الأولية الذي يتضمن قيم Z يتمثل في: **Ω**={-3, -2 ,-1, 0, 1, 2, 3}،

ويمكن حساب احتمالات مختلف قيم Z، كالآتي:

$$P(Z=-3)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{10}{455}$$

$$P(Z=-2)=\frac{C_5^2\times C_3^1}{C_{15}^3}=\frac{30}{455}$$

$$P(Z=-1)=\frac{(C_5^1\times C_3^2)+(C_7^1\times C_5^2}{C_{15}^3}=\frac{15+70}{455}=\frac{85}{455}$$

$$P(Z=0)=\frac{C_3^3+(C_7^1\times C_5^1\times C_3^1)}{C_{15}^3}=\frac{1+105}{455}=\frac{106}{455}$$

$$P(Z=1)=\frac{(C_7^1\times C_3^2)+(C_7^2\times C_5^1)}{C_{15}^3}=\frac{21+105}{455}=\frac{126}{455}$$

$$P(Z=2)=\frac{(C_7^2\times C_3^1)}{C_{15}^3}=\frac{63}{455}$$

$$P(Z=3)=\frac{C_7^3}{C_{15}^3}=\frac{35}{455}$$

ويمكن تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي في الجدول الآتي:

Z	–3	–2	–1	0	1	2	3	Σ
P(Z)	$\frac{10}{455}$	$\frac{30}{455}$	$\frac{85}{455}$	$\frac{106}{455}$	$\frac{126}{455}$	$\frac{63}{455}$	$\frac{35}{455}$	1

3/ تحديد فراغ الحوادث الأولية وقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي L:

حسب الثنائيات الممثلة لأعداد ظهور الرجال والنساء، فإن قيم L تتمثل في:

L = 3a +4= {4, 4, 4, 4, 7, 7, 7, 10, 10, 13}

وبالتالي فراغ الحوادث الأولية الذي يتضمن قيم L يتمثل في: {13 ,10, 7 ,4}=Ω، ويمكن حساب احتمالات مختلف قيم L، كالآتي:

$$P(L=4)=\frac{C_3^3+(C_5^1\times C_3^2)+(C_5^2\times C_3^1)+C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{1+15+30+10}{455}=\frac{56}{455}$$

$$P(L=7)=\frac{(C_7^1\times C_3^2)+(C_7^1\times C_5^1\times C_3^1)+(C_7^1\times C_5^2)}{C_{15}^3}=\frac{21+105+70}{455}=\frac{196}{455}$$

$$P(L=10)=\frac{(C_7^2\times C_3^1)+(C_7^2\times C_5^1)}{C_{15}^3}=\frac{63+105}{455}=\frac{168}{455}$$

$$P(L=13)=\frac{C_7^3}{C_{15}^3}=\frac{35}{455}$$

ويمكن تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي في الجدول الآتي:

L	4	7	10	13	Σ
P(L)	$\frac{56}{455}$	$\frac{196}{455}$	$\frac{168}{455}$	$\frac{35}{455}$	1

4/ تحديد فراغ الحوادث الأولية وقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي M:

حسب الثنائيات الممثلة لأعداد ظهور الرجال والنساء، فإن قيم M تتمثل في:

$.M= 5a^2 + b + 2 = \{2, 3, 4, 5, 7, 8 ,9 ,22, 23, 47\}$

وبالتالي فراغ الحوادث الأولية الذي يتضمن قيم M يتمثل في:

$\Omega=\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 22, 23, 47\}$

ويمكن حساب احتمالات مختلف قيم M، كالآتي:

$P(M = 2) = \frac{C_3^3}{C_{15}^3} = \frac{1}{455}$ $P(M = 3) = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_{15}^3} = \frac{15}{455}$ $P(M = 4) = \frac{C_5^2 \times C_3^1}{C_{15}^3} = \frac{30}{455}$

$P(M = 5) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{10}{455}$ $P(M = 7) = \frac{C_7^1 \times C_3^2}{C_{15}^3} = \frac{21}{455}$ $P(M = 8) = \frac{C_7^1 \times C_5^1 \times C_3^1}{C_{15}^3} = \frac{105}{455}$

$P(M = 9) = \frac{C_7^1 \times C_5^2}{C_{15}^3} = \frac{70}{455}$ $P(M = 22) = \frac{C_7^2 \times C_3^1}{C_{15}^3} = \frac{63}{455}$ $P(M = 23) = \frac{C_7^2 \times C_5^1}{C_{15}^3} = \frac{105}{455}$

$P(M = 47) = \frac{C_7^3}{C_{15}^3} = \frac{35}{455}$

ويمكن تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي في الجدول الآتي:

M	2	3	4	5	7	8	9	22	23	47	Σ
P(M)	$\frac{1}{455}$	$\frac{15}{455}$	$\frac{30}{455}$	$\frac{10}{455}$	$\frac{21}{455}$	$\frac{105}{455}$	$\frac{70}{455}$	$\frac{63}{455}$	$\frac{105}{455}$	$\frac{35}{455}$	1

5/ تحديد فراغ الحوادث الأولية وقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي N:

فراغ الحوادث الأولية الذي يتضمن قيم N يتمثل في: $\Omega=\{1, 3, 5\}$، ويمكن حساب احتمالات مختلف قيم N، كالآتي:

$p(N = 1) = \frac{C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{56}{455}$

$$p(N=3)=\frac{(C_7^1\times C_8^2)+(C_7^2\times C_8^1)}{C_{15}^3}=\frac{196+168}{455}=\frac{364}{455}$$

$$p(N=5)=\frac{C_7^3}{C_{15}^3}=\frac{35}{455}$$

ويمكن تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي في الجدول الآتي:

N	1	3	5	Σ
P(N)	$\frac{56}{455}$	$\frac{364}{455}$	$\frac{35}{455}$	1

تمرين 3/

حدد فراغ الحوادث الأولية وقانون التوزيع الاحتمالي في الحالات الآتية:

1/ شخص يقوم بإطلاق 4 رميات متتالية على هدف معين، حيث احتمال الإصابة في كل رمية هو 0,60، ونعتبر أن X متغير عشوائي يمثل عدد مرات الإصابة.

2/ شخص يقوم بإطلاق 3 رميات متتالية على هدفين {A، B}، حيث احتمال الإصابة في كل رمية بالنسبة للهدفين السابقين مرتبين بالترتيب السابق هو 0,70، 0,30، ونعرف المتغير العشوائي Y بأنه عدد الأهداف التي تمت إصابتها.

الحل:

1/ فراغ الحوادث الأولية للمتغير العشوائي X يتمثل في: Ω={0,1, 2, 3, 4}، ويمكن حساب احتمالات مختلف قيم X، كالآتي:

$$p(X=0)=0{,}40\times0{,}40\times0{,}40\times0{,}40=0{,}0256$$

$$p(X=1)=C_4^1\times(0{,}60\times0{,}40\times0{,}40\times0{,}40)=4\times0{,}0384=0{,}1536$$

C_4^1: تمثل عدد مواضع الرمية التي يتم الاصابة فيها (الأولى أو الثانية أو الثالثة أو الرابعة).

$$p(X=2)=C_4^2\times(0{,}60\times0{,}60\times0{,}40\times0{,}40)=6\times0{,}0576=0{,}3456$$

C_4^2: تمثل عدد الامكانيات لمواضع الرميتين التي يتم الاصابة فيها.

$p(X=3)=C_4^3\times(0{,}60\times0{,}60\times0{,}60\times0{,}40)=4\times0{,}0864=0{,}3456$

$p(X=4)=(0{,}60\times0{,}60\times0{,}40\times0{,}60)=0{,}1296$

ويمكن تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي في الجدول الآتي:

X	0	1	2	3	4	Σ
P(X)	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296	1

2/ المتغير العشوائي Y يمثل عدد الأهداف التي يتم اصابتها، ونلاحظ أنه في كل رمية فإن الاصابة أكيدة، سواء اصابة A فقط أو B فقط، وأن كل هدف عند اصابته على الأقل مرة يعتبر أصيب، وبالتالي فإن فراغ الحوادث الأولية للمتغير العشوائي Y يتمثل في: $\Omega=\{1,\ 2\}$، أي يصيب هدف واحد فقط، سواء اصابة A فقط أو B فقط، أو إصابة هدفين، أي A وB معا، ويمكن حساب احتمالات مختلف قيم Y، كالآتي:

$p(Y=1)=(0{,}70\times0{,}70\times0{,}70)+(0{,}30\times0{,}30\times0{,}30)=0{,}37$

$p(Y=2)=C_3^1(0{,}70\times0{,}70\times0{,}30)+C_3^1(0{,}70\times0{,}30\times0{,}30)$

