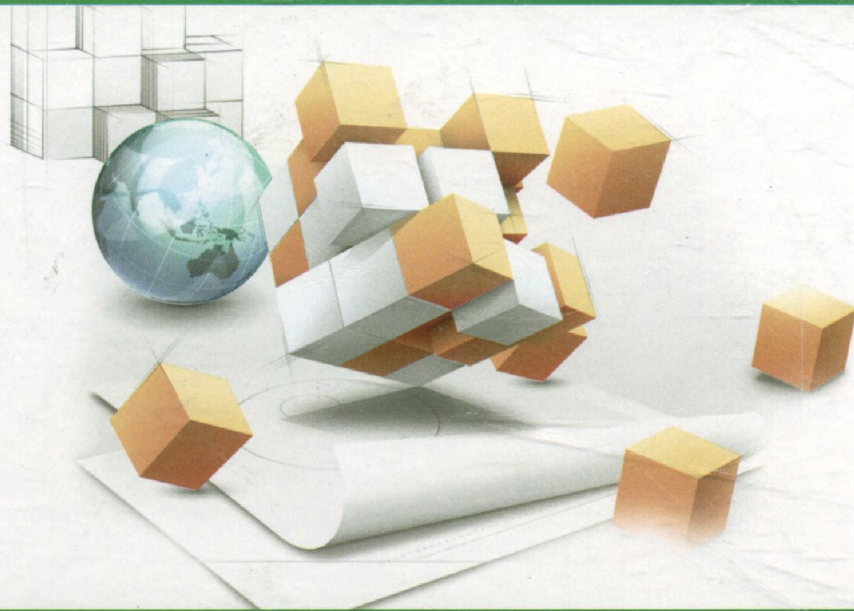


# الإحصاء العام



تليفاكس: ٤٤٨٠٠٠٠ - الإسكندرية

أستاذ دكتور

جابر أحمد بسيوني



لتحميل المزيد من الكتب

تفضلوا بزيارة موقعنا

[www.books4arab.me](http://www.books4arab.me)







# الإحصاء العام

استاذ دكتور

جابر احمد بسيوني

كلية الزراعة ساجا باشا

جامعة الإسكندرية

الطبعة الأولى

2014م

الناشر

دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر

تليفاكس : 5404480 - الإسكندرية



## مقدمة:

يضم هذا الكتاب بعض الأسس والأدوات التي قد تفيد الطلاب والباحثين والعاملين في مجال الدراسات الإحصائية ، فهي بمثابة دليل للطلاب في حل بعض المسائل الإحصائية والاستفادة منها في تطبيق تلك المسائل في مجال الدراسات العلمية المختلفة في مجال العلوم الطبيعية والاجتماعية والتي تشمل علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وعلم النفس ، وتقيد الباحث الذي يعمل في مجال الدراسات الاجتماعية والعلوم الطبيعية في اتخاذ بعض القرارات الخاصة بتخطيط الإنتاج والاستهلاك ومعالجة بعض مشاكل الغذاء وفي التنمية الاقتصادية والإدارة المزرعية والتسويق والتجارة الدولية وغيرها من الدراسات . كما تفيد تلك الأدوات العاملين في مجال الدراسات الإحصائية في توصيف بعض المدلولات الإحصائية والإشارة في صورة رسوم بيانية تفيد سرعة إعطاء فكرة عن اتجاه تطور أي ظاهرة معينة .

ولقد سمي هذا الكتاب " الإحصاء العام " لإعطاء بعض المؤشرات أو المفاهيم التي تفيد في توصيف وتحليل واستخلاص النتائج وتطبيقها في شتى مجالات العلوم المختلفة . ولكي يتحقق الهدف من هذا الكتاب فقد قسمت الموضوعات المختلفة التي يضمها هذا الكتاب إلى ثمانية فصول تناول الأول منها التعريف بعلم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى ، وتناول الفصل الثاني مراحل البحث الإحصائي ، في حين تناول كل من الفصل الثالث والرابع مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت على الترتيب ، بينما تناول الفصل الخامس تحليل الارتباط ، وتناول الفصل السادس تحليل الانحدار ، بينما اختص الفصل السابع بمبادئ الاحتمالات ، وتناول الفصل الثامن والأخير الأرقام القياسية .



وقد روعى فى هذا الكتاب بساطة التعبير والأسلوب ليتناسب مع  
دارسى المراحل الأولى للدراسات الإحصائية والاقتصادية والقياسية .  
ويحتوى الكتاب على قدر كبير من الأمثلة المحلولة حتى يتيسر على  
القارئ فهم الموضوعات المختلفة التى يضمها هذا الكتاب .

واعتمدت المادة العلمية لهذا الكتاب على العديد من المراجع  
العربية والأجنبية. والباحث إذ يضع خبرته الطويلة فى هذا العلم كطالب  
وباحث ومستفيد من حضور المؤتمرات الدولية والإقليمية والمحلية لا يصل  
بهذا الكتاب إلى درجة الكمال إذ أن الكمال لله الواحد فقط ، ولا  
يعفيه من الخطأ ولكنه ينشد الصواب فتلك مقدمة ومن سار على  
الدرب وصل .

والله يوفقنا جميعاً إلى خدمة مصرنا الحبيبة وأمتنا العربية بكل  
الخير والتقدم ، ، ،

**المؤلف**

## الفصل الأول

تعريف علم الإحصاء  
وعلاقته بالعلوم الأخرى



## تمهيد :

يقصد بكلمة الإحصاء هو الحصر أو العد الدقيق لمختلف الأشياء . وعرفت الإحصاء منذ أقدم العصور، وإن استخدام الإحصاء فى الإثبات لا تعتبر علماً حديثاً ، فقد كان مستعمل منذ القرن السابع عشر ولكن فى الشكل البدائى الذى لا يتعدى جمع البيانات الأولية واستخدامها فى صورتها الخام أو بعد تعديل طفيف للوصول إلى استنتاجات معينة الأمر الذى من شأنه أن يعرض الباحثين للوقوع فى بعض الأخطاء نتيجة الاعتماد على البيانات الأولية دون تحليلها . ولتلاشى تلك الأخطاء وضعت عدة قوانين وقواعد إحصائية تساعد الباحثين فى كيفية استخدام الأرقام التى يسجلونها عن مختلف الظواهر فى رفض أو قبول فروض معينة وتقييم النتائج التى يتوصلون إليها بأسلوب البحث الإحصائى . ولقد كثرت هذه القواعد والقوانين الإحصائية وأصبحت فى حد ذاتها حقائق ثابتة رياضياً مما جعل الإحصاء علماً قائماً بذاته وله أهمية فى علاقته بالعلوم الأخرى مثل العلوم الاجتماعية كالاقتصاد و الاجتماع والمجتمع الريفى وغير ذلك ، والعلوم الطبيعية وغيرها من العلوم التى تبحث فى الظواهر المتغيرة التى يمكن قياسها والتعبير عنها فى صورة كمية .

ويتناول هذا الفصل التعاريف المختلفة لعلم الإحصاء وخصائص ووظائف علم الإحصاء وعلاقة علم الإحصاء بالعلوم الأخرى .

**تعريف علم الإحصاء وخصائصه ووظائفه :**

**أولاً: تعريف علم الإحصاء :**

يوجد عدة تعاريف لعلم الإحصاء نذكر منها :

1- يعرف علم الإحصاء بأنه مجموعة النظريات والقوانين والقواعد المختلفة المتعلقة بتجميع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات الإحصائية مثل البيانات الخاصة بالإنتاج الزراعى أو الإنتاج الصناعى أو الصادرات أو الواردات أو عدد السكان وغير ذلك من البيانات بغرض الوصول إلى استنتاجات قيمة تساعد الباحث فى الوصول إلى النتائج التى يرغبها والتنبؤ بها فى المستقبل .

2- يشير علم الإحصاء إلى المبادئ المختلفة والأساليب المتعددة المستخدمة فى جمع وتحليل وتفسير هذه البيانات وهو بهذا المفهوم يمثل الإحصاء فرعاً من فروع الرياضه التطبيقية والذى أصبح الآن علماً قائماً بذاته له أساليبه وقواعده وفروعه المختلفة .

3- هو العلم الذى يتعلق بدراسة المعلومات التى تستخدم لاتخاذ القرارات الممكنة تحت ظروف التشكك أو اللاتيقين .

مما سبق يتبين أن علم الإحصاء يتضمن الأسلوب العلمى لتقصى حقائق الظواهر بمختلف أنواعها واستخلاص النتائج عنها ، كما يتضمن أيضاً النظرية اللازمة للقياس واتخاذ القرار فى كافة الميادين الاقتصادية والاجتماعية والسياسية والعسكرية وغير ذلك .

وبمعنى آخر فإن علم الإحصاء هو العلم الذى يهتم بجمع وتنظيم وترتيب وتحليل البيانات حتى يمكن الحصول على نتائج صحيحة تساعد فى اتخاذ القرارات السليمة .

وهناك عدة فروع لعلم الإحصاء منها : (1) الإحصاء الاقتصادى ، (2) الإحصاء الرياضى ، (3) الإحصاء البيولوجى ، (4) الإحصاء

الاعلامى ، (5) الإحصاء الاجتماعى ، (6) الإحصاء الإستدلالي ،  
(7) تصميم التجارب .

### ثانياً : خصائص علم الإحصاء :

يمكن ذكر أهم خصائص علم الإحصاء فيما يلى:

- 1- يعتمد على حقائق كمية وعلى حقائق غير كمية (نوعية) ولكن بعد تحويلها إلى بيانات كمية .
- 2- يعتمد على حقائق جماعية وليست فردية .
- 3- يجب أن ترتبط الحقائق الجماعية ببعضها البعض من حيث تطورها مع الزمن أو وضعها بالنسبة لجميع الحقائق المناسبة لهذه المجموعات .
- 4- يهدف الإحصاء إلى الوصول إلى القيمة الحقيقية لمقاييس المجتمع المختلفة مثل متوسط درجات مادة معينة لجميع الطلاب فى نفس السنة الدراسية .

### ثالثاً : وظائف علم الإحصاء :

تتلخص وظائف علم الإحصاء فيما يلى :

- 1- حصر وترتيب وتبويب البيانات سواء كان هذا الحصر شاملاً أو عن طريق العينات أو بعمل تصميم للتجارب ثم تلخيص البيانات المتحصل عليها أما فى صورة جداول أو رسومات بيانية .
- 2- التحليل الكمي والوصفي للبيانات وذلك باستخدام مختلف الطرق والأساليب الإحصائية الوصفية والكمية .

### 3- التفسير الإحصائي : وهو يقسم إلى نوعيين

( أ ) الاستتباط أو التفسير التطبيقي : وهو مبنى على تفسير ظاهرة خاصة من قانون أو ظاهرة عامة أى التطبيق من العام إلى الخاص . فمثلاً فى قانون العرض نجد أنه فى سوق معينة وخلال فترة زمنية معينة فإن الكميات المعروضة تتناسب طردياً مع سعر الوحدة بافتراض ثبات العوامل الأخرى. فمثلاً إذا زاد سعر الأسماك فمن المتوقع زيادة الكميات المنتجة منها .

(ب) الاستقراء أو التفسير الاستنتاجى : وهو التوجيه من الخاص إلى العام. ويستخدم هذا التفسير الاستنتاجى بكثرة فى العلوم البحتة مثل الكيمياء والفيزياء حيث إنه يمكن التحكم فى جميع المتغيرات فيما عدا المتغير المراد دراسته ، أما فى العلوم البيولوجية مثل العلوم الزراعية والطبيعية فإن متغير الدراسة يكون عرضه للاختلاف والتغير والتأثر بالظروف البيئية المختلفة ولذلك فما هو صحيح بالنسبة للخاص قد لا يكون صحيحاً دائماً بالنسبة للعام .

### علاقة علم الإحصاء بالعلوم الأخرى :

يعتبر علم الإحصاء من العلوم الأساسية والذي يرتبط ارتباطاً وثيقاً بالعلوم الأخرى مثل الإدارة والمحاسبة والرياضة والاقتصاد وبعض العلوم الطبيعية والكيميائية والوراثية وغير ذلك من العلوم، حيث يمكن التعرف على خصائص تلك العلوم السابق ذكرها بمساعدة علم الإحصاء، حيث الإحصاء بفروعه المختلفة وتطورها أصبح الوسيلة القادرة على جمع البيانات وتبويبها وتحليلها وفقاً للمقاييس الإحصائية

المناسبة واستخلاص النتائج المؤثرة على العوامل موضوع الدراسة والبحث حتى يمكن معرفة العلاقة بين هذه العوامل والاستفادة منها فى البحث العلمى . ويتم ذلك من خلال العلاقة الوطيدة والتعاون بين المختصين بعلم الإحصاء والمختصين بالعلوم الأخرى حيث من خلال تعاونهم هذا اقتراح الوسائل والأساليب التى تفيده فى تطوير وتحسين علم الإحصاء والعلوم الأخرى . وعلى سبيل المثال من خلال التعاون بين علماء الإحصاء والرياضة والاقتصاد تم معرفة علم الاقتصاد القياسى .Econometrics

### (1) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الاقتصاد :

الإحصاء بطريقة وأساليبه المختلفة يساعد فى شرح كثير من الحقائق والنظريات الاقتصادية التى تم استنباطها بأسلوب الاستنتاج المنطقى ، كما يمكن استخدام تلك الأساليب الإحصائية فى تقدير النماذج الاقتصادية المختلفة مع مراعاة فروض النظرية الاقتصادية. ومن خلال علم الإحصاء يمكن الحكم على معنوية معاملات النماذج الاقتصادية التى يتم دراستها. هذا بالإضافة إلى أن علم الاقتصاد باعتباره أحد العلوم الاجتماعية التى تدرس سلوك الأفراد كمستهلكين وكمنتجين وتجار فهو يحتاج إلى جمع بيانات خاصة بالإنتاج والاستهلاك والتجارة وغيره سواء باستخدام العينات أو دراسة المجتمع بأكمله ثم تحليل هذه البيانات للوصول إلى النتائج المرغوبة وهذا كله يتم بالتعاون مع علم الإحصاء من خلال استخدام الأساليب الإحصائية اللازمة للدراسة .



## (2) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الإدارة :

إن أهم ما يميز المدير الناجح هو القدرة على اتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب وهو في ذلك يحتاج إلى مجموعة من الأساليب الإحصائية الكمية التي تساعد في دراسة كل ما يتعلق بالظاهرة موضوع الدراسة وإيجاد الحلول المناسبة لها في الوقت الأمثل . وتلعب بحوث العمليات دوراً أساسياً في اتخاذ القرارات الإدارية ، كما تلعب نظرية المعايير وهي أحد الأساليب الإحصائية دوراً هاماً في كيفية التعامل مع العاملين في مجال الإدارة من خلال عمليات الاستقصاء الميداني . وباستخدام هذه المعلومات الكمية المتوافرة حول أية سياسة إدارية وبمساعدة الأساليب الإحصائية يمكن الوصول إلى قرارات إدارية هامة تفيد العاملين في مجال الإدارة . فمثلاً القرارات الخاصة بتحديد المخزون وسياساته ومعدلات دوران رأس المال كلها أشياء لا يمكن معرفة تحديدها كميّاً إلا بمساعدة الأساليب الإحصائية مثل تحليل الانحدار بشقيه البسيط والمتعدد وتقدير معدلات النمو وتقدير المعادلات باستخدام النماذج الإحصائية ، ومن هنا تظهر العلاقة الوطيدة بين علم الإحصاء وعلم الإدارة .

## (3) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم المحاسبة :

الإحصاء أداء هامة لعلم المحاسبة حيث تعتمد عمليات مراجعة السجلات والدفاتر المحاسبية على اختيار عينة من المستندات تكون ممثلة لجميع المستندات ، وذلك أسلوب إحصائي له قواعده الخاصة به وعلى المحاسب التقدير أن يراعى قواعد وشروط اختيار العينة . كما تستخدم المحاسبة أيضاً التوزيعات الإحصائية وطرق التقدير والاستدلال

الإحصائي في عمليات التنبؤ بفشل أو نجاح المشروعات من خلال التنبؤ بأسعار الأسهم والأرباح .

#### (4) العلاقة بين علم الإحصاء والرياضة :

تعتمد الإحصاء على الأدوات الرياضية سواء مثل الجبر أو غيره في حساب المقاييس الإحصائية بالإضافة إلى الإثباتات النظرية اللازمة، خصوصاً في مجال الإحصاء الرياضي، فالشخص الذي لديه معلومات رياضية يكون أقدر من غيره في التعامل مع الإحصاء والتعمق فيها والعمل على تطويرها . كما تحتاج الرياضيات إلى الأدوات الإحصائية في كثير من الأمور مثل استخدام النظريات الرياضية وتطويرها لتلائم واقع الحياة العملية .

#### (5) العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الرياضة وعلم الاقتصاد :

كما ذكر سابقاً نتيجة للتعاون الوثيق بين الرياضة والإحصاء والاقتصاد أمكن الوصول إلى علم حديث يسمى علم الاقتصاد القياسي Econometrics وهو مزيج بين الثلاثة فروع المختلفة من العلم وهذا العلم ساعد كثيراً في تطوير علم الاقتصاد من علم بحث إلى علم تطبيقي ساعد كثيراً على إيجاد حلول لبعض المشاكل الاقتصادية .



## الفصل الثاني

### مراحل البحث الإحصائي



يتعين على الباحث عند عمل بحث معين إجراء خطوات رئيسية لدراسة تأثير عامل أو عدة عوامل على ظاهرة معينة وعلاقة ذلك بالظواهر الأخرى .

ويمكن تلخيص خطوات أو مراحل البحث الإحصائي فى الآتى :

### (1) تحديد الهدف من البحث أو وضع الفروض الإحصائية :

يقصد بالفرض الإحصائي بأنه تفسير مبدئى للظاهرة موضوع الدراسة ، ويحتاج الفرض إلى بيانات يتم جمعها وتحليلها وفى ذلك يقرر الباحث إما قبول الفرض أو رفضه وبدأ البحث عن الفرض البديل فى ضوء البيانات المتاحة للباحث والتي تم جمعها عن الظاهرة موضوع الدراسة . ومن خلال الفروض يتم تحديد الهدف من الدراسة وتحديد الجداول الإحصائية اللازمة حيث ذلك يساعد الباحث على تحديد البيانات اللازم جمعها .

### (2) تحديد المجتمع المراد جمع البيانات عنه :

يقصد بالمجتمع مجموع المفردات التى يتم جمع البيانات عنها. والمفردات التى تمثل وحدة جمع البيانات فمثلاً مجموع وثائق التأمين على الحياة بكافة أنواعه تمثل المجتمع موضوع الدراسة وكل وثيقة تأمين تمثل وحدة مجتمع الدراسة .

### (3) تحديد مصادر البيانات :

هناك نوعين من مصادر البيانات منها :

(أ) مصادر ثانوية : وهى بيانات سبق جمعها وحفظها ونشرها فى سجلات مثل نشرات الاقتصاد الزراعى التى يصدرها معهد بحوث

الإقتصاد الزراعي بوزارة الزراعة وإستصلاح الأراضى قطاع الشئون الإقتصادية ، والنشرات الإحصائية التى يصدرها الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء ، ومنظمة الأغذية والزراعة (الفاو) وهذه البيانات تتعلق بالظاهرة موضوع الدراسة سواء كانت بيانات عن المساحة الزراعية أو الإنتاج الزراعى أو الدخل الزراعى أو عدد السكان أو الدخل القومى أو الإنتاج القومى أو الاستهلاك القومى وغير ذلك من البيانات .

(ب) مصادر أولية وميدانية : ويقصد بها جمع البيانات من مصادرها الأصلية وذلك بأحد الطرق المتعارف عليها سواء عن طريق المقابلة الشخصية أو بالبريد أو التليفون أو الفاكس أو عن طريق الإنترنت وهى أحدث طرق جمع البيانات .

#### (4) التجهيز لعملية جمع البيانات الميدانية :

ويتطلب ذلك عدة مراحل منها :

(أ) تصميم استمارة جمع البيانات : وهى ما تعرف باستمارة الاستبيان ويجب أن يراعى فيها الآتى :

1- أن تكون أسئلة الاستمارة معبرة عن جميع البيانات المطلوب جمعها واللازمة للدراسة .

2- يراعى فيها التسلسل المنطقى وصياغة الأسئلة بطريقة سهلة ويفهمها المبحوث.

3- وضع الأسئلة بحيث تكون الإجابة عليها بنعم أو لا أو يعبر عنها بصورة رقمية.

4- لا تسبب الأسئلة أى حرج للمبحوث .

5- أن يقر الباحث بأن الأسئلة الموجودة باستمرار الاستبيان سرية ولأغراض البحث العلمى فقط .

(ب) تحديد الأسلوب المناسب لجمع البيانات : يوجد أسلوبان لجمع البيانات هما:

1- الحصر الشامل: وفيه يتم جمع البيانات من جميع مفردات المجتمع موضوع الدراسة .

2- العينة : وفيه يتم جمع البيانات من بعض مفردات المجتمع .

وتوجد عدة اعتبارات لتحديد الأسلوب المناسب لجمع البيانات نذكر منها:

- نوع المجتمع : فإذا كان المجتمع محدوداً ويمكن حصر مفرداته فيتم اللجوء إلى استخدام الحصر الشامل لمفردات المجتمع. أما إذا كان المجتمع غير محدود ويصعب حصر مفرداته فيتم اللجوء إلى استخدام أسلوب العينة .

- طبيعة الظاهرة موضوع الدراسة : إذا كانت الظاهرة عرضه للفساد أو التلف مثل عمل التجارب على الأسماك أو الخضر أو الفاكهة فيلزم استخدام أسلوب العينة.

- الوقت : يحتاج أسلوب الحصر الشامل إلى وقت كبير بالمقارنة بأسلوب العينة فإذا كان الباحث يريد الحصول على نتائج بسرعة فيستخدم أسلوب العينة .



- الإمكانات المادية للباحث : أسلوب الحصر الشامل يحتاج إلى موارد مادية كبيرة بالمقارنة بأسلوب العينة .
- إعداد القائمين بجمع البيانات : تحديد واجبات واختصاصات كل منهم للحصول على البيانات على أكمل وجه .
- تهيئة المجتمع للعملية الميدانية الخاصة بجمع البيانات : حيث يتم الإعلان عن طريق أحد وسائل الإعلام المختلفة مثل الإذاعة والتلفزيون والصحف والمجلات ، حتى يكسب ثقة أفراد المجتمع للحصول على بيانات صحيحة .

#### (5) تصنيف وتجهيز البيانات :

- بعد الانتهاء من جمع البيانات من خلال استمارة الاستبيان يتم عمل الجداول الإحصائية المناسبة لتفريغ البيانات وتجهيزها للتحليل الإحصائي ، ويتم ذلك من خلال الخطوات الآتية:
- مراجعة استمارة الاستبيان للتأكد من أن جميع الأسئلة قد تم الإجابة عليها بطريقة صحيحة وواضحة .
  - فرز وتبويب البيانات من خلال استخراج الجداول الإحصائية .

#### (6) عرض البيانات وتحليلها إحصائياً :

- التمثيل البياني للبيانات باستخدام الأعمدة أو الخطوط المنكسرة أو الدائرة .
- تلخيص البيانات فى صورة مقاييس إحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت .

- إجراء بعض الاختبارات الإحصائية للوصول إلى قرار برفض أو قبول الفرض الإحصائي الذي افترضه الباحث كتفسير مبدئي للظاهرة موضع الدراسة .

## العينات Samples

العينة جزء من المجتمع يتم اختيارها بطريقة عشوائية وغير متحيزة لكي يتم دراستها للتعرف على خصائص المجتمع الذي سحبت منه العينة. ويتميز أسلوب العينة بعدد من المميزات منها :

- 1- يعطى نتائج سريعة بسبب سرعة الحصول على البيانات وتحليلها .
- 2- توفر الوقت والجهد والتكاليف .
- 3- فى بعض البحوث تعتبر العينات الأسلوب الإحصائي الوحيد مثل عمل تجارب دواء جديد على بعض الحيوانات وغيره من الأمثلة العديدة .