$=3\times0{,}147+3\times0{,}063=0{,}441+0{,}189=0{,}63$

ويمكن تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي في الجدول الآتي:

Y	1	2	Σ
P(Y)	0,37	0,63	1

تمرين 4/

ليكن لدينا التابع الآتي:

$$f(\mathrm{x})=\begin{cases}\frac{1}{9}\mathrm{x}^2, & 0<\mathrm{x}<3\\ 0, & \text{Si nom}\end{cases}$$

1/ أثبت أن التابع $f(\mathrm{x})$ هو تابع كثافة احتمالية؟

2/ أوجد تابع التوزيع $F(\mathrm{x})$، ومثله بيانيا؟

3/ أحسب الاحتمالات الآتية:

$p(X<-2)$، $p(X<0)$، $p(X<1)$، $p(X<3)$، $p(X<5)$، $p(X>2)$، $p(0<X<3)$، $p(1<X<4)$،

$p\left(-3<X<\frac{1}{2}\right)$ ، $p(-4<X<5)$ ، $p\left(X<2/_{X>0}\right)$، $p\left(X<0/_{X>1}\right)$؟

4/ أحسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي x؟

الحل:

1/ حتى يكون التابع $f(\mathrm{x})$ تابع كثافة احتمالية، ينبغي تحقق الشرطين الآتيين:

$\forall x, f(\mathrm{x})\geq 0$ (محقق حسب مختلف مجالات تعريف التابع)

$\forall x, \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{x}).d\mathrm{x} = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{x}).d\mathrm{x} = \int_{-\infty}^{0} f(\mathrm{x}).d\mathrm{x} + \int_{0}^{3} f(\mathrm{x}).d\mathrm{x} + \int_{3}^{+\infty} f(\mathrm{x}).d\mathrm{x}$$

$$= \int_{-\infty}^{0}(0).d\mathrm{x} + \int_{0}^{3}(\frac{1}{9}x^2).d\mathrm{x} + \int_{3}^{+\infty}(0).d\mathrm{x}$$

$$= \left[\frac{1}{27}\mathrm{x}^3\right]_0^3 = \left(\frac{1}{27}\times 27\right) - 0 = 1$$

بما أن الشرطين محققين، إذن فالتابع $f(\mathrm{x})$ هو تابع كثافة احتمالية.

2/ إيجاد تابع التوزيع $F(X)$: $\mathrm{F(X)} = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$

$F(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{x}(0).dt = 0 \ldots\ldots\ldots..\mathrm{X}<0$

$F(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{0}(0).dt + \int_{0}^{\mathrm{x}}(\frac{1}{9}t^2).dt$

$$= \left[\frac{1}{27}t^3\right]_0^x = \frac{1}{27}x^3 - 0 = \frac{1}{27}x^3 \ \ldots\ldots\ldots..0 \le X<3$$

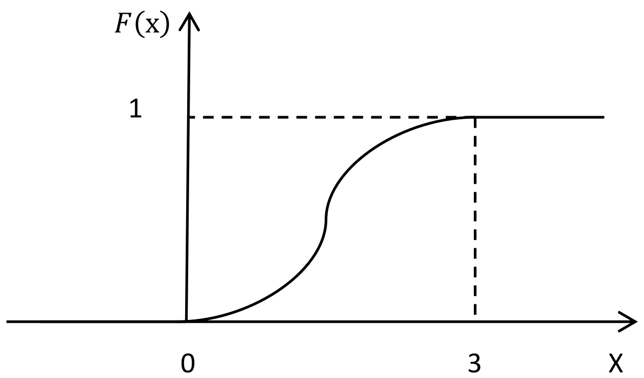
$$F(X) = \int_{-\infty}^{0}(0).dt + \int_{0}^{3}\left(\frac{1}{9}t^2\right).dt + \int_{3}^{x}(0).dt$$

$$= \left[\frac{1}{27}t^3\right]_0^3 = \left(\frac{1}{27}\times 27\right) - 0 = 1 \ \ldots..X\geq 3$$

ويمكن تلخيص تابع التوزيع كالآتي:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & X < 0 \\ \dfrac{1}{27}x^3, & 0 \le X<3 \\ 1, & 3 \le X \end{cases}$$

ويمكن تمثيل تابع التوزيع بيانيا كالآتي:



3/ حساب الاحتمالات الآتية:

$p\ (X<-2) = F(-2) = 0$

$p(X<0) = F(0) = \frac{1}{27}(0)^3 = 0$

$p(X<1) = F(1) = \frac{1}{27}(1)^3 = \frac{1}{27}$

$p(X<3) = F(3) = 1$

$p(X<5) = F(5) = 1$

$$p(X>2) = 1 - p(X<2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{1}{27}(2)^3 = \frac{19}{27}$$

$$p(0<X<3) = \int_0^3 f(x).dx = F(3) - F(0) = 1 - \frac{1}{27}(0)^3 = 1$$

$$p(1<X<4) = \int_1^3 f(\mathrm{x}).\,d\mathrm{x} + \int_3^4 (0).\,d\mathrm{x} = [F(3) - F(1)] + 0$$

$$= [F(3) - F(1)] + 0 \quad = 1 - \frac{1}{27}(1)^3 = \frac{26}{27}$$

$$p\left(-3<X<\frac{1}{2}\right) = p\left(0<\mathrm{x}<\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(\mathrm{x}).\,d\mathrm{x} = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0 = \frac{1}{216}$$

$$p(-4<X<5) = p(0<X<3) = F(3) - F(0) = 1 - 0 = 1$$

$$p(X<1) = p(0<\mathrm{x}<1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{27}(1)^3 - 0 = \frac{1}{27}$$

$$p\left(X<2/_{X>0}\right) = \frac{p[(X<2)\cap(X>0)]}{p(X>0)} = \frac{p(0<X<2)}{p(X>0)} = \frac{F(2)-F(0)}{1-p(X<0)} = \frac{\frac{1}{27}(2)^3-0}{1-F(0)} = \frac{8}{27}$$

$$p\left(X<0/_{X>1}\right) = \frac{p[(X<0)\cap(X>1)]}{p(X>1)} = \frac{p(\phi)}{p(X>1)} = 0$$

4/ حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}.f(\mathrm{x}).\,d\mathrm{x} = \int_0^3 \mathrm{x}.f(\mathrm{x}).\,d\mathrm{x} = \int_0^3 \mathrm{x}.\left(\frac{1}{9}\mathrm{x}^2\right).\,d\mathrm{x} = \int_0^3 \frac{1}{9}\mathrm{x}^3.\,d\mathrm{x}$$

$$= \left[\frac{1}{36}\mathrm{x}^4\right]_0^3 = \left(\frac{1}{36}3^4 - 0\right) = \frac{81}{36} = 2{,}25$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}^2.f(\mathrm{x}).\,d\mathrm{x} = \int_0^3 \mathrm{x}^2.\left(\frac{1}{9}\mathrm{x}^2\right).\,d\mathrm{x} = \int_0^3 \frac{1}{9}\mathrm{x}^4.\,d\mathrm{x}$$

$$= \left[\frac{1}{45}\mathrm{x}^5\right]_0^3 = \left(\frac{1}{45}3^5 - 0\right) = \frac{243}{45} = 5{,}4$$

$$V(X) = 5{,}4 - (2{,}25)^2 = 0{,}3375$$

$$S_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}3375} \approx 0{,}5809$$

التمرين 5/

ليكن لدينا تابع الكثافة الاحتمالية الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 2X \ldots\ldots \frac{1}{2} \leq X < 1 \\ \frac{a}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \leq X < e \\ 0 \ldots\ldots \text{Si nom} \end{cases}$$

1/ أوجد قيمة الثابت a؟

2/ أحسب الاحتمالات الآتية: $p\left(X<\frac{3}{4}\right), p\left(X\geq\frac{3}{4}\right), p\left(X\leq\frac{3}{4}\right), p(x<2),\ p\left(\frac{3}{4}\leq X<2\right)$

$p\left[(X<4)\cap(X<\frac{3}{4})\right],\ p\left[(X<\frac{3}{4})\cup(X\geq 2)\right]$

3/ أوجد تابع التوزيع؟

الحل:

1/ بما أن التابع $f(x)$ هو تابع كثافة احتمالية، إذن ينبغي أن يتحقق الشرطين الآتيين:

الشرط الاول: $\forall x, f(x)\geq 0$، محقق حسب المجال الأول والثالث لتعريف التابع، وحتى يكون محقق في المجال الثاني للتعريف، فينبغي أن يكون: $a\geq 0$.

الشرط الثاني: $\forall x, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x).dx + \int_{0}^{1} f(x).dx + \int_{1}^{e} f(x).dx + \int_{e}^{+\infty} f(x).dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} (0).dx + \int_{0}^{1} (2x).dx + \int_{1}^{e} (\frac{a}{x}).dx + \int_{e}^{+\infty} (0).dx = 1$$

$$\Rightarrow [x^2]_{\frac{1}{2}}^{1} + [a\ln(x)]_1^e = 1$$

$$\Rightarrow \left[(1^2) - (\frac{1}{2})^2\right] + [a\ln(e) - a\ln 1] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} + a - 0 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

ومنه تصبح صيغة تابع الكثافة كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \frac{1}{2} \leq X < 1 \\ \frac{1}{4X}, & 1 \leq X < e \\ 0, & Si\ nom \end{cases}$$

2/ حساب*:

$$\boldsymbol{p}\left(X<\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}} f(x).dx = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} (0).dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (2x).dx$$

$$= [x^2]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = (\frac{3}{4})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

$$\boldsymbol{p}\left(X\geq\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right) = \int_{\frac{3}{4}}^{1} f(x).dx + \int_{1}^{e} f(x).dx + \int_{e}^{+\infty} (0).dx$$

$$= \int_{\frac{3}{4}}^{1} (2x).dx + \int_{1}^{e} (\frac{1}{4x}).dx = [x^2]_{\frac{3}{4}}^{1} + \left[\frac{1}{4}\ln(x)\right]_1^e$$

$$= \left[1^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{4}\ln(e) - \frac{1}{4}\ln(1)\right] = \frac{8}{16} + \frac{1}{4} = \frac{11}{16} = 0{,}6875$$

أو بطريقة ثانية، يمكن الاستنتاج كالآتي: $\boldsymbol{p}\left(X\geq\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right) = 1 - \left(x<\frac{3}{4}\right) = 1 - 0{,}3125 = 0{,}6875$

$$\boldsymbol{p}\left(X \leq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right) = p\left(x<\frac{3}{4}\right) = 0{,}3125$$

وهذا لأنه في حالة المتغير المستمر، يكون الاحتمال عند قيمة (نقطة) معينة يساوي الصفر.

$$\boldsymbol{p}(X<\mathbf{2}) = \int_{-\infty}^{2} f(x).dx = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} (0).dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x).dx + \int_{1}^{2} f(x).dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x).dx + \int_{1}^{2} (\frac{1}{4x}).dx = [x^2]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{1}{4}\ln(x)\right]_1^2$$

$$= \left[1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{4}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(1)\right] = \frac{3}{4} - \frac{\ln(2)}{4} \approx 0{,}5767$$

$$\boldsymbol{p}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \leq X<\mathbf{2}\right) = p(x<2) - p\left(x<\frac{3}{4}\right) = 0{,}5767 - 0{,}3125 = 0{,}2642$$

$$\boldsymbol{p}\left[(X<\mathbf{4})\cap(X<\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}})\right] = p\left(X<\frac{3}{4}\right) = 0{,}3125$$

* نشير إلى أنه لو تم حساب تابع التوزيع قبل هذا السؤال، فإن حساب مختلف الاحتمالات يكون بطريقة مختصرة باستخدام تابع التوزيع(مثل التمرين السابق)، وبدون الحاجة إلى حساب التكاملات.

$$\boldsymbol{p}\left[(X<\tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}})\cup(X\geq\mathbf{2})\right]=p\left(X<\frac{3}{4}\right)+p(X\geq 2)=p\left(X<\frac{3}{4}\right)+1-p(X<2)$$

$$=0,3125+1-0,5767=0,7358$$

3/ إيجاد تابع التوزيع $F(X)$: $\quad F(X)=\int_{-\infty}^{x}f(t).dt$

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x}(0).dt=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X<\frac{1}{2}$$

$$F(X)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}(0).dt+\int_{\frac{1}{2}}^{x}(2t).dt=[t^2]_{\frac{1}{2}}^{x}=x^2-\frac{1}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}\leq X<1$$

$$F(X)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}(0).dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t).dt+\int_{1}^{x}\left(\frac{1}{4t}\right).dt=[t^2]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[\frac{1}{4}\ln(t)\right]_{1}^{x}$$

$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\ln(x)-\frac{1}{4}\ln(1)\right)=\frac{1}{4}\ln(x)+\frac{3}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1\leq X<e$$

$$F(X)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}(0).dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t).dt+\int_{1}^{e}\left(\frac{1}{4t}\right).dt+\int_{e}^{x}(0).dt=[t^2]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[\frac{1}{4}\ln(t)\right]_{1}^{e}$$

$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\ln(e)-\frac{1}{4}\ln(1)\right)=1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots e\leq X$$

ويمكن تلخيص تابع التوزيع كالآتي:

$$F(X)=\begin{cases}0\ \ldots\ldots\ldots\ldots X<\dfrac{1}{2}\\ x^2-\dfrac{1}{4}\ldots\ldots\ldots\dfrac{1}{2}\leq X<1\\ \dfrac{1}{4}\ln(x)+\dfrac{3}{4}\ldots\ldots\ 1\leq X<e\\ 1\ \ldots\ldots\ldots\ldots e\leq X\end{cases}$$

الفصل السادس:

التوزيعات الاحتمالية

1- ملخص:

- **التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:**
  - التوزيع ثنائي الحد (ذي الحدين).
  - توزيع بواسون.
- **التوزيعات الاحتمالية المستمرة (التوزيع الطبيعي).**
- **تقريب التوزيعات الاحتمالية:**
  - تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي.
  - تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي.
  - تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون.
- **تصحيح الاستمرارية عند الانتقال من توزيع متقطع إلى مستمر.**

2- تمارين محلولة.

1. ملخص:

1.1. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:

وهي التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات العشوائية المتقطعة، وكما تم التطرق إليه سابقا، فإن قانون التوزيع الاحتمالي، هو القانون الذي يرفق بكل قيمة للمتغير العشوائي باحتمال معين، وتطرقنا سابقا لهذا القانون في الحالة العامة، أما في هذا الجزء سيتم التطرق إلى بعض التوزيعات الاحتمالية التي تتبع قانون* معين يمكن صياغته بصيغة ما، وهناك الكثير من التوزيعات في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة، وسيتم التطرق إلى أهمها، والتي يتم تدريسها في الغالب في مستوى الطلبة الموجهة إليهم هذه المطبوعة، حيث سيتم التطرق إلى كل من التوزيع الثنائي الحد (ذي الحدين)، وتوزيع بواسون**.

أ/ التوزيع ثنائي الحد (ذي الحدين):

في حالة إذا كانت عندنا تجربة احتمالية مكررة (متتالية) n مرة (n محاولة)، حيث هذه المحاولات مستقلة، وتتضمن هذه التجربة حدثين (نتيجتين) متكاملين (معناه متنافيين ومجموع احتماليهما يساوي 1)، واحتمال كل حدث يكون ثابت عند تكرار التجربة، فإذا تم تعريف متغير عشوائي X بأنه عدد مرات ظهور حدث معين من هاذين الحدثين، فإن هذا الحدث نرمز لاحتمال وقوعه بـ p، وأما الحدث الآخر الذي لا يعبر عن المتغير العشوائي فنرمز لاحتمال وقوعه بـ q، وبما أن الحدثين متكاملين ($p+q=1$) فإن $q=1-p$، في هذه الحالة وبهذه الشروط فإن التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة المكررة يتبع توزيع احتمالي يسمى بالتوزيع ثنائي الحد (بينوميال)، والقانون العام لهذا التوزيع يكون من الشكل:

$$X \leadsto B(n;p):$$

$$p(X=x_i)=C_n^{x_i}\times p^{x_i}\times q^{n-x_i}\quad ;x_i\in\mathbb{N};q=1-p$$

ويمكن ذكر بعض الحقائق والملاحظات المرتبطة بهذا التوزيع كالآتي:

- ✓ الأمل (التوقع) الرياضي: $E(X)=np$ التباين: $V(X)=npq$

---

* كما أشرنا سابقا، فإنه في حالة إذا كانت التجربة الاحتمالية مكررة عدد صغير من المرات، فإنه يمكن الحل بدون الحاجة إلى قانون توزيع احتمالي معين، كالحل باستخدام بشجرة الاحتمال مثلا.

** في الكثير من التمارين قد لا يتم ذكر أي توزيع ينبغي استخدامه، لكن معطيات التمرين وطبيعة التجربة الاحتمالية قد تكشف ذلك، وهذا سواء في حالة التوزيعات الاحتمالية المستمرة أو المتقطعة.