ولسحب عينة يجب أن يتوافر الآتى :

- 1- الوضوح فى تعريف المجتمع .
- 2- عدم التكرار لأى مفردة من مفردات المجتمع .
- 3- أن تكون العينة بدرجة كبيرة لكى تشمل كل أفراد المجتمع .
- 4- أن يكون اختيار العينة عشوائياً بمعنى أن تتاح لكل فرد من أفراد المجتمع فرصة الاختيار فى العينة .

## أنواع العينات :

تختلف أنواع العينات تبعاً لاختلاف خصائص المجتمع المراد دراسته . ويمكن تقسيم العينات بصفة عامة إلى :

## أولاً: العينات الاحتمالية Probability Samples

ويمكن تعريفها بأنها العينات التي يتم اختيار مقدراتها بأسلوب يوفر لكل وحدة من وحدات المعاينة مجتمع الدراسة احتمالاً ثابتاً ومحددأ لاختيار العينة بحيث لا يتدخل الباحث في عملية الاختيار بل يتم عشوائياً، ويمكن من خلال العينات الاحتمالية حساب أخطاء المعاينة وكذلك الاستدلال الإحصائي وتعميم النتائج. وتقسم العينات الاحتمالية إلى:

### (أ) العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample:

وهذا النوع من العينات من أبسط أنواعها ويقصد بالعشوائية بأنه يكون لكل فرد من مقدرات المجتمع نفس فرصة الاختيار ضمن العينة. وتتم عملية الاختيار بأن توضع لكل مفردة رقم معين وتخلط الأرقام مع بعضها خلطاً جيداً ثم يتم سحب عدد مقدرات العينة بطريقة عشوائية بطريقة السلة أو بطريقة جداول الأرقام العشوائية أو باستخدام الحاسب الآلي.

وتعتبر العينة العشوائية البسيطة سهلة الاختيار في حالة المجتمعات الصغيرة ويصعب استخدامها في المجتمعات الطبقيّة حيث لا تضمن تمثيل كل طبقة من هذه الطبقات بنفس نسبتها في المجتمع.

### (ب) العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

يمكن تلخيص خطوات سحب العينة العشوائية المنتظمة في تقسيم المجتمع إلى عدد من الفئات المتساوية الطول ثم يتم اختيار مفردة عشوائية من المجموعة الأولى ونحدد ترتيبها في المجموعة ثم نحصل على

بقية المفردات بإضافة طول الفئة على التوالى . وذلك كما يتضح من المثال التالى :

مثال : المطلوب اختيار عينة عشوائية منتظمة عدد مفرداتها يساوى (10) مفردات من بين مجتمع عدد مفرداته (200) مفردة .

الحل : يوجد لدينا 200 مفردة يتم تقسيمها إلى 10 فئات ، طول الفئة يساوى 20 كالاتى :

20 – 1  
40 – 20  
60 – 40  
:  
:  
:  
200 – 180

ثم نقوم باختيار مفردة واحدة من المجموعة الأولى بطريقة عشوائية بفرض اختيار الرقم (6) ثم نقوم بتحديد باقى مفردات العينة بإضافة طول الفئة (20) على الرقم (6) فنحصل على 10 مفردات بالأرقام 6 ، 26 ، 46 ، 66 ، 86 ، 106 ، 126 ، 146 ، 166 ، 186 وهذه الأرقام تمثل مفردات العينة المأخوذة من المجتمع المكون من 200 مفردة .

ويلاحظ أن هذا الأسلوب فى اختيار العينات يحتاج إلى تكاليف وجهد أقل من العينة العشوائية البسيطة السابق ذكرها .

وتتميز بالآتى :

- 1- عنصر العشوائية المتمثل فى اختيار المفردة .
- 2- عنصر الانتظام المتمثل فى اختيار باقى المفردات .

## Layer Sample العينة الطبقيية (ج)

وفقاً لهذا الأسلوب يتم تقسيم المجتمع إلى طبقات متجانسة ثم اختيار عدد من المفردات من كل طبقة ليكون حجم العينة الكلى مكون من عدد من المفردات من كل طبقة ككل . وتمثل العينة فى هذه الحالة المجتمع تمثيلاً دقيقاً لأنها تأخذ فى الاعتبار جميع الطبقات وفقاً لحجم كل منها .

## Multi- Stage Sample العينة متعددة المراحل (د)

يتم اختيار العينة وفقاً لهذا الأسلوب على عدة مراحل ، ويستخدم هذا النوع من العينات فى حالة ما إذا كان حجم المجتمع كبير جداً ويتكون من أقسام غير متجانسة فيما بينها ، فيتم اختيار عينة عشوائية من هذه الأقسام ، وقد يكون كل قسم مقسم إلى أقسام فيتم اختيار عينة عشوائية من كل منها وهكذا . فمثلاً عند دراسة تصنيف الأراضى الزراعية فى جمهورية مصر العربية يتم اختيار عدد من محافظات الجمهورية ويتم اختيار عدد من المراكز داخل كل محافظة ثم يتم عدد من القرى داخل كل مركز ليتم دراسة التصنيف .

## ثانياً: العينات غير الاحتمالية Non Probability Samples

تعرف العينة غير الاحتمالية بأنها التى يتم اختيار مفرداتها بطريقة غير طريقة الاحتمالات ، حيث يعتمد الباحث اختيار مفردات معينة ، ولذلك تعرف فى بعض الأحيان بأنها العينة العمدية . وفى العينات غير الاحتمالية لا يمكن حساب أخطاء المعاينة أو الاستدلال الإحصائى أو تعميم النتائج . ومن أهم أنواع العينات غير الاحتمالية عينة الحصص وتستخدم غالباً فى دراسات السوق والرأى العام ، وفيها يتم تحديد

حصص معينة تمثل مجتمع الدراسة تمثيلاً نسبياً ، ويعتمد تحديد الحصص على التقدير الشخصي وخبرة الباحث ، ويتم اختيار مفردات العينة من داخل كل قسم بطريقة عمدية أو غير عشوائية .

### أسئلة

- 1- أذكر تعريفاً مناسباً لعلم الإحصاء ؟
- 2- أذكر أهم خصائص ووظائف الإحصاء ؟
- 3- تكلم باختصار عن مراحل أو خطوات البحث العلمي ؟
- 4- ما هو المقصود بالعينة موضحاً أنواع العينات ؟

## أنواع الأخطاء :

قد يقع الباحث فى خطأ عند جمع البيانات ، فمثلاً جمع البيانات عن طريق أسلوب العينة قد يؤدي إلى الوقوع فى خطأ يسمى بخطأ المعاينة . وهناك أخطاء يقع فيها الباحث سواء استخدم أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينة وتسمى بأخطاء التحيز .

### أولاً: أخطاء المعاينة :

وتنشأ هذه الأخطاء نتيجة لعوامل الصدفة البحتة نظراً لاختلاف أسلوب العينة عن نتائج أسلوب الحصر الشامل . ويمكن قياس أخطاء المعاينة كمياً ومن ثم يمكن تقديرها . وتقل أخطاء المعاينة كلما زاد حجم العينة .

### ثانياً: أخطاء التحيز :

- وهى الأخطاء التى يقع فيها الباحث سواء استخدم أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينة خلال جميع مراحل البحث ومن أمثلتها:
- عدم تحديد المشكلة تحديداً دقيقاً .
  - الحصول على بيانات غير دقيقة فى جمع البيانات نتيجة لاعتماد الباحث على مصادر غير موثوق فيها .
  - عدم صياغة الأسئلة فى استمارة البحث بطريقة سليمة مما يترتب عليه جمع بيانات خطأ .
  - أخطاء فى فرز وتبويب البيانات .
  - أخطاء فى استخدام المقاييس الإحصائية المناسبة .

## تبويب وعرض البيانات الإحصائية

فى كثير من الأحيان تكون البيانات التى قام الباحث بجمعها كبيرة لدرجة تعذر استخلاص حقائق معينة منها. لذا يقوم الباحث بترتيبها وعرضها بطريقة منتظمة تساعده على توضيح أهميتها والتعرف على خواصها وسهولة تحليلها إحصائياً . وهناك عدة طرق مختلفة لعرض البيانات من أهمها العرض الجدولى والعرض البيانى .

### أولاً: العرض الجدولى :

يتم عرض بيانات الظاهرة موضوع الدراسة فى جدول ، وقد يكون هذا الجدول بسيط بحيث يتم فيه عرض ظاهرة واحدة فقط أو جدول مزدوج ويعرض فيه ظاهرتين أو جدول مركب لأكثر من ظاهرة .  
وتقسم الجداول الإحصائية من حيث أغراضها إلى الآتى :

#### (1) جداول عامة :

وهى عبارة عن الجداول التى يكتفى بتفريغ البيانات فيها دون الحاجة إلى تحليلها مثل بيانات التعداد السكانى من مواليد أو التركيب السكانى (ذكور و إناث) أو حجم الإنتاج الصناعى أو الزراعى وهكذا ... ويكون الغرض من الجداول العامة هو الاستفادة منها كمصدر للبيانات للاستفادة منها عند عمل الجداول الخاصة.

#### (2) جداول خاصة :

وتستخلص بياناتها من الجداول العامة ويعاد ترتيب تلك البيانات فى جداول خاصة بغرض إجراء بحث معين لإبراز أهمية الظاهرة موضوع الدراسة بصورة بسيطة وواضحة .



### (3) جدول التوزيع التكرارى :

إن أول خطوة يقوم بها الباحث لتخليص البيانات وتبسيطها تمهيداً لتحليلها بالأساليب الإحصائية المختلفة هو إعداد الجداول التكرارية . وفيها يتم تجميع البيانات المتشابهة مع بعضها فى مجموعات ووضع كل مفردة فى المجموعة التى تنتمى إليها ، وبذلك نحصل على التكرارات المناظرة لكل فئة . ولذلك فإن جدول التوزيع التكرارى يتكون من عمودين أحدهما للفئات والآخر للتكرار . ويمكن توضيح ذلك من المثال التالى :

مثال : عند عمل الاختبار الشخصى لـ 50 طالب وطالبة تمهيداً لالتحاقهم بشعبة الإعلام بكلية الآداب حصلنا على الدرجات الآتية (الدرجة من 100).

85	67	55	41	62
42	78	48	79	87
45	36	82	49	67
25	62	58	57	59
47	46	63	90	69
83	<u>12</u>	48	72	68
22	58	77	46	66
62	27	38	48	85
<u>94</u>	67	27	83	85
66	43	69	32	88

المطلوب عمل جدول تكرارى لهذه البيانات.

خطوات الحل :

1- نعين المدى Range وهو يمثل الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة فى

$$\text{البيانات المعطاه وعليه فإن المدى} = 94 - 12 = 82$$

2- نعين عدد الأقسام أو عدد الفئات وفقاً لمعادلة يول Yule

$$\text{عدد الفئات} = 2.5 \sqrt[4]{n} \text{ حيث } n = \text{عدد القيم}$$

$$= 2.5 \sqrt[4]{50} = 7 \text{ تقريباً}$$

ويفضل ألا يقل عدد الفئات عن 3 ولا يزيد عن 20 فئة

3- نعين طول الفئة = المدى ÷ عدد الفئات

$$= 82 \div 7 = 12 \text{ تقريباً}$$

4- نعين حدود الفئات : بالنسبة للحد الأدنى للفئة الأولى يجب أن يكون أقل بمقدار واحد عن أقل رقم فى البيانات. وبالنسبة للفئة الأخيرة يجب أن يكون الحد الأعلى لها أكبر من أكبر رقم فى البيانات ولو بمقدار واحد .

5- تكوين العلامات .

$$6- \text{نعين مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

7- نحسب التكرار النسبى وهو ناتج من قسمة تكرار كل فئة على مجموع التكرارات الكلية . ويجب أن يكون مجموع التكرارات النسبية مساوياً للواحد الصحيح .