- ✓ إذا كان $p=q=0,5$ يكون توزيع ذي الحدين متماثل، وإذا كان $p<0,5$ يكون التوزيع ملتوي نحو اليمين، وإذا كان $p>0,5$ يكون التوزيع ملتوي نحو اليسار.
- ✓ في حالة ما إذا كانت التجربة غير مكررة؛ أي $n=1$، فهنا نكون بصدد حالة خاصة وبسيطة جدا من قانون ثنائي الحد، ويسمى قانون بارنولي: $p(X=x_i)=p^{x_i}\times q^{1-x_i}\ \ ; x_i\in\{0,1\}$،ويكون عندنا حالتين: $p(X=1)=p \qquad p(X=0)=q$

ب/ توزيع بواسون:

سمي بهذا الاسم نسبة إلى الفيزيائي والرياضي (Siméon-Denis Poisson)، ويتم استخدام هذا التوزيع لمعرفة احتمال وقوع حادث معين عدد محدد من المرات في وحدة من الزمن، بحيث يكون متوسط عدد مرات وقوع هذا الحدث ثابت في هذه الوحدة من الزمن، وتكون مرات وقوع هذا الحدث مستقلة عن بعضها البعض، مثل: عدد المكالمات الهاتفية خلال الشهر، عدد حوادث المرور خلال السنة،...الخ، وتكون صيغة قانون توزيع بواسون كالآتي:

$$X \leadsto \rho(\lambda):\ p(X=x)=\frac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!}\ \ ; x\in\mathbb{N};\ \lambda\in\mathbb{R}^{*+}$$

حيث أن:

x: العدد المحدد من المرات من الحدث الذي نريد حساب احتمال وقوعه.

$p(X=x)$، احتمال العدد x، من الحدث المعني.

λ: متوسط عدد مرات وقوع الحدث المعني في وحدة من الزمن.

e: أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي، ويساوي (2,71828.....).

وضمن هذا التوزيع يكون الأمل الرياضي مساوي للتباين: $E(X)=V(X)=\lambda$

في التجارب الاحتمالية التي تتبع توزيع بواسون، فإن معرفة متوسط (λ) عدد مرات وقوع حدث معين في فترة زمنية ما، وإذا كان هذا المتوسط ثابت مستقبليا، ومختلف مرات هذا الحدث مستقلة عن بعضها، فإن ذلك كافي لحساب احتمال وقع عدد محدد من هذا الحدث مستقبلا في نفس الفترة الزمنية.

2.1. التوزيعات الاحتمالية المستمرة (التوزيع الطبيعي):

وهي التوزيعات الاحتمالية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية المستمرة، وهناك العديد من التوزيعات المستمرة، مثل: التوزيع المنتظم المستمر والتوزيع الأسي، ويعتبر **التوزيع الطبيعي** أهم هذه التوزيعات، وذلك لأن أغلب الظواهر تتبع التوزيع الطبيعي، مثل: الوزن، الطول،...الخ، كما أن الكثير من التوزيعات الأخرى يمكن تقريبها للتوزيع الطبيعي، وهو جرسي الشكل متماثل حول الوسط الحسابي، ويمتد إلى ما لا نهاية اتجاه الجانبين؛ أي أن أغلب المساحة تكون متمركزة حول الوسط الحسابي.

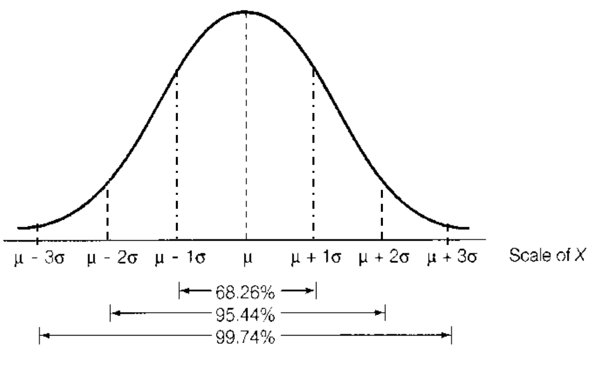
وذلك لأن من خصائص التوزيع المتماثل هو أن قيمة المنوال (Mo)* تكون مقابلة لذروة المنحنى، وتكون نفسها قيمة المتوسط الحسابي، أي أن قيمة الوسط الحسابي هي التي تكون مكررة أكثر من باقي قيم المتغير العشوائي، فمثلا لو افترضنا أن المتغير العشوائي يمثل أطوال الأسماك في حوض معين، فإن الأسماك التي طولها يساوي الوسط الحسابي هي المكررة أكثر ومتواجدة أكثر في الحوض، والقانون الخاص بهذا التوزيع هو عبارة عن دالة(تابع) الكثافة الاحتمالية، وصياغته كالآتي:

$$X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2):\ f(X=x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ ;x\in\mathbb{R};\mu\in\mathbb{R};\sigma\in\mathbb{R}^{*+}$$

حيث: $\pi=\frac{22}{7}$، μ: الوسط الحسابي، σ^2 التباين

ويتم حساب كل من الأمل الرياضي والتباين، كالآتي: $E(X)=\mu\ ;\quad V(X)=\sigma^2$

والتمثيل البياني للتوزيع الطبيعي، يكون متماثل (متناظر) ويأخذ شكل جرس، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:



* Mo هو من مقاييس النزعة المركزية، ويتم دراسته في مادة الاحصاء الوصفي.

ومن خصائص هذا التوزيع هو أنه عند اسقاط خطين على بعد انحراف معيارى واحد إلى يمين ويسار متوسط التوزيع فإن المساحة التى يحصرها هذين الخطين تمثل 68.26% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى، كذلك نجد أن المساحة التى يحصرها الخطان عند 2 انحراف معيارى على جانبى متوسط التوزيع تمثل 95.44% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى، أما المساحة التى يحصرها الخطان عند 3 انحرافات معيارية على جانبى متوسط التوزيع فتمثل 99.74% تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى، أي أن:

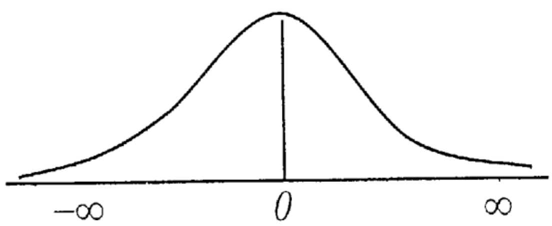
$$p\,(\mu - 1\sigma < X < \mu + 1\,\sigma) = 0{,}6826$$

$$p\,(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\,\sigma) = 0{,}9544$$

$$p\,(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\,\sigma) = 0{,}9974$$

ولصعوبة حساب التكامل من أجل إيجاد الاحتمال في حالة التوزيع الطبيعي، فإنه يتم تحويل التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)، حيث مهما كان المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي، فإنه يتم تحويله إلى متغير عشوائي آخر نسميه Z، يتبع التوزيع الطبيعي القياسي، حيث وسطه الحسابي يساوي 0، وتباينه يساوي 1، وتتم عملية التحويل من خلال القانون الآتي: $Z = (\frac{x-\mu}{\sigma})$

حيث إذا كان عندنا $X \sim (\mu\,;\,\sigma^2)$ فإنه يصبح عندنا: $Z \sim N(0\,;\,1)$، ويكون شكل التوزيع الطبيعي المعياري، كالآتي:



ونشير إلى أنه في الحالة العامة يكون: $p(-\infty < Z < 0) = p(0 < Z < +\infty) = 0{,}5$

$$p(-\infty < Z < +\infty) = 1$$

والتوزيع الطبيعي المعياري له جداول خاصة تسهل حساب الاحتمالات بصيغة معينة فقط، حيث سيتم استخدام الجدول الذي يُمكِّن من حساب الاحتمال بصيغة $p(0 < Z < z)$ (أنظر الملاحق)، ومن خلال

استخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، يمكن حساب مختلف الاحتمالات، ويمكن توضيح ذلك من خلال الأمثلة الآتية:

أ/ عندما يكون الاحتمال المطلوب حسابه مصاغ بالشكل $p(0 < Z < z)$:

فمثلا عندما نريد حساب $\boldsymbol{p(0 < Z < 1,24)}$، نقوم بتجزئة هذا العدد إلى العدد 1,2 والعدد 0,04، ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري، وبملاحظة العمود 1 نلاحظ أن العدد 1,2 يقع في الخانة 14، وبملاحظة السطر 1 نجد أن العدد 0,04 يقع في الخانة 6، وبتقاطع السطر 14، والعمود 6، نجد العدد 0,3925، وهو يمثل الاحتمال المطلوب؛ أي: $p(0 < Z < 1,24) = 0,3925$، ونفس الطريقة يتم استخدامها في حساب الاحتمالات المشابهة.

كذلك على سبيل المثال لحساب $\boldsymbol{p(0 < Z < 1,12)}$، فبنفس الطريقة السابقة نجد أن الاحتمال المطلوب يقع في الخانة الناتجة عن تقاطع السطر 13 الموافق للعدد 1,1، والعمود 4 الموافق للعدد 0,02، إذن:

$$p(0 < Z < 1,12)$$

ب/ عندما يكون الاحتمال المطلوب مصاغ بأشكال أخرى يتم تحويله إلى الصيغة $p(0 < Z < z)$، ثم نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب الاحتمال، ويمكن ذكر الأمثلة الآتية:

$$\boldsymbol{p(Z < 2,61)} = p(-\infty < Z < 0) + p(0 < Z < 2,61) = 0,5 + 0,4955 = 0,9955$$

حيث: $p(0 < Z < 2,61) = 0,4955$، يتم استخراجها من الجدول.

$$\boldsymbol{p(Z > 0,43)} = p(-\infty < Z < +\infty) - p(Z < 0,43) = 1 - [\, p(-\infty < Z < 0) + p(0 < Z < 0,43)]$$
$$= 1 - (0,5 + 0,1664) = 0,3336$$

$$\boldsymbol{p(Z < -1,5)} = p(Z > 1,5) = 1 - p(Z < 1,5) = 1 - (0,5 + 0,4332) = 0,0668$$

$$\boldsymbol{p(1,6 < Z < 2,1)} = p(0 < Z < 2,1) - p(0 < Z < 1,6) = 0,4821 + 0,4452 = 0,9273$$

$$\boldsymbol{p(-0,5 < Z < 3)} = p(-0,5 < Z < 0) + p(0 < Z < 3) = p(0 < Z < 0,5) + p(0 < Z < 3)$$
$$= 0,1915 + 0,4987 = 0,6902$$

$$\boldsymbol{p(-1,6 < Z < 1,6)} = p(-1,6 < Z < 0) + p(0 < Z < 1,6) = p(0 < Z < 1,6) + p(0 < Z < 1,6)$$
$$= 2p(0 < x < 1,6) = 2 \times 0,4452 = 0,8904$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نلاحظ أنه لما $a \geq 3{,}62$، فإن: $p(0<Z<a) = 0{,}9999$، فمثلا:

$$p(0<Z<3{,}62) = p(0<Z<3{,}7) = p(0<Z<4) = p(0<Z<7{,}2) = \cdots = 0{,}9999$$

ونشير إلى أن الاحتمال عند قيمة معينة يساوي صفر، وبالتالي ينتج عن ذلك، أنه من أجل كل عددين حقيقيين a، b، فإن: $p(a \leq X \leq a) = p(a<X \leq a) = p(a \leq X<a) = p(a<X<a)$

3.1. تقريب التوزيعات الاحتمالية:

أ- تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي:

يمكن تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي، وذلك لأنه إذا تحققت مجموعة من الشروط في التجربة الاحتمالية التي تتبع توزيع ذي الحدين، فإنه عند استخدام قانون ذي الحدين تكون العمليات الحسابية صعبة جدا في الغالب، وفي نفس الوقت فإن استخدام قانون التوزيع الطبيعي في هذه الشروط يعطي نتائج مشابهة وقريبة جدا من قانون ذي الحدين، لذلك يتم استخدام قانون التوزيع الطبيعي، وذلك عندما تكون n كبيرة، و p تقترب من 0,5، وكقاعدة فعموما يعتبر التقريب ملائم إذا توفرت الشروط الآتية*: $n \geq 30$، $np \geq 5$، $n(1-p) \geq 5$، حيث يكون: $\mu = E(X) = np$ $\sigma^2 = V(X) = npq$

مثال: نفرض أنه عندنا تجربة احتمالية مكررة تتمثل في رمي قطعة نقود 33 مرة، حيث احتمال أن يظهر وجه في كل تجربة هو 0,6، واحتمال الظهر هو 0,4، وأن X هو متغير عشوائي يمثل عدد الأوجه التي يمكن أن تظهر، ونريد حساب احتمال أن يظهر الوجه أكثر من 14 مرة.

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية المكررة تتبع قانون ثنائي الحد، لكن عند استخدامه فإن القيام بالعمليات الحسابية تكون صعبة جدا: $p(X>14) = p(15) + p(16) + \cdots + p(33)$

$$= C_{33}^{14} \times (0{,}6)^{14} \times (0{,}4)^{19} + \cdots$$

نلاحظ أنه يصعب القيام بالعمليات الحسابية لحساب هذا الاحتمال، لذلك يتم استخدام قانون التوزيع الطبيعي كتقريب لقانون ثنائي الحد، لأن شروط التقريب متوفرة، حيث:

* في بعض المراجع قد يتم صياغة هذه الشروط بكيفيات أخرى، والمهم هو مراعاة أنه كلما تحققت الشروط أكثر كلما كان التقريب أصح وأدق.

$n{=}33{\geq}30$ ، $np{=}\ 33{\times}0{,}6\ {=}\ 19{,}8{\geq}5$ ، $nq{=}33{\times}0{,}4\ {=}\ 13{,}2{\geq}5$

وعند استخدام التوزيع الطبيعي، بحيث: $\mu = np = 19{,}8$ $\sigma^2 = npq = 7{,}92$، وعند القيام بتصحيح الاستمرارية (أنظر معنى تصحيح الاستمرارية في الأسفل)، يصبح الاحتمال المطلوب هو $p(X{>}14{,}5)$، ويتم حسابه كالآتي:

$$\begin{aligned}p(X{>}14{,}5) &= p\left(Z{>}\frac{14{,}5-19{,}8}{\sqrt{7{,}92}}\right)\\ &= p(Z{>}-1{,}88)\\ &= p(-1{,}88{<}Z{<}0)+p(0{<}Z{<}+\infty)\\ &= p(0{<}Z{<}1{,}88)+p(0{<}Z{<}+\infty)=0{,}4699+0{,}5=0{,}9699\end{aligned}$$

ب-**تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي**: يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، وهذا إذا كان: $\lambda{\geq}10$، حيث يكون: $\sigma^2 = \mu = \lambda$

ت- **تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون**: يمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ثنائي الحد، ويعتبر كتقريب جيد عندما تكون قيمة p صغيرة جدا، وn كبيرة جدا، بحيث يكون: $n{\geq}30$، $np{\leq}5$.

ث- **تصحيح الاستمرارية عند الانتقال من توزيع متقطع إلى مستمر**:

نشير إلى أنه بصفة عامة عند تقريب توزيع احتمالي متقطع إلى توزيع احتمالي مستمر فإنه ينبغي القيام **بتصحيح الاستمرارية***، وذلك لأنه سيتم الانتقال من متغيرة عشوائية متقطعة إلى متغيرة عشوائية مستمرة، لذلك يتم تحويل كل قيمة للمتغير العشوائي إلى مجال، لأن في التوزيع المستمر يكون احتمال قيمة معينة هو الصفر، وتتم عملية التحويل بحيث نزيل التقطع والانفصال بين القيم (أعداد طبيعية)، ويكون ذلك بإضافة 0,5 وإنقاص 0,5 لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي المتقطع، فنفرض مثلا أن قيم المتغير العشوائي المتقطع، هي {1، 2 ، 3}، فتصبح مجالات المتغير العشوائي المستمر هي {0,5-1,5 ، 1,5-2,5 – 2,5-3,5}، وبالتالي نلاحظ أنه أصبحت هناك استمرارية، أي أنه في الحالة العامة عندما يكون المتغير العشوائي يساوي قيمة a، فإنه يتم استبدال هذه القيمة بالمجال: $[(a-0{,}5)-(a+0{,}5)]$

إذن ففي التوزيعات التي تم دراستها، فإنه عند تقريب توزيع ثنائي الحد أو توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي، فإنه ينبغي القيام بتصحيح الاستمرارية، والتي تتضمن إضافة أو إنقاص 0,5، على حسب الحالة، ففي الحالة

* بعض المراجع قد يغفل عن فكرة تصحيح الاستمرارية ولا يأخذ بها.