### جدول التوزيع التكرارى

مركز الفئة	التكرار النسبى %	التكرار	العلامات	الفئات
17	0.04	2	11	23-11
29	0.06	3	111	35-23
41	0.16	8	111 H11	47-35
53	0.18	9	H11 H11	59-47
65	0.24	12	11 H111 H11	71-59
77	0.08	4	1111	83-71
89	0.24	12	11 H11 H11	95-83
	1.00	50		المجموع

ويلاحظ أن الفئة 23-11 تقراً من 11 إلى أقل من 23 ولا يصح تقسيم الفئات كالاتى :

11-23 ، 24-36 حيث الرقم 23.5 لا يوجد ضمن أى من الفئتين .

كما قد تكتب الفئات هكذا

-11

-23

-35 وهكذا

وذلك على اعتبار أن بداية كل فئة هى نهاية الفئة السابقة لها مباشرة.

ويلاحظ أن الجدول التكرارى السابق يسمى جدول منتظم لأن

أطوال الفئات متساوية ومغلق لأن الحد الأعلى للفئة الأخيرة معلوم .

ولكن قد توجد بعض الجداول التكرارية غير المنتظمة

والمفتوحة ومثال ذلك الجدول التكرارى التالى :

الفئات	-30	-40	-60	-90	-100	-130
التكرار	4	8	12	6	5	2

وقد تكون بعض الجداول التكرارية غير منتظمة (أى أطوال فئاتها غير متساوية) ومغلقة (أى الحد الأعلى لأخر فئة معلوم) وذلك مثل الجدول التكرارى التالى :

الفئات	-10	-30	-80	-100	200-120
التكرار	10	18	30	15	6

كما أن هناك الجداول التكرارية المزدوجة وهى التى يرصد فيها بيان عن ظاهرتين مختلفتين مثل تقديرات مجموعة من الطلبة فى مادتى الإحصاء والرياضة كالتالى :

المجموع	ضعيف	مقبول	جيد	جيد جداً	ممتاز	الرياضة الإحصاء
7				4	3	ممتاز
13		1	5	2	6	جيد جداً
6	1		3		2	جيد
5	2	3		3		مقبول
4						ضعيف
35	3	4	8	9	11	المجموع

**الجدول التكرارية المتجمعة :**

يوجد نوعان من الجداول التكرارية المتجمعة هما الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع الهابط .

## أولاً التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد :

ويكون الغرض منه معرفة عدد المفردات أو القيم التى تقل عن قيمه معينه (أقل من بداية كل فئة) وقيمه أول تكرار متجمع صاعد تساوى صفر وأخر قيمه للتكرار المتجمع الصاعد تساوى مجموع التكرارات .

مثال : كون جدول تكرارى متجمع صاعد للجدول التكرارى التالى :

المجموع	70-60	-50	-40	-30	-20	-10	الفئات
100	5	35	25	20	10	5	التكرار

جدول التكرار النسبى المتجمع الصاعد

الجدول التكرارى المتجمع

الصاعد

التكرار النسبى المتجمع	الفئات	التكرار المتجمع	الفئات
0	أقل من 10	0	أقل من 10
0.05	أقل من 20	5	أقل من 20
0.15	أقل من 30	15	أقل من 30
0.35	أقل من 40	35	أقل من 40
0.60	أقل من 50	60	أقل من 50
0.95	أقل من 60	95	أقل من 60
1.00	أقل من 70	100	أقل من 70

## ثانياً : التوزيع التكرارى المتجمع الهابط :

ويكون الغرض منه معرفة عدد القيم أو المفردات التى تزيد عن قيمه معينه. ويلاحظ أن الفئة الأولى من جدول التوزيع التكرارى المتجمع الهابط تساوى مجموع التكرارات . بينما الفئة الأخيرة تكون مساوية للصفر وذلك عكس جدول التوزيع التكرارى المتجمع الصاعد . والمثال التالى يوضح ذلك :

مثال : المطلوب عمل الجدول التكرارى المتجمع الهابط من المثال السابق

جدول التكرار النسبى المتجمع الهابط		الجدول التكرارى المتجمع الهابط	
التكرار المتجمع النسبى	الفئات	التكرار المتجمع	الفئات
1.00	10 فاكثر	100	10 فاكثر
0.95	20 فاكثر	95	20 فاكثر
0.85	30 فاكثر	85	30 فاكثر
0.65	40 فاكثر	65	40 فاكثر
0.40	50 فاكثر	40	50 فاكثر
0.05	60 فاكثر	5	60 فاكثر
0	70 فاكثر	0	70 فاكثر

### ثانياً : التمثيل البيانى :

تختلف طرق التمثيل البيانى باختلاف نوع البيانات ففى حالة البيانات الخام والمطلقة (غير المبوية فى شكل جدول تكرارى) والتي تشمل السلاسل الزمنية للظواهر المختلفة فتوجد عدة طرق لتمثيلها بيانياً منها :

- 1- طريقة الخط البيانى .
- 2- طريقة الأعمدة .
- 3- طريقة الدوائر .

أما فى حالة البيانات المبوية فى شكل جدول توزيع تكرارى فتوجد عدة طرق لتمثيلها بيانياً منها :

- 1- المدرج التكرارى .
- 2- المضلع التكرارى .
- 3- المنحنى التكرارى .
- 4- المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد .

## 5- المنحنى التكرارى المتجمع الهابط

وسوف يتم تناول كل منها على حدة .

(1) الرسوم البيانية فى حالة القيم المطلقة غير المبوية :

(أ) الخط البيانى :

وهو يمثل العلاقة بين متغيرين فإذا كان أحد المتغيرين هو الزمن فيمثل على المحور الأفقى وكان المتغير الآخر يمثل الظاهرة موضوع الدراسة فيوضع على المحور الرأسى . ويمكن المقارنة بين أكثر من ظاهرة باستخدام نفس الرسم البيانى .

مثال : الجدول التالى يوضح الأسعار المزرعية والأسعار التقديرية لمحصول القطن المصرى خلال الفترة 1985-1991 والمطلوب تمثيلها بيانياً بطريقة الخط البيانى .

جدول (1) : تطور الأسعار المزرعية والتصديرية للقطن المصرى خلال

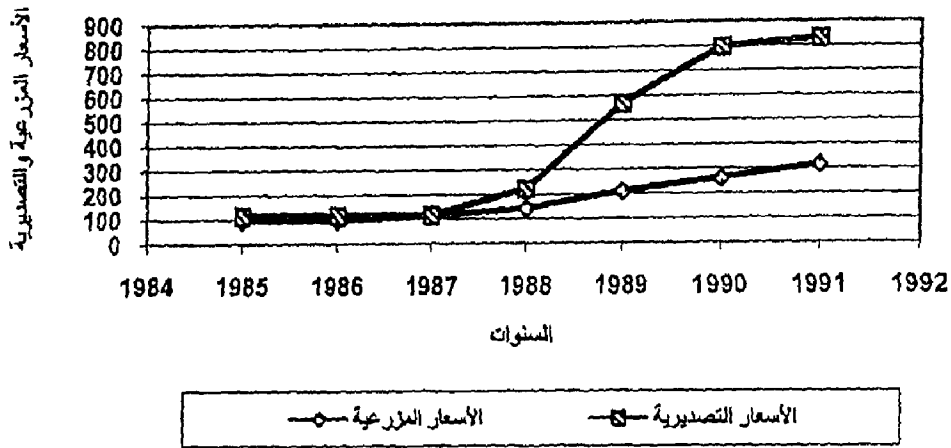
الفترة 1985-1991

(جنيه / قنطار)

الأسعار التصديرية	الأسعار المزرعية	السنوات
116.5	96.9	1985
118.7	97.1	1986
117.6	114.3	1987
222.9	143.5	1988
570.1	210.7	1989
797.4	262.7	1990
831.0	316.1	1991

المصدر : الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء ، النشرة السنوية للتجارة الخارجية ، القاهرة ، أعداد متفرقة .

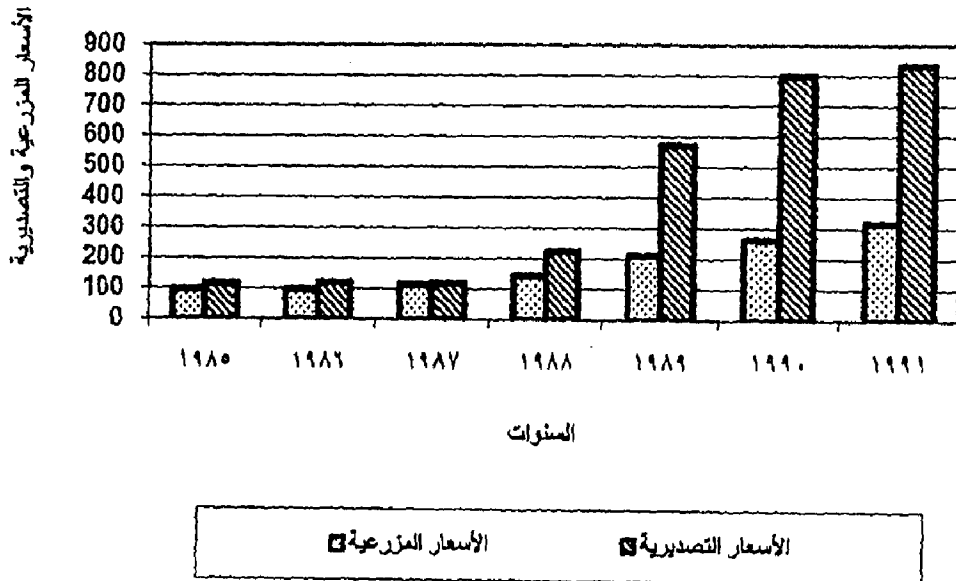
شكل (١) تطور الأسعار المزرعية والتصديرية لمحصول القطن المصري



(ب) الأعمدة البيانية :

طريقة الأعمدة البيانية من أكثر الطرق انتشاراً لسهولة استخدامها ورسمها ووفقاً لهذه الطريقة تتناسب الأعمدة البيانية في طولها مع الأعداد الممثلة لها بمعنى أن طول العمود يتناسب طردياً مع العدد الممثل له . والمثال التالي يوضح ذلك .

شكل (٢) تطور الأسعار المزرعية والتصديرية لمحصول القطن المصري





مثال : استخدم بيانات المثال السابق لتمثيلها بطريقة الأعمدة

(ج) طريقة الدائرة :

وفقاً لهذه الطريقة تقسم الدائرة إلى عدد من الأقسام بحيث تتناسب مساحة كل قسم مع أحد مكونات الظاهرة ويفضل إعطاء كل قسم لون مختلف عن الآخر لسهولة التمييز.

ويمكن تقسيم الدائرة إلى أقسام بمعلومية أن مجموع درجات الدائرة 360 درجة ولإيجاد الزاوية المركزية لكل قسم أو جزء يتم وفقاً للقاعدة التالية :

$$\text{الزاوية المركزية} = \frac{\text{قيمة الجزء}}{\text{مجموع الأجزاء الكلية}} \times 360^\circ$$

والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال : الجدول التالي يوضح التوزيع الجغرافى للمتوسط السنوى للصادرات من محصول البطاطس خلال الفترة (87-1991)

جدول (2) : التوزيع الجغرافى لصادرات مصر من البطاطس خلال الفترة (87-1991) بالألف طن .

الدولة	متوسط الصادرات بالألف طن
إنجلترا	80
فرنسا	6
اليونان	12
السعودية	27
لبنان	9
دول أخرى	26
الجملة	160

المصدر : الجهاز المركزى للتعبئة العامة والإحصاء ، النشرة الشهرية للتجارة الخارجية ، أعداد متفرقة.