العامة يكون ذلك كالآتي: $\boldsymbol{p(X=a)} = p(a-0,5 \le X \le a+0,5)$

$$\boldsymbol{p(X<a)} = p(X<[(a-0,5)-(a+0,5)]) = p(X<a-0,5)$$

$$\boldsymbol{p(X \le a)} = p(X \le [(a-0,5)-(a+0,5)]) = p(X \le a+0,5)$$

$$\boldsymbol{p(X>a)} = p(X>[(a-0,5)-(a+0,5)]) = p(X>a+0,5)$$

$$\boldsymbol{p(X\ge a)} = p(X\ge[(a-0,5)-(a+0,5)]) = p(X\ge a-0,5)$$

$$\boldsymbol{p(a<X<b)} = p([(a-0,5)-(a+0,5)]<X<[(b-0,5)-(b+0,5)])$$

$$= p(a+0.5<X<b-0,5)$$

$$\boldsymbol{p(a \le X \le b)} = p([(a-0,5)-(a+0,5)] \le X \le [(b-0,5)-(b+0,5)])$$

$$= p(a-0.5 \le X \le b+0,5)$$

$$\boldsymbol{p(a<X \le b)} = p([(a-0,5)-(a+0,5)]<X \le [(b-0,5)-(b+0,5)])$$

$$= p(a+0.5<X \le b+0,5)$$

$$\boldsymbol{p(a \le X<b)} = p([(a-0,5)-(a+0,5)] \le X<[(b-0,5)-(b+0,5)])$$

$$= p(a-0.5 \le X<b-0,5)$$

وكما تم الإشارة إليه سابقا، فإننا نذكر مرة أخرى، أنه في حالة عندنا تجربة تتبع توزيع مستمر في الأصل، أو تتبع توزيع متقطع وقمنا بتقريبها لتوزيع مستمر، فإنه يكون عندنا احتمال مجال فقط، ولا يكون عندنا احتمال قيمة معينة، لأن الاحتمال عند قيمة معينة يساوي صفر، أي: $p(X=a)=0$، وبالتالي ينتج عن هذا في الحالة العامة عند التوزيع المستمر يكون: $p(a \le X \le b) = p(a<X \le b) = p(a \le X<b) = p(a<X<b)$

أي أنه في حالة التوزيعات المستمرة (مثل التوزيع الطبيعي)، فإنه عند حساب الاحتمال في مجال معين، فإنه لا يهم أن يكون مغلق أو مفتوح من أحد الطرفين أو كلاهما، لأن النتيجة ستكون نفسها.

2. تمارين محلولة.

تمرين 1/

نقوم برمي قطعة نقود 5 مرات، حيث احتمال أن يظهر وجه هو 0,65، نفرض أن x هو متغير عشوائي يمثل عدد الأوجه التي تظهر، فما احتمال أن يظهر:

1/ وجه 3 مرات؟

2/ وجه في جميع الرميات؟

3/ ظهر 4 مرات؟

4/ وجهين على الأكثر؟

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع توزيع ذو الحدين، وذلك لأنها تتضمن تجارب متتالية مستقلة عن بعضها، وكل تجربة تتضمن حدثين (نتيجتين) فقط (وجه أو ظهر)، وبما أن المتغير العشوائي x يمثل عدد الأوجه، إذن نرمز لاحتمال نتيجة وجه بـ p، ولاحتمال نتيجة ظهر بـ q، حيث: q=1-p، ولدينا: p=0,65، q=1-0,65 = 0,35.

1/ احتمال ظهور وجه 3 مرات هو: $p(X=3)=C_5^3\times(0,65)^3\times(0,35)^2\approx 0,3364$

2/ احتمال ظهور وجه في جميع الرميات هو: $p(X=5)=C_5^5\times(0,65)^5\times(0,35)^0\approx 0,1160$

3/ ظهور ظهر 4 مرات، معناه ظهور وجه واحد، واحتمال ذلك هو:

$$p(X=1)=C_5^1\times(0,65)^1\times(0,35)^4\approx 0,0488$$

4/ احتمال ظهور وجهين على الأكثر هو:

$$p(X\leq 2)=p(x=0)+p(X=1)+p(X=2)$$

$= C_5^0 \times (0,65)^0 \times (0,35)^5 + C_5^1 \times (0,65)^1 \times (0,35)^4 + C_5^2 \times (0,65)^2 \times (0,35)^3 \approx 02352$

تمرين 2/

في تخصص معين في جامعة ما، وحسب التجربة في سنوات سابقة، فإن متوسط عدد الطلبة الذين يمكن أن ينجحوا في سنة معينة هو 7 طلبة، فما احتمال أن ينجح في السنة القادمة:

1/ 5 طلبة؟

2/ 8 طلبة؟

3/ 7 طلبة؟

4/ طالبين على الأقل؟

5/ أقل من 3 طلبة؟

6/ طالبين فأقل؟

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع توزيع **بواسون،** حيث المتغير العشوائي يمثل عدد النجاحات، ونرمز له بـ X، ومتوسط عدد النجاحات هو: $\lambda = 7$.

1/ احتمال أن ينجح 5 طلبة: $p(X = 5) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{7^5 e^{-7}}{5!} \approx \frac{15,3260}{120} \approx 0,1277$

2/ احتمال أن ينجح 8 طلبة: $p(X = 8) = \frac{7^8 e^{-7}}{8!} \approx \frac{5256,8181}{40320} \approx 0,1304$

3/ احتمال أن ينجح 7 طلبة: $p(X = 7) = \frac{7^7 e^{-7}}{7!} \approx \frac{750,9740}{5040} \approx 0,1490$

4/ احتمال أن ينجح طالبين على الأقل: $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2)$

$$= 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)]$$

$$= 1 - \left(\frac{7^0 e^{-7}}{0!} + \frac{7^1 e^{-7}}{1!}\right) = 1 - (8e^{-7}) \approx 1 - 0,00729 \approx 0,9927$$

5/ احتمال أن ينجح أقل من 3 طلبة: $p(X<3) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$$= \frac{7^0 e^{-7}}{0!} + \frac{7^1 e^{-7}}{1!} + \frac{7^2 e^{-7}}{2!} = (1+7+49)e^{-7} = 57.e^{-7} \approx 0{,}05198$$

6/ احتمال أن ينجح طالبين فأقل: $p(X \leq 2) = p(X<3) \approx 0{,}05198$

تمرين 3/

في أحد البنوك، وحسب الخبرة والتجربة الواقعية في الماضي، فإنه يستلم في المتوسط 5 شيكات بدون رصيد في اليوم، فما احتمال أن يستلم:

1/ 6 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي؟

2/ على الأقل 4 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي؟

3/ 10 شيكات بدون رصيد في الأسبوع الموالي؟

4/ على الأكثر شيكين بدون رصيد في الأسبوع الموالي؟

الحل:

1/احتمال أن يستلم 6 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع توزيع **بواسون،** حيث المتغير العشوائي يمثل عدد الشيكات بدون رصيد في اليوم، ونرمز له بـ X، و$\lambda = 5$، هو متوسط عدد الشيكات بدون رصيد في اليوم، وبالتالي الاحتمال المطلوب، هو: $p(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

$$\Rightarrow p(X=6) = \frac{5^6 e^{-5}}{6!} \approx \frac{105{,}280}{720} \approx 0{,}1462$$

2/ احتمال أن يستلم على الأقل 4 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي، هو:

$$\Rightarrow p(X \geq 4) = 1 - p(X<4) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2) + p(3)]$$

$$= 1 - \left[\frac{5^0 e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!} + \frac{5^3 e^{-5}}{3!}\right]$$

$$= 1 - (1 + 5 + 12{,}5 + 20{,}833) \times e^{-5} \approx 0{,}7349$$

3/ احتمال أن يستلم 10 شيكات بدون رصيد في الأسبوع الموالي: متوسط عدد الشيكات بدون رصيد في الأسبوع، هو: $\lambda_2 = \lambda \times 5 = 5 \times 7 = 35$، ونرمز للمتغير العشوائي الممثل لعدد الشيكات في الأسبوع بـ Y، وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$p(Y = y) = \frac{\lambda_2^y e^{-\lambda_2}}{y!}$$

$$\Rightarrow p(Y = 10) = \frac{35^{10} e^{-35}}{10!} = 0{,}7601817002 \times e^{-44}$$

4/ احتمال أن يستلم على الأكثر شيكين بدون رصيد في الأسبوع الموالي، هو:

$$p(Y \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{35^0 e^{-35}}{0!} + \frac{35^1 e^{-35}}{1!} + \frac{35^2 e^{-35}}{2!}$$

$$= [1 + 35 + 612{,}5] \times e^{-35} = 0{,}6485 \times e^{-38}$$

تمرين4/

متوسط طول الأسماك في نهر معين هو 10سم، بانحراف معين يقدر بـ 2سم، وبافتراض أن طول السمكة يخضع للتوزيع الطبيعي.

أ/ إذا كان شخص معين يريد أن يصطاد، فما احتمال أن يصطاد سمكة طولها:

1/ أقل من 11 سم؟

2/ أقل من 10سم؟

3/ أقل من 6 سم؟

4/ أقل من 20سم؟

5/ أكبر من 8,5سم؟

6/ طولها أكبر من 9سم، وأقل من 12سم؟

7/ أقل من 7سم، أو أكبر من 11سم؟

ب/ تم اصطياد سمكة، احتمال اصطيادها هو 0,2580.

1- إذا كان طولها يقع في المجال $a < X < 10$، فأوجد قيمة a؟

2- إذا كان طولها يقع في المجال $10 < X < b$، فاستنتج قيمة b؟

<u>الحل:</u>

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(\mathrm{x}-\mu)^2}{\sigma^2})} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(\mathrm{x}-10)^2}{4})}$$

نذكر مرة أخرى أن $f(\mathrm{x})$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية، ولحساب احتمال معين ينبغي حساب **تكامل** هذه الدالة وليس التعويض مباشرة، لذلك ينتج عن ذلك أن احتمال عن قيمة معينة يساوي صفر، لأن تكامل هذه الدالة (المساحة)، عن قيمة (نقطة) يساوي صفر (مساحة معدومة)، لذلك لو طلب منا حساب احتمال اصطياد سمكة طولها 10سم، فاحتمال ذلك يساوي صفر، وأما لو عوضنا القيمة 10 في دالة الكثافة الاحتمالية سنجد قيمة، لا تعتبر احتمال أصلا، وإنما هندسيا تمثل طول الخط العمودي إذا قمنا برسم خط عمودي بين النقطة (10) على خط الفواصل، وحتى منحنى التوزيع الطبيعي لدالة الكثافة.

لذلك في التوزيع الطبيعي يتم حساب احتمال مجال معين، وبما أن حساب التكامل يكون صعب جدا، فإنه يتم تحويل التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري، ثم الاستعانة بالجداول المخصصة لذلك، بدون الحاجة إلى حساب التكامل.

أ-1/ احتمال اصطياد سمكة طولها أقل من 11سم:

$$p(X<11) = p\left(Z<\frac{11-10}{2}\right) = p\left(Z<\frac{1}{2}\right) = p(-\infty<Z<0) + p\left(0<Z<\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0,5 + 0,1915 = 0,6915$$

أ-2/ احتمال اصطياد سمكة طولها أقل من 10سم:

$$p(\mathrm{X}<10) = p\left(Z<\frac{10-10}{2}\right) = p\left(Z<\frac{0}{2}\right) = p(Z<0) = p(-\infty<Z<0) = 0{,}5$$

أ-3/ احتمال اصطياد سمكة طولها أقل من 6سم:

$$p(X<6) = p\left(Z<\frac{6-10}{2}\right) = p(Z<-2) = p(Z>2)$$

$$= 1 - p(X<2) = 1 - (0.5 + 0{,}4772) = 0{,}0228$$

أ-4/ احتمال اصطياد سمكة طولها أقل من 20سم:

$$p(\mathrm{X}<20) = p\left(Z<\frac{20-10}{2}\right) = p(Z<5) \approx p(Z<3{,}8) = 0{,}9999$$

أ-5/ احتمال اصطياد سمكة طولها أكبر من 8,5سم:

$$p(X>8{,}5) = p\left(Z>\frac{8{,}5-10}{2}\right) = p(Z>-0{,}75) = p(-0{,}75<Z<0) + p(0<Z<+\infty)$$

$$= (0<Z<0{,}75) + p(0<Z<+\infty) = 0{,}2734 + 0{,}5 = 0{,}7734$$

أ-6/ احتمال اصطياد سمكة طولها أكبر من 9سم، وأقل من 12سم:

$$p(9<X<12) = p\left(\frac{9-10}{2}<Z<\frac{12-10}{2}\right) = p\left(\frac{-1}{2}<Z<1\right)$$

$$= p\left(\frac{-1}{2}<Z<0\right) + p(0<Z<1) = p\left(0<Z<\frac{1}{2}\right) + p(0<Z<1)$$

$$= 0{,}1915 + 0{,}3413 = 0{,}5328$$

أ-7/ احتمال اصطياد سمكة أقل من 7سم، أو أكبر من 11سم:

$$p[(X<7)\cup(\mathrm{X}>11)] = p(\mathrm{X}<7) + p(X>11) = p\left(Z<\frac{7-10}{2}\right) + p\left(Z>\frac{11-10}{2}\right)$$

$$= p(Z<-1{,}5) + p(Z>0{,}5) = p(Z>1{,}5) + p(Z>0{,}5)$$

$$= p(0<Z<+\infty) - p(0<Z<1{,}5) + p(0<Z<+\infty) - p(0<Z<0{,}5)$$

$$= 0{,}5 - 0{,}4332 + 0{,}5 - 0{,}1915 = 0{,}3753$$

ب/ تم اصطياد سمكة، احتمال اصطيادها هو 0,2580:

ب-1/ إيجاد قيمة a، إذا كان طولها يقع في المجال $10 < X < a$:

$$p(10 < X < a) = 0{,}2580 \Rightarrow p\left(\frac{10-10}{2} < Z < \frac{a-10}{2}\right) = 0{,}2580$$

$$\Rightarrow p\left(0 < z < \frac{a-10}{2}\right) = 0{,}2580$$

$$\Rightarrow \frac{a-10}{2} = 0{,}7 \Rightarrow a = 11{,}4$$ (من الجدول الاحصائي للتوزيع الطبيعي المعياري)

إذن طول هذه السمكة يقع في المجال: $10 < X < 11{,}4$ سم سم.

ب-2/ استنتاج قيمة b، إذا كان طولها يقع في المجال $b < X < 10$:

بما أن $b < X < 10$، فمن السؤال السابق، يمكن استنتاج أن $b = 8{,}6$، وذلك باستخدام خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي، حيث أن المجال $10 < X < 11{,}4$ والمجال $8{,}6 < X < 10$ متناظرين حول المتوسط $\mu = 10$، وبالتالي يكون لهم نفس الاحتمال 0,2580.

ويمكن التأكد من ذلك كالآتي:

$$p(b < X < 10) = 0{,}2580 \Rightarrow p\left(\frac{b-10}{2} < Z < 0\right) = 0{,}2580$$

$$\Rightarrow p\left(0 < Z < \frac{-b+10}{2}\right) = 0{,}2580$$ (باستخدام خاصية التناظر)

$$\Rightarrow \frac{-b+10}{2} = 0{,}7 \Rightarrow b = 8{,}6$$ (من جدول التوزيع الطبيعي)

تمرين 5/

عند حقن شخص بمصل معين، فإن احتمال أن يعاني من آثار سلبية نتيجة الحقن هو 0,001، عند حقن 3000 شخص، فما هو احتمال أن يعاني 4 أشخاص من آثار سلبية، وذلك باستخدام:

1/ توزيع ذي الحدين؟

2/ توزيع بواسون كتقريب لقانون توزيع ذي الحدين؟

الحل:

1/ استخدام توزيع ذي الحدين:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع ثنائي الحد، حيث: n=3000، p=0,001، q=0,999، وعند استخدام قانون ثنائي الحد، حيث الاحتمال المطلوب، هو:

$$p(X=4)=C_{3000}^{4}\times(0{,}001)^{4}\times(0{,}999)^{2996}\approx 0{,}1681$$

2/ استخدام توزيع بواسون كتقريب لقانون ذي الحدين:

نلاحظ أن شروط التقريب متوفرة، حيث: p=0,001 هي قيمة صغيرة جدا، n كبيرة جدا (n=3000≥30)، np=3000×0,001=3≤5.

إذن نستخدم قانون بواسون، حيث $\lambda=np=3$، وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$p(X=x)=\frac{\lambda^{x}.e^{-\lambda}}{x!}\Rightarrow\quad p(X=4)=\frac{3^{4}.e^{-3}}{4!}\approx 0{,}1680$$

ونلاحظ أنه تقريبا نفس نتيجة الاحتمال عند استخدام توزيع ثنائي الحد أو توزيع بواسون.

تمرين 6/

يتم استقبال العديد من المكالمات الهاتفية لطلب النجدة في مركز للحماية المدنية، حيث في كل مكالمة، فإن احتمال (0,75) أن تكون تستحق الحالة المبلغ عنها تدخل أفراد الحماية المدنية، ففي فترة زمنية معينة تم استقبال 70 مكالمة هاتفية، فما احتمال أن يكون:

1/ 60 مكالمة تستحق التدخل؟

2/ 50 مكالمة هاتفية على الأكثر تستحق التدخل؟

3/ أكثر من 45 وأقل 65 مكالمة هاتفية تستحق التدخل؟

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع ثنائي الحد، حيث: n=70، p=0,75، q=0,25، وعند استخدام قانون ثنائي الحد، فإن القيام بالعمليات الحسابية صعب جدا، لذلك ينبغي تقريب هذا التوزيع إلى توزيع آخر.

ونلاحظ أن تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون لا تتوفر فيه الشروط، لأن: n=70≥30، لكن شرط np≤5 غير محقق، لأن: np=70×0,75 =52,5>5.