الحل : نحصل أولاً على الزاوية المركزية لكل دولة

$$^{\circ}180 = ^{\circ}360 \times \frac{80}{160} = \text{الزاوية المركزية لإنجلترا}$$

$$^{\circ}13.50 = ^{\circ}360 \times \frac{6}{160} = \text{الزاوية المركزية لفرنسا}$$

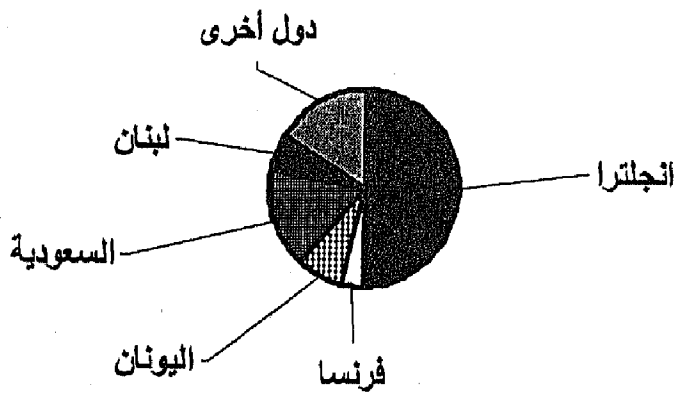
$$^{\circ}27 = ^{\circ}360 \times \frac{12}{160} = \text{الزاوية المركزية لليونان}$$

$$^{\circ}60.72 = ^{\circ}360 \times \frac{27}{160} = \text{الزاوية المركزية للسعودية}$$

$$^{\circ}20.25 = ^{\circ}360 \times \frac{9}{160} = \text{الزاوية المركزية للبنان}$$

$$\frac{^{\circ}58.50}{^{\circ}360} = ^{\circ}360 \times \frac{9}{160} \quad \begin{array}{l} \text{الزاوية المركزية للدول الأخرى} \\ \text{المجموع} \end{array}$$

شكل ( ٣ ) توزيع الصادرات المصرية من البطاطس على أهم الدول المستوردة لها



(2) الرسومات البيانية فى حالة البيانات المبوبة :

### 1- المدرج التكرارى Histogram

وهو عبارة عن مجموعة من المستطيلات المتلاصقة تمثل قاعدتها طول الفئة وارتفاعها تمثل تكرار الفئة.

( أ ) المدرج التكرارى من جدول التوزيع التكرارى المنتظم :

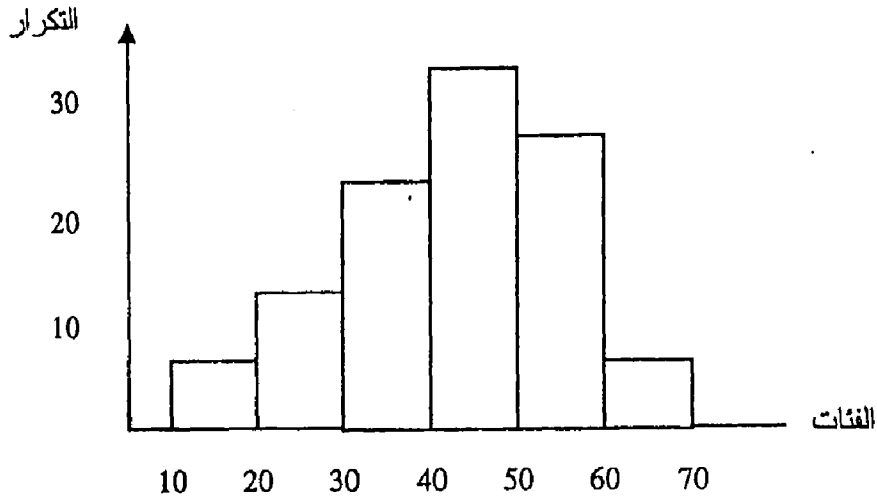
يقصد بالتوزيع التكرارى المنتظم بأنه أطوال فئاته متساوية .  
ولرسم المدرج التكرارى من التوزيع التكرارى المنتظم يتم اتباع الخطوات التالية :

- رسم محورين متعامدين أحدهما يمثل المحور الأفقى وتوضع عليه الفئات والآخر يمثل المحور الرأسى وتوضع عليه التكرارات .
- نحدد مقياس الرسم المناسب لمحور التكرارات .
- وضع الحدود الدنيا لكل فئة على المحور الأفقى بالإضافة إلى الحد الأعلى لآخر فئة .
- تمثل كل فئة مستطيل يتناسب ارتفاعه مع تكرار الفئة وبحيث تكون جميع المستطيلات متلاصقة .

مثال : ارسم المدرج التكرارى من الجدول التالى :

الفئات	-10	-20	-30	-40	-50	60-70	المجموع
التكرار	5	10	20	35	25	5	100

الحل : باتباع الخطوات السابقة لرسم المدرج التكرارى يمكن الحصول على الرسم التالى :



### المدرج التكرارى

ويلاحظ على المدرج التكرارى الآتى :

- ارتفاع المستطيلات هو أساس المقارنة طالما أن أطوال الفئات متساوية.
- فى حالة الجداول التكرارية المفتوحة يتبع نفس خطوات الرسم مع إهمال الفئات المفتوحة .

(ب) المدرج التكرارى من جدول التوزيع التكرارى غير المنتظم :

فى هذه الطريقة تكون الفئات غير متساوية ولا تعبر الارتفاعات عن التكرارات، ولذلك يلزم قبل البدء فى الرسم الحصول على التكرارات المعدلة . والتكرار المعدل يساوى التكرار الأصلى مقسوماً على طول الفئة .

مثال : ارسم المدرج التكرارى من جدول التوزيع التكرارى الآتى :

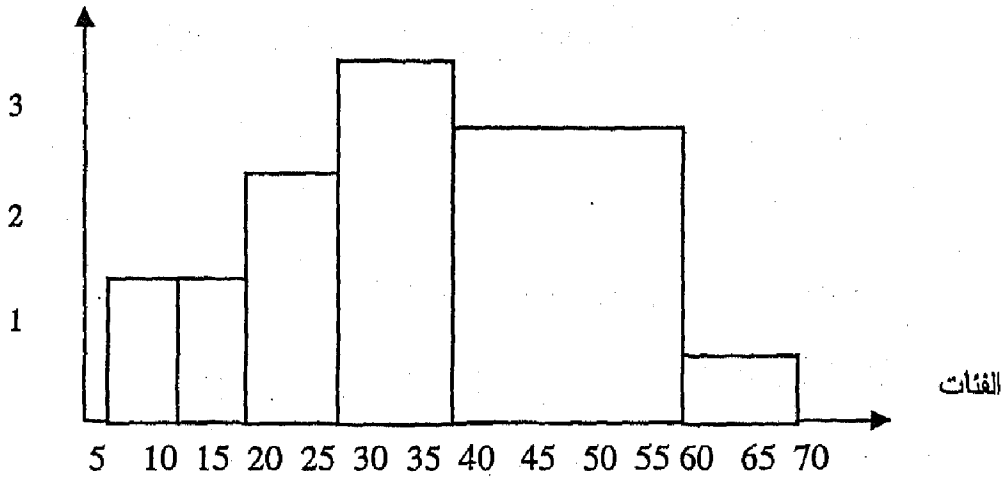
الفئات	-5	-10	-20	-30	-40	70-60	المجموع
التكرار	5	10	20	35	25	5	100

الحل : التكرار المعدل = التكرار الأصلي للفترة ÷ طول الفئة

التكرار المعدل	طول الفئة	التكرار الأصلي	الفئات
1	5	5	-5
1	10	10	-10
2	10	20	-20
3.5	10	35	-30
1.25	20	25	-40
.5	10	5	70-60
		100	المجموع

ثم نقوم برسم المدرج التكراري باتباع نفس الخطوات السابقة .

التكرار  
المعدل



المدرج التكراري

2- المضلع التكراري:

وهو عبارة عن الخط المنكسر الواصل بين مراكز الفئات . أو الخط الواصل بين منتصف القيم العليا للمدرج التكراري . ويمكن رسمه من خلال :

(ب) استخدام مراكز الفئات

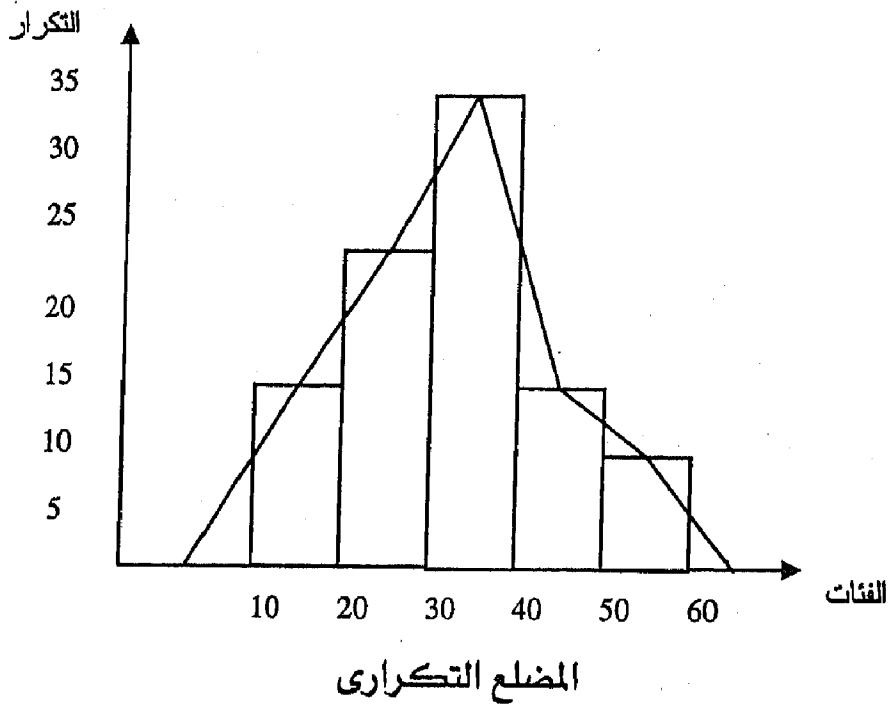
(أ) المدرج التكراري

خطوات رسم المضلع التكرارى من المدرج التكرارى :

- 1- يتم رسم المدرج التكرارى كما سبق .
- 2- نفترض وجود فئة سابقة لأول فئة بالجدول التكرارى تكرارها صفر وأيضاً وجود لاحقة لآخر فئة بالجدول التكرارى بتكرار صفر أيضاً .
- 3- ننصف القيم العليا لكل مستطيل من مستطيلات المدرج التكرارى .
- 4- نصل نقاط التصنيف ببعضها فتحصل على المضلع التكرارى .

مثال: ارسم المضلع التكرارى من بيانات جدول التوزيع التكرارى التالى:

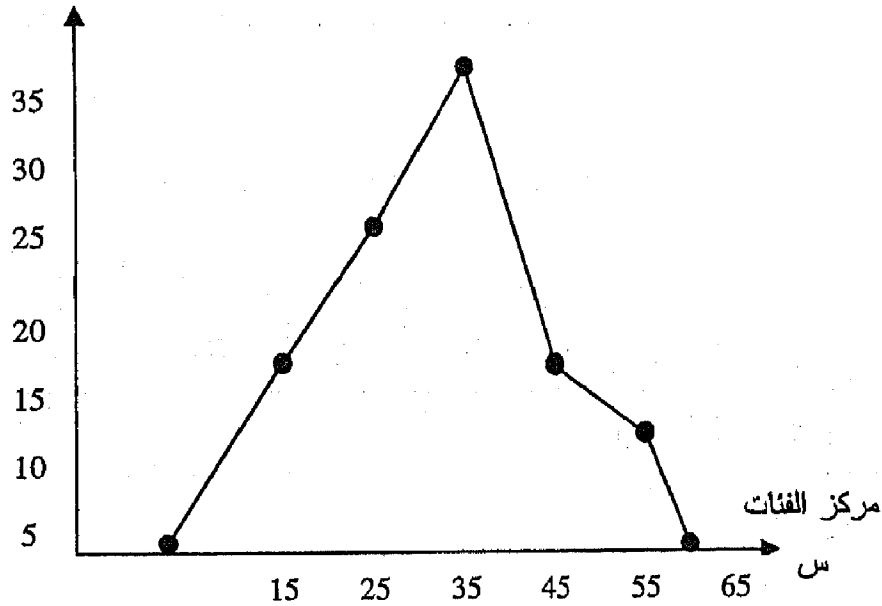
الفئات	-10	-20	-30	-40	60-50	المجموع
التكرار	15	25	35	15	10	100



خطوات رسم المضلع التكرارى باستخدام مراكز الفئات :

يمثل المضلع التكرارى فى هذه الحالة العلاقة بين مراكز الفئات والتكرارات ويتم رسمه كما سبق مع افتراض وجود فئتين سابقة ولاحقة بالجدول التكرارى بتكرار مساوياً للصفر .

مثال : من بين بيانات المثال السابق ارسم المضلع التكرارى

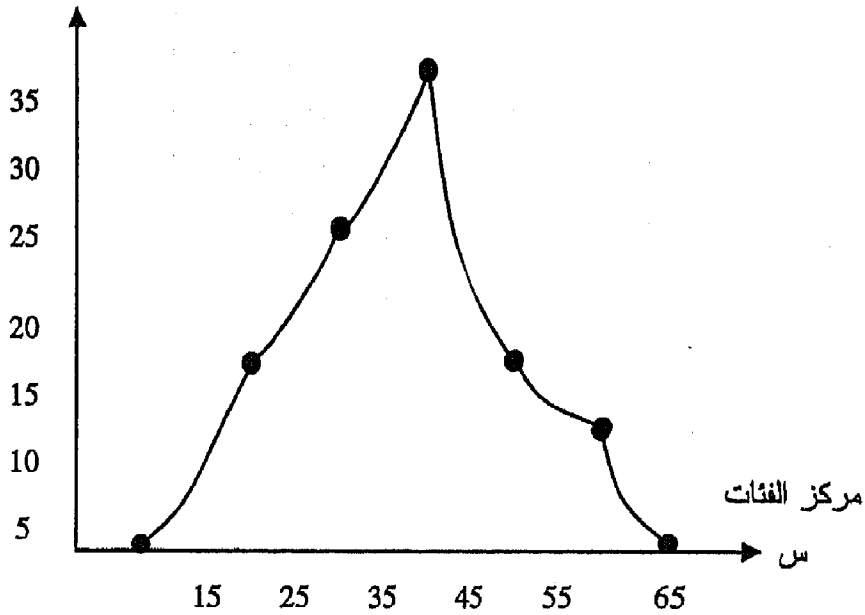


المضلع التكرارى

3- المنحنى التكرارى:

هو الخط المنحنى الواصل بين منتصف القمم العليا للمستطيلات التى يتكون منها المدرج التكرارى . ويمكن الحصول على المنحنى التكرارى أيضاً من خلال العلاقة بين مراكز الفئات والتكرار كما فى حالة رسم المضلع التكرارى .

مثال : ارسم المنحنى التكرارى من الجدول التكرارى للمثال ا التكرار



المنحنى التكرارى

4- المنحنى التكرارى المتجمع الهابط:

للحصول على المنحنى التكرارى المتجمع الهابط يلزمنا تكوين جدول تكرارى متجمع هابط ثم نرسم العلاقة بين الفئات والتكرارات المتجمع الهابطة فنحصل على المنحنى التكرارى المتجمع الهابط .

مثال : ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الهابط من بيانات الجدول التكرارى السابق .

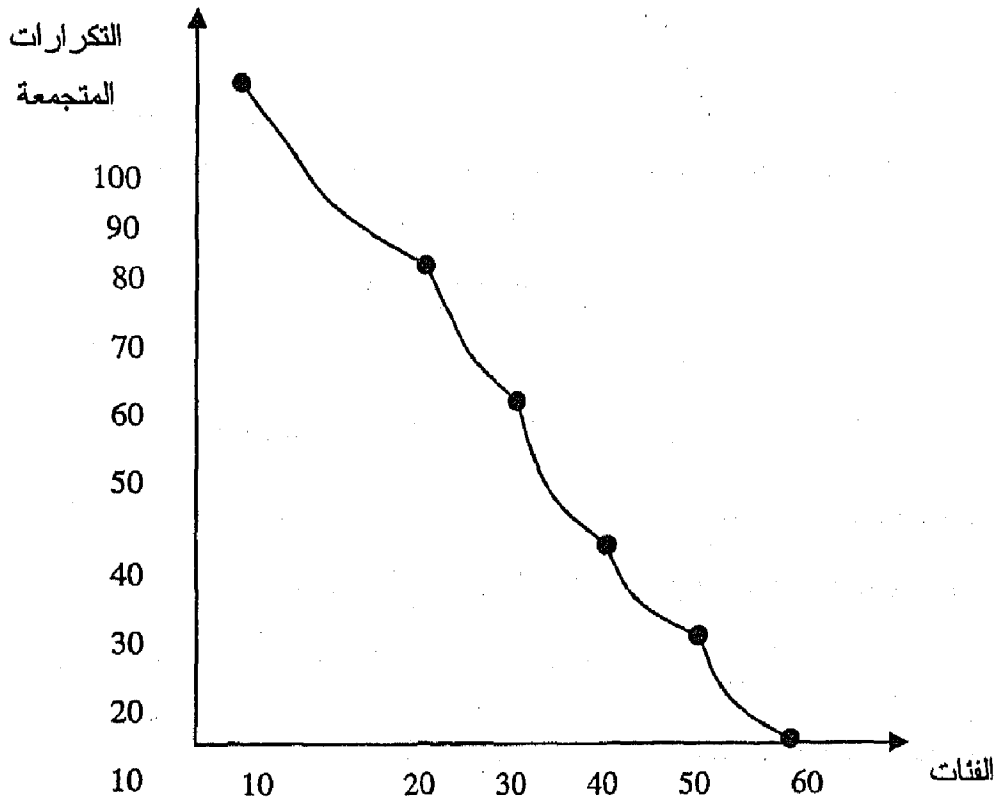
خطوات الحل :

- تكوين جدول متجمع هابط
- المحور الأفقى يمثل الفئات بمقياس رسم مناسب



- المحور الرأسى يمثل التكرارات المتجمعة الهابطة بمقياس رسم مناسب

تكرارات متجمعة	الفئات
100	10 فأكثر
85	20 فأكثر
60	30 فأكثر
25	40 فأكثر
10	50 فأكثر
0	60 فأكثر



المنحنى التكرارى المتجمع الهابط

5- المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد:

للحصول على المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد يلزمنا تكوين جدول تكرارى متجمع صاعد ثم نرسم بعد ذلك العلاقة بين الفئات

والتكرارات المتجمعة الصاعدة فنحصل على المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد .

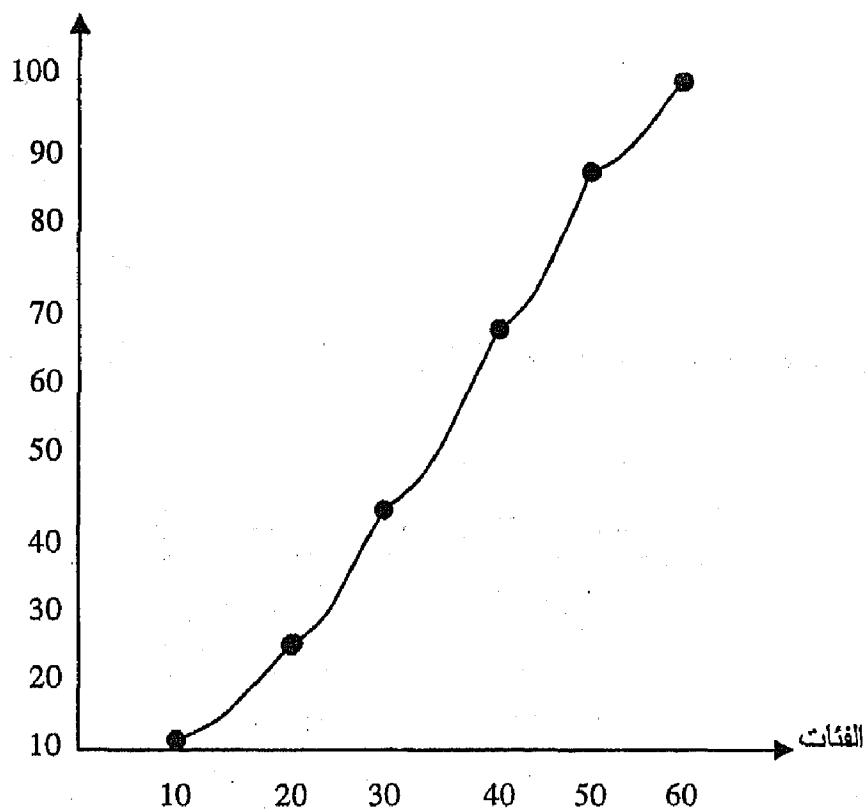
مثال : ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد من بيانات الجدول التكرارى السابق .

خطوات الحل :

- تكوين جدول متجمع صاعد
- المحور الأفقى يمثل الفئات بمقياس رسم مناسب
- المحور الرأسى يمثل التكرارات المتجمع الصاعدة بمقياس رسم مناسب

تكرارات متجمعة	الفئات
0	أقل من 10
15	أقل من 20
40	أقل من 30
75	أقل من 40
90	أقل من 50
100	أقل من 60

التكرارات  
المتجمعة



المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

## تمارين

(1) كون جدول تكرارى من البيانات التالية:

30	34	38	33	33	37	43	50	39	34
36	23	26	35	29	26	20	27	27	28
46	45	35	31	30	36	28	32	39	35
38	39	45	30	52	39	40	37	54	46
49	32	39	36	58	38	31	35	30	30
25	25	28	31	29	29	45	53	31	32
37	38	26	38	43	39	37	26	29	26
43	44	34	40	41	35	41	43	42	46
44	40	53	36	36	48	49	47	47	37
41	43	44	41	43	35	41	40	38	42

(2) من الجدول التكرارى التالى ارسم المنحنى التكرارى المتجمع

الصاعد والهابط.

الفئات	-10	-20	-30	-40	-50	-60	80-70	المجموع
التكرار	8	12	18	25	17	15	5	100

(3) من بيانات الجدول التكرارى السابق ارسم كل من :

- المدرج التكرارى

- المضلع التكرارى

- المنحنى التكرارى

(4) الجدول التالى يبين الإنتاج الكلى من القطن المصرى وكمية

الصادرات منه خلال الفترة 1985-1992 والمطلوب تصوير هذه

البيانات عن طريق :

ب- الأعمدة البيانية .

أ - الخط البيانى .

السنوات	الإنتاج الكلى من القطن بالألف قنطار	كمية الصادرات بالألف قنطار
1985	7345	2876
1986	6902	2952
1987	5421	2757
1988	5055	2068
1989	4947	1450
1990	5190	859
1991	5594	360
1992	5955	332

(5) إذا علمت أن مبيعات معارض إحدى شركات الغزل والنسيج من الأقمشة والملابس الجاهزة فى عامى 1995 ، 2000 كالاتى :

المبيعات	عام 1995 مليون دينار	عام 2000 مليون دينار
مبيعات محلية	60	120
صادرات للدول العربية	180	480
صادرات للعالم	260	600
جملة المبيعات	500	1200

والمطلوب تمثيل بيانات كل سنة بطريقة الدائرة .

(6) الجدول التكرارى التالى يمثل أجور العمال الأسبوعية للعاملين فى

إحدى شركات الاستثمار

فئات الأجور	-50	-60	-70	-80	-90	110-100	120-110
عدد العاملين	8	10	16	14	10	5	2

## المطلوب:

1- رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد واستخرج منه :

أ - نسبة العاملين الذين يحصلون على أجر أقل من 85 دينار فى الأسبوع

ب- عدد العاملين الذين تتراوح أجورهم الأسبوعية بين 80 ، 110 دينار

2- رسم المدرج التكرارى.

3- رسم المضلع التكرارى.

4- رسم المنحنى التكرارى.

(7) يوضح الجدول التكرارى التالى بيانات 300 موظفاً موزعة على

حسب السن

السن	أقل من 20	-20	-24	-30	-35	-40	50-60	المجموع
عدد الموظفين	15	35	50	80	70	30	20	300

## المطلوب

1- رسم المدرج التكرارى .

2- رسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والهابط .

3- أوجد عدد الموظفين الذين يتراوح سنهم من 20 لأقل من 40 سنة .