أما شروط التقريب إلى **التوزيع الطبيعي** فهي متوفرة، حيث: n=70≥30، np=52,5≥5، nq=17,5≥5، حيث يكون: $\mu = E(X) = np = 52,5$

$$\sigma^2 = V(X) = npq = 70 \times 0,75 \times 0,25 = 13,125$$

1/ احتمال أن يكون 60 مكالمة تستحق التدخل: $p(X = 60) = p(59,5 < X < 60,5)$

$$= p\left(\frac{59,5 - 52,5}{\sqrt{13,125}} < Z < \frac{60,5 - 52,5}{\sqrt{13,125}}\right)$$

$$= p(1,93 < Z < 2,21)$$

$$= p(0 < Z < 2,21) - p(0 < Z < 1,93) = 0,4864 - 0,4732 = 0,0132$$

2/ احتمال أن تكون 50 مكالمة هاتفية على الأكثر تستحق التدخل: $p(X \leq 50) = p(X \leq 50,5)$

$$= p\left(Z < \frac{50,5 - 52,5}{\sqrt{13,125}}\right)$$

$$= p(Z < -0,55) = p(Z > 0,55)$$

$$= 0,5 - p(0 < Z < 0,55) = 0,5 - 0,2088 = 0,2912$$

3/ احتمال أكثر من 45 وأقل 60 مكالمة هاتفية تستحق التدخل:

$$p(45 < X < 60) = p(45,5 < X < 59,5)$$

$$= p\left(\frac{45,5-52,5}{\sqrt{13,125}} < Z < \frac{59,5-52,5}{\sqrt{13,125}}\right)$$

$$= p(-1,93<Z<1,93) = 2p(0<Z<1,93) = 2 \times 0,4732 = 0,9464$$

تمرين 7/

وكالة سياحية تستقبل في المتوسط 12,5 مكالمة هاتفية كل 5دقائق، فما احتمال أن تستقبل بين $10^h:00$ و $10^h:05$:

1/ أقل من 9 مكالمات هاتفية؟

2/ 9 مكالمات هاتفية على الاكثر؟

3/ 10 مكالمات؟

4/ أكثر من 15 مكالمة هاتفية؟

5/ أكثر من 5 وأقل من أو يساوي 15 مكالمة هاتفية ؟

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع بواسون، حيث: $\lambda = 12,5$، لكن حسب صيغة الأسئلة فإن استخدام هذا التوزيع يتطلب عمليات حسابية طويلة وصعبة، لذلك سيتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، لأن شروط التقريب متوفرة، لأن: $\lambda = 12,5 \geq 10$، حيث يكون:

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 12,5.$$

1/ احتمال استقبال أقل من 9 مكالمات هاتفية: $p(X<9) = p(X<8,5)$

$$= p\left(Z < \frac{8,5-12,5}{\sqrt{12,5}}\right)$$

$$= p(Z < -1,13)$$

$$= p(Z>1,13) = 0,5 - p(0<Z<1,13) = 0,5 - 0,3708 = 0,1292$$

2/ احتمال استقبال 9 مكالمات هاتفية على الأكثر: $p(X \leq 9) = p(X < 9{,}5)$

$$= p\left(Z < \frac{9{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$= p(Z < -0{,}85)$$

$$= p(Z > 0{,}85) = 0{,}5 - p(0 < Z < 0{,}85) = 0{,}5 - 0{,}3023 = 0{,}1977$$

3/ احتمال استقبال 10 مكالمات هاتفية: $p(X = 10) = p(9{,}5 < X < 10{,}5)$

$$= p\left(\frac{9{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}} < Z < \frac{10{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$= p(-0{,}85 < Z < -0{,}56)$$

$$= p(0{,}56 < Z < 0{,}85)$$

$$= p(0 < Z < 0{,}85) - p(0 < Z < 0{,}56) = 0{,}3023 - 0{,}2123 = 0{,}09$$

4/ احتمال استقبال أكثر من 15 مكالمة هاتفية: $p(X > 15) = p(X > 15{,}5)$

$$= p\left(Z > \frac{15{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$= p(Z > 0{,}85) = 0{,}5 - p(0 < Z < 0{,}85) = 0{,}5 - 0{,}3023 = 0{,}1977$$

5/ احتمال استقبال أكثر من 5 وأقل من أو يساوي 15 مكالمة هاتفية:

$$p(5 < X \leq 15) = p(5{,}5 < X < 15{,}5)$$

$$= p\left(\frac{4{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}} < Z < \frac{15{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$= p(-2{,}26 < Z < 0{,}85)$$

$$= p(0 < Z < 2{,}26) + p(0 < Z < 0{,}85) = 0{,}4881 + 0{,}3023 = 0{,}7904$$

الخـــــــــاتمة

الخاتمة:

من خلال هذه المطبوعة، والتي هي ضمن مقياس الاحصاء2 (الاحتمالات)، فقد تضمنت ملخصات لمختلف المحاور، وأيضا تمارين محلولة لكل محور، وقد تم الحرص قدر المستطاع أن تكون التمارين في مستوى الطلبة، وأن يتم التبسيط والتفصيل في الحل قدر الإمكان، وهذا حتى يتمكن الطالب من الفهم جيدا، لأن ملخص الدرس غير كافي، ولأن مضمون هذا المقياس يتطلب حل الكثير من التمارين، وبفهم محتوى هذه المطبوعة يصبح الطالب متمكن من جوهر وأساس مادة الاحتمالات، وبما يمكنه ويسهل عليه التعمق أكثر في فهم محتوى هذا المقياس إذا أراد ذلك، فيمكنه الرجوع إلى الكثير من الكتب التي تتضمن دروس وتمارين متعددة ومختلفة، وأرجو أن أكون قد وُفقت في إنجاز هذه المطبوعة الجد متواضعة.

تمنياتي بالتوفيق والنجاح لكل الطلبة.

المـــــــــــراجع

المراجع:

1- أحمد شيبات، **مفاهيم من حساب الاحتمالات – دروس وتمارين محلولة**، ترجمة: يزيد درבال، الجزائر: جامعة منتوري قسنطينة، 2004.

2- أحمد عبد السميع طبيّه، **مبادئ الإحصاء**، ط1، الأردن: دار البداية للنشر والتوزيع، 2008.

3- السعدي رجال، **نظرية الاحتمال – مبادئ الحساب الاحتمالي**، ج 1، ط 1، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، 1995.

4- السعدي رجال، **نظرية الاحتمال – مبادئ الحساب الاحتمالي**، ج 1، ط 2، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، 2005.

5- أنيس اسماعيل كنجو، **الاحصاء والاحتمال**، ط1، السعودية: مكتبة العبيكان للنشر، 2000.

6- جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات**، ط1، الأردن: دار المسيرة للنشر والتوزيع، 2011.

7- جلال الصياد، عبد الحميد محمد ربيع، **مبادئ الطرق الإحصائية**، ط1، السعودية: تهامة للنشر، 1983.

8- عبد النور موساوي، يوسف بركان، **الإحصاء** 2، الجزائر: دار العلوم للنشر والتوزيع، 2010.

9- مبارك اسبر ديب، **مبادئ في الاحتمالات والاحصاء**، سوريا: جامعة تشرين، 2009.

10- محمود الراوي خاشح، **مدخل إلى الاحصاء**، العراق: المكتبة الوطنية ببغداد، 1979.

11- مجدي الطويل، **نظرية الإحتمالات –النظرية والتطبيق**، مصر: دار النشر للجامعات، 2009.

12- مديحة السيد محمد موسى، **أساسيات الإحصاء الرياضي وتطبيقاتها**، مصر: دار الكتاب الحديث، 2008.

13- مصطفى عبد الحفيظ، **نظرية الاحتمالات – مبادئ وتطبيقات**، ج 1، ط3، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، 2008.

14- موراي شبيجل، **الإحصاء – سلسلة ملخصات شوم**، ترجمة شعبان عبد الحميد شعبان، ط 7، مصر: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، 2004.

15- موراي شبيجل وآخرون، **الاحتمالات والاحصاء – سلسلة ملخصات شوم**، ترجمة محمود علي أبو النصر ومصطفى جلال مصطفى، ط 1، مصر: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2004.

16- FOATA D, FUCHS A, **Calcul Des Probabilités**, 2eme Ed, Paris: Dunod, 1998.

17-KACI REDJDAL, **Probabilites – Exercices Corrigés Avec Rappels de cours**, K R Edition.

18- KHALEDI K, **Méthodes Statistiques**: **rappel de cours – exerices corrigés**, Algérie: OPU, 2005.

19- LECOUTRE J-P, **Statistique Et Probabilités**, 4eme Ed Paris: Dunod, 2008.

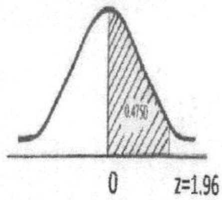
الملاحق

ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

The Standard Normal Distribution : Laplace-Gauss

$Z : \mathcal{N}(0,1)$

$P(0 < Z < z)$



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4081	.4982	.4982	.4083	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.5987	.4987	.4988	.4988	.4980	.4989	.4989	.4990	4990