4- أوجد عدد الموظفين الذين يتراوح سنهم أكبر من 40 سنة .

(8) أوجد جدول التكرار النسبى لبيانات التمارين رقم (2) ، (6) ، (7) ،

السابقة .



الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency





## تمهيد :

بعد أن يقوم الباحث بجمع البيانات عن الظاهرة موضوع الدراسة يقوم بتلخيصها وتبويبها في صورة توزيعات تكرارية مختلفة ثم تمثيلها بيانياً بأحد الطرق السابق ذكرها ، وفي هذه الحالة يكون الباحث قد كوّن فكرة عن الظاهرة المراد دراستها ، ولكن ذلك لا يكفي لمقارنتها بالظواهر المثيلة المتشابهة ، ويلزم ذلك تلخيص البيانات الواردة في الجداول التكرارية في صورة أكثر دقة لكي يمكننا الحكم على دقتها أو اختلافها .

وللقيام بذلك يكون من المفيد البحث عن قيمة متوسطة تعبر عن هذا التوزيع يطلق عليها المتوسط ، وهي القيمة التي تتجمع حولها قيم الظاهرة ، ويمثل مركز أي مجموعة من القيم تلك القيمة التي تميل مجموعة القيم إلى التجمع حولها والمقياس الذي يقيس هذا المركز يسمى بمقياس النزعة المركزية . وهناك عدة مقاييس للنزعة المركزية سوف نركز منها على المقاييس التالية :

1- الوسط الحسابي Arithmetic Mean

2- الوسيط Median

3- المنوال Mode

4- الوسط الهندسي Geometric Mean

5- المتوسط الموزون Weighted Mean

وهناك عدد من الشروط يجب توافرها فى مقاييس النزعة المركزية يذكر منها :

- (1) ألا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتفرقة .
- (2) يسهل حسابه ومعالجته جبرياً .
- (3) أن يأخذ فى الاعتبار كل المفردات التى تتكون منها الظاهرة موضع الدراسة .
- (4) أن يكون للمقياس معنى وخواص مميزه .
- (5) يمكن حسابه بسرعة وسهولة .

وسوف يتم تناول هذه المقاييس سابقة الذكر سواء على مستوى القيم المطلقة أو على البيانات المبوبة فى شكل جدول توزيع تكرارى .

**أولاً : الوسط الحسابى :**

وهو يعتبر من أكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعاً واستخداماً ، ويمكن حساب الوسط الحسابى من بيانات القيم المطلقة أو من البيانات المبوبة فى شكل جداول تكرارية .

**( أ ) الوسط الحسابى باستخدام القيم المطلقة :**

**1- الطريقة المباشرة :**

إذا كان لدينا مجموعة من القيم س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> ، ... س<sub>n</sub> حيث ن عدد القيم فإن الوسط الحسابى لهذه القيم يمكن حسابه من الصيغة الرياضية التالية :

$$\bar{s} = \frac{\text{مجموع } s}{n} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

خطوات الحساب :

- 1- نجمع قيم المفردات ونرمز لها بالرمز مجموع  $s$
- 2- نحصر عدد هذه القيم ونرمز لها بالرمز  $n$
- 3- نقدر الوسط الحسابي ونرمز له بالرمز  $\bar{s}$

مثال : أوجد الوسط الحسابي للقيم التالية : 1، 2، 3، 4، 5

الحل :

$$\text{مجموع } s = 15 \quad ، \quad n = 5$$

$$\bar{s} = \frac{\text{مجموع } s}{n} = \frac{15}{5}$$

ملحوظة :

$$\frac{\text{مجموع } s}{n} = \text{من العلاقة الرياضية للوسط الحسابي } s$$

يمكن استنباط العلاقة التالية :

$$(1) \text{ مجموع } s = n \times \bar{s}$$

أى فى حالة معلومية الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات ومعرفة عددها فإنه يمكن الحصول على مجموع هذه البيانات

مثال : إذا علمت أن الوسط الحسابي لمجموعة من القيم عددها 8

هو 24 فأوجد مجموع هذه القيم

الحل : س = 24 ، ن = 8

$$\therefore \text{مجمس} = 24 \times 8 = 192$$

$$(2) \text{ ن} = \frac{\text{مجمس}}{\text{س}}$$

أى بمعلومية الوسط الحسابى لمجموعة من القيم ومجموع هذه القيم يمكن معرفة عدد هذه القيم .

مثال : أوجد عدد كتب الإحصاء التى تم بيعها للطلبة إذا علمت أن إجمالى ثمنها 500 دينار وثمان النسخة الواحدة 10 دينار .

الحل : مجمس = 500 ، س = 10

$$\therefore \text{ن} = \frac{\text{مجمس}}{\text{س}} = 50 \text{ كتاب}$$

2- طريقة الانحرافات :

وتستخدم هذه الطريقة فى حالة إذا كانت قيم مفردات الظاهرة موضع الدراسة كبيرة . وتتلخص خطوات حساب هذه الطريقة فى الآتى :

1- يتم اختيار وسط فرضى لمجموعة القيم المراد حساب الوسط الحسابى لها ويرمز له بالرمز (و) .

2- يتم طرح (و) من كل القيم فنحصل على الانحرافات والتى يرمز لها بالرمز (ح) .

حيث : ح = س - و

$$3- \text{ يطبق القانون } \bar{س} = \frac{\text{مجم ح}}{ن} + و$$

مثال أوجد الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات للقيم التالية

$$10, 17, 16, 15, 18, 14$$

الحل (أ) نختار الوسط الفرضى وليكن  $و = 10$

(ب) نحسب ح وهى  $س - و$

$$\therefore \text{ح} = 4, 8, 5, 6, 7, 0$$

$$10 + \frac{0 + 7 + 6 + 5 + 8 + 4}{6} = \bar{س} \text{ (ج)}$$

$$15 = 10 + \frac{30}{6} =$$

مثال : أوجد الوسط الحسابى لقيم المثال السابق بالطريقة

المباشرة

$$\text{الحل : } \bar{س} = \frac{\text{مجم ح}}{ن}$$

$$= \frac{10 + 17 + 16 + 15 + 18 + 14}{6}$$

$$= \frac{90}{6} = 15 \text{ وهى نفس النتيجة السابقة}$$

3- طريقة الانحرافات المختصرة:

وتختلف هذه الطريقة عن الطريقة السابقة فى إنه إذا كانت

الانحرافات (ح) التى حصلنا عليها يمكن قسّمتها على رقم معين

لتبسيط الأرقام فإنه يمكن الحصول على الانحرافات المختصرة ويرمز لها بالرمز  $\bar{c}$  وفق العلاقة الرياضية التالية .

$$\bar{s} = \left( \frac{\text{مجموع}}{n} \times \text{العامل المشترك} \right) + \text{و}$$

خطوات الحل :

1- يتم اختيار وسط فرضي من قيم الظاهرة موضوع الدراسة ويرمز له بالرمز  $\bar{c}$

2- نحسب الانحرافات (ح) حيث  $\bar{c} = s - \text{و}$

3- يتم حساب  $\bar{c}$  حيث  $\bar{c} = \text{العامل المشترك} \div \text{و}$

4- يتم حساب  $\bar{s}$  من العلاقة الرياضية السابقة

مثال : أحسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة

من القيم التالية :

110 ، 120 ، 130 ، 140 ، 150 ، 160

الحل : نفرض أن الوسط الفرضي هو 110 ونقوم بحساب (ح)،

(ح) كما في الجدول التالي :

الانحرافات المختصرة $\bar{c} = \frac{c}{10}$	الانحرافات $\bar{c} = s - \text{و}$	القيم (س)	
0	0	110	
1	10	120	
2	20	130	
3	30	140	
4	40	150	
5	80	160	
15	150	810	المجموع

$$\bar{س} = \left( \frac{\text{مجموع}}{ن} \times م \right) + و$$

$$110 + \left( 10 \times \frac{15}{6} \right) =$$

$$135 =$$

مثال : من بيانات المثال السابق أوجد الوسط الحسابي

(1) بالطريقة المباشرة (2) بطريقة الانحرافات

الحل : (1) الطريقة المباشرة

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع}}{ن}$$

$$135 = \frac{810}{6} =$$

(2) طريقة الانحرافات

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع}}{ن}$$

$$110 + \frac{150}{6} = \bar{س}$$

$$135 =$$

(ب) الوسط الحسابي من البيانات المبوبة المنتظمة :

1- الوسط الحسابي للجداول التكرارية ذات الدرجات : توجد مجموعة من البيانات على هيئة قيم للمفردات س1، س2، ... س



ولكل قيمة تكرار معينة ك مقابل لكل قيمة س على الصورة  
ك1، ك2، ... ك ويتم حساب الوسط الحسابي من العلاقة  
الرياضية .

$$\frac{\text{مجموع حاصل ضرب الدرجة} \times \text{تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}} = \text{الوسط الحسابي}$$

$$\frac{\text{مجموع س} \times \text{ك}}{\text{مجموع ك}} = \text{س}$$

خطوات الحساب :

- 1- بالإضافة إلى عمودى المسألة س، ك نكوّن عمود ثالث يشمل  
حاصل ضرب س × ك .
- 2- نوجد مجموع التكرارات وكذلك مجموع س × ك .
- 3- نطبق القانون السابق لإيجاد الوسط الحسابي .

مثال : أوجد الوسط الحسابي من الجدول التالي

درجات الطلاب (س)	3	4	5	6	7	8	المجموع
عدد الطلبة (ك)	10	15	35	20	15	5	100

الحل :

س	ك	س × ك
3	10	30
4	15	60
5	35	175
6	20	120
7	15	105
8	5	40
المجموع	100	530

$$\square \quad \text{س.} = \frac{\text{مجس} \times \text{ك}}{\text{مجك}} = \frac{530}{100} = 5.3 \text{ درجة}$$

## 2- الوسط الحسابى للبيانات المبوبة المنتظمة :

لإيجاد الوسط الحسابى للبيانات المبوبة المنتظمة أى التى فى صورة جدول توزيع تكرارى منتظم يوجد ثلاث طرق لإيجاده :

( أ ) الطريقة المباشرة :

وفيهما يستخدم القانون التالى لحساب الوسط الحسابى وهو نفس القانون المستخدم فى حالة الجداول التكرارية ذات الدرجات حيث :

$$\text{س} = \frac{\text{مجس} \times \text{ك}}{\text{مجك}}$$

حيث س تمثل مركز الفئة، ك تمثل التكرار

$$\square \quad \text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

$$\text{أو} = \frac{\text{بداية الفئة} + \text{بداية الفئة التالية}}{2}$$

خطوات الحساب :

- 1- نوجد عمود مراكز الفئات س .
- 2- نوجد عمود حاصل ضرب س × ك .
- 3- نوجد مجموع التكرارات (مجك) ومجموع س × ك .
- 4- نطبق القانون السابق لإيجاد س

مثال : أوجد الوسط الحسابي من بيانات جدول التوزيع

التكراري التالي بالطريقة المباشرة .

70-60	-50	-40	-30	-20	-10	الفئات
2	4	11	16	14	3	التكرار

الحل :

1- نكون جدول الحل وهو يشمل 4 أعمدة هما عمودى المسألة (عمود الفئات وعمود التكرارات) بالإضافة إلى عمود مركز الفئات  $s$  وعمود حاصل ضرب  $s \times k$  .

2- نوجد مركز الفئات وتوضع في عمود  $s$  .

3- نوجد حاصل ضرب  $s \times k$  .

4- نوجد مجس ، مجس  $\times k$  .

5- نطبق القانون لإيجاد  $\bar{s}$  حيث  $s = \frac{\text{مجس} \times k}{\text{مجك}}$

الفئات	التكرار (ك)	مركز الفئة (س)	$s \times k$
-10	3	15	45
-20	14	25	350
-30	16	35	560
-40	11	45	495
-50	4	55	220
70-60	2	65	130
المجموع	50		1800

$$\frac{\text{مجموع } s \times k}{\text{مجموع } k} = u$$

$$36 = \frac{1800}{50}$$

(ب) طريقة الانحرافات :

تستخدم هذه الطريقة لتبسيط الحسابات . وتعتمد هذه الطريقة على اختيار وسط فرضي وهو عبارة عن مركز الفئة المقابل لأكبر تكرار .

خطوات الحساب :

- 1- نكون جدول الحل وهو يشمل 5 أعمدة هما عمودى المسألة (عمود الفئات وعمود التكرار) وعمود مركز الفئة  $s$  وعمود  $h$  (انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي) وأخيراً عمود حاصل ضرب  $h \times k$  .
- 2- نختار الوسط الفرضي (  $u$  ) من بين مراكز الفئات وهو عادة يكون مركز الفئة الموجود أمام أكبر تكرار .
- 3- نحسب انحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي أى نحسب  $h = s - u$  و
- 4- نحسب حاصل ضرب  $h \times k$
- 5- نوجد المجموع لعمود التكرار وعمود حاصل ضرب  $h \times k$
- 6- نطبق القانون

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع } ح \times ك}{\text{مجموع } ح} + و$$

مثال : احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات لجدول التوزيع التكراري من المثال السابق .

الحل :

الفئات	التكرار (ك)	س	ح	ح × ك
-10	3	15	20-	60-
-20	14	25	10-	140-
-30	16	<u>35</u>	0	0
-40	11	45	10+	110+
-50	4	55	20+	80+
70-60	2	65	30+	60+
المجموع	50			50

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع } ح \times ك}{\text{مجموع } ح} + و$$

$$36 = 35 + \frac{50}{50} =$$

ملحوظة : تم اختيار الوسط الفرضي و = 35 وهو يشير إلى مركز الفئة الموجود أمام أكبر تكرار .

(ج) طريقة الانحرافات المختصرة :

وهذه الطريقة لا تختلف عن الطريقة السابقة وفيها تجرى الثلاث خطوات الأولى ثم نوجد العمود الخامس الذي يمثل الانحرافات

المختصرة  $\bar{C}$  وهو عبارة عن  $C$  مقسوماً على طول الفئة  $L$  ثم نوجد حاصل ضرب  $\bar{C} \times K$ .

خطوات الحساب :

1- تجرى الخطوات من 1 - 3 من طريقة الانحرافات.

2- نحسب الانحرافات المختصرة  $\bar{C} = \frac{C}{L}$

3- نوجد حاصل الضرب  $\bar{C} \times K$ .

4- نوجد مجاميع عمود  $K$  ، عمود  $\bar{C} \times K$ .

5- نحسب الوسط الحسابي من العلاقة

$$\bar{S} = \text{و} + \frac{\text{مجموع } \bar{C} \times K}{\text{مجموع } L}$$

مثال : احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة من

بيانات جدول التوزيع التكراري الأسبق

الحل :

ف	ك	س	$C = S - \text{و}$	$\bar{C} = \frac{C}{L}$	$\bar{C} \times K$
-10	3	15	20-	2-	6-
-20	14	25	10-	1-	14-
-30	16	<u>35</u>	0	0	0
-40	11	45	10+	1+	11
-50	4	55	20+	2+	8
70-60	2	65	30+	3+	6
المجموع	50				5

$$\bar{س} = و + \frac{\text{مجح} \times ك}{\text{مجك}} \times ل$$

$$36 = 10 \times \frac{5}{50} + 35 =$$

ملحوظة : لاحظ أن حساب الوسط الحسابي بأى طريقة من الطرق الثلاث السابقة يعطى نفس النتيجة .

(ج) الوسط الحسابي من البيانات المبوبة غير المنتظمة :

من خلال هذه الطريقة يمكن إيجاد الوسط الحسابي بالطرق الثلاث السابقة والخاصة بالجداول التكرارية المنتظمة ولكن عند استخدام طريقة الانحرافات المختصرة يجرى إيجاد ح بقسمة ح على عامل مشترك بدلاً من (ل) وإذا تعذر الحصول على عامل مشترك فيكتفى بطريقة الانحرافات .

مثال : احسب الوسط الحسابي من جدول التوزيع التكرارى

الآتى :

المجموع	150-120	-80	-50	-30	-20	-10	الفئات
100	10	20	34	23	8	5	التكرار

الحل :

أولا : الطريقة العادية (المباشرة) :

س × ك	س	ك	ف
75	15	5	-10
200	25	8	-20
920	40	23	-30
2210	65	34	-50
2000	100	20	-80
1350	135	10	150-120
6755		100	المجموع

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع ح} \times \text{ك}}{\text{مجموع ح}}$$

$$67.55 = \frac{6755}{100} =$$

ثانياً: طريقة الانحرافات :

ح × ك	ح	س	ك	ف
250-	50-	15	5	-10
320-	40-	25	8	-20
575-	25-	40	23	-30
0	0	<u>65</u>	34	-50
700	35+	100	20	-80
700	70+	135	10	150-120
255			100	المجموع

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع ح} \times \text{ك} + \text{و}}{\text{مجموع ح}}$$

$$67.55 = 65 + \frac{255}{100} =$$

ثالثاً : طريقة الانحرافات المختصرة :

ح × ك	$\frac{\text{ح}}{5} = \bar{\text{ح}}$	ح	س	ك	ف
50-	10-	50-	15	5	-10
64-	8-	40-	25	8	-20
115-	5-	25-	40	23	-30
0	0	0	<u>65</u>	34	-50
140	7+	35+	100	20	-80
140	14+	70+	135	10	150-120
51				100	المجموع



$$\bar{s} = \bar{w} + \frac{\text{مجا ح} \times \text{ك}}{\text{مجا ك}} \times \text{العامل المشترك}$$

$$67.55 = 5 \times \frac{51}{100} + 65 =$$

ملحوظة : لاحظ إننا قمنا باختيار عامل مشترك من قيم الانحرافات ح وهو يساوى 5 ولم يتم اختيار ل كما فى حالة الجداول المنتظمة لأن الجدول هنا غير منتظم .

خصائص الوسط الحسابى :

1- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يساوى صفر أى :

$$\text{مجا} (\text{س} - \bar{\text{س}}) = \text{صفر}$$

مثال : إذا كان لدينا القيم 3 ، 5 ، 4 ، 8

$$\text{فيكون } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجا س}}{\text{ن}} = \frac{8 + 4 + 5 + 3}{4} = 5$$

$$\text{ويكون مجا} (\text{س} - \bar{\text{س}}) = -2 + \text{صفر} - 1 + 3 = \text{صفر}$$

2- مجموع مربع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يكون أقل من

مجموع مربع انحرافات القيم عن أى مقدار آخر

مثال : من المثال السابق

$$\text{مجا} (\text{س} - \bar{\text{س}})^2 = 4 + \text{صفر} + 1 + 9 = 14$$

وإذا أخذنا انحراف القيم عن المقدار 3 مثلاً

$$\text{مج (س - 3)} = \text{صفر} + 2 + 1 + 5$$

$$\text{مج (س - 3)}^2 = \text{صفر} + 4 + 1 + 25 = 30$$

$$\therefore \text{مج (س - 3)}^2 > \text{مج (س - 3)} \text{ أي مقدار غير س}^2$$

3- الوسط الحسابي يتأثر بالقيم الشاذة لأنه يأخذ في اعتباره جميع

القيم فمثلاً إذا كان لدينا المجموعتين أ ، ب حيث :

$$\text{أ} = 1, 2, 7, 200$$

$$\text{ب} = 1, 2, 3, 4$$

فيكون الوسط الحسابي للمجموعة أ  $\bar{س}_1 =$

$$52.5 = \frac{210}{4} = \frac{200 + 7 + 2 + 1}{4}$$

ويكون الوسط الحسابي للمجموعة ب  $\bar{س}_2 =$

$$2.5 = \frac{4 + 3 + 2 + 1}{4}$$

ويلاحظ أن المجموعة أ تأثرت بشكل كبير لوجود القيمة

(200) وهي شاذة عن باقي الأرقام .

4- من الصعب حساب الوسط الحسابي من الجداول المفتوحة لصعوبة

تحديد مراكز الفئات المناظرة لها .

5- لا يمكن إيجاد الوسط الحسابي من الرسم البياني كما في حالة الوسيط والمنوال كما سوف يأتي ذكره فيما بعد .

### ثانياً : الوسيط Median

يعرف الوسيط بأنه القيمة التي تتوسط مجموعة من القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

طرق حساب الوسيط :

( أ ) من القيم المطلقة :

1- إذا كان عدد القيم المطلقة فردى فإن

ترتيب الوسيط = حيث ن عدد القيم

مثال : احسب الوسيط للقيم الآتية : 5 ، 6 ، 4 ، 3 ، 2

الحل : نرتب القيم تنازلياً 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{1+n}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$

وبالتالي يكون الوسيط هو القيمة التي يكون ترتيبها الثالث وهي 4

2- إذا كان عدد القيم المطلقة زوجياً فإنه يوجد قيمتين للوسيط

ويأخذ الوسط الحسابي لهما لنحصل على الوسيط المطلوب .

وفي هذه الحالة نحصل على ترتيب الوسيطين كالتالي :

$$\frac{n}{2} = \text{الترتيب الأول}$$

$$\text{الترتيب الثاني} = 1 + \frac{n}{2}$$

مثال : احسب الوسيط للقيم الآتية : 3 , 6 , 1 , 2 , 8 , 10

الحل : ترتيب القيم تنازلياً 10 , 8 , 6 , 3 , 2 , 1

$$\text{الترتيب الأول} = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{الترتيب الثاني} = 1 + \frac{n}{2} = 1 + 3 = 4$$

∴ يوجد قيمتين للوسيط ترتيبهما الثالث والرابع وبالنظر إلى البيانات بعد ترتيبها تنازلياً تكون هاتين القيمتين هما 6 , 3 ويكون

$$\text{الوسيط هو } 4.5 = 2 / (3 + 6)$$

(ب) حساب الوسيط من البيانات المبوبة :

يمكن حساب الوسيط من الجداول التكرارية سواء كانت

منتظمة أو غير منتظمة أو مفتوحة لأنه لا يتأثر بالقيم الشاذة .

خطوات حساب الوسيط من الجداول التكرارية :

(1) يتم حساب ترتيب الوسيط من العلاقة : ترتيب الوسيط =  $\frac{N}{2}$

(2) نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد .

(3) يحدد ترتيب الوسيط على جدول التكرار المتجمع الصاعد .

(4) يتم تحديد الفئة الوسيطة بناء على ترتيب الوسيط وهي الفئة المقابلة  
لأكبر تكرار في الجدول التكرارى .

(5) نطبق القانون التالى لإيجاد قيمة الوسيط : حيث

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ترتيب الوسيط} - \text{ت م ص السابق} \\ \hline \text{تكرار الفئة الوسيطة} \end{array} \right\} + \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} = \text{الوسيط}$$

× طول الفئة الوسيطة

ويلاحظ أن تكرار الفئة الوسيطة = ت م ص السابق لترتيب  
الوسيط - ت م ص اللاحق لترتيب الوسيط .

مثال : أوجد قيمة الوسيط جبرياً وبيانياً من جدول التوزيع

التكرارى الآتى :

المجموع	34-30	-26	-22	-18	-14	-10	الفئات
100	8	12	25	30	15	10	التكرار

الحل :

أولاً : إيجاد الوسيط جبرياً :

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع}}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط

	ت م ص	ف
	0	أقل من 10
	10	أقل من 14
ت م ص السابق	25	أقل من 18
ر	55	أقل من 22
ت م ص اللاحق	80	أقل من 26
	92	أقل من 30
	100	أقل من 34

أقل من بداية كل فئة

نحدد ترتيب الوسيط على جدول ت م ص لكي نحدد الفئة الوسيطة

الفئة الوسيطة هي (18 - 22)

الحد الأدنى للفئة الوسيطة 18

طول الفئة الوسيطة 4

ت م ص السابق لترتيب الوسيط = 25

ت م ص اللاحق لترتيب الوسيط = 55

$$\text{الوسيط} = 18 + 4 \times \frac{55 - 25}{25 - 55}$$

$$21.33 = 18 + 4 \times \frac{25}{30}$$

ثانياً : إيجاد الوسيط بيانياً :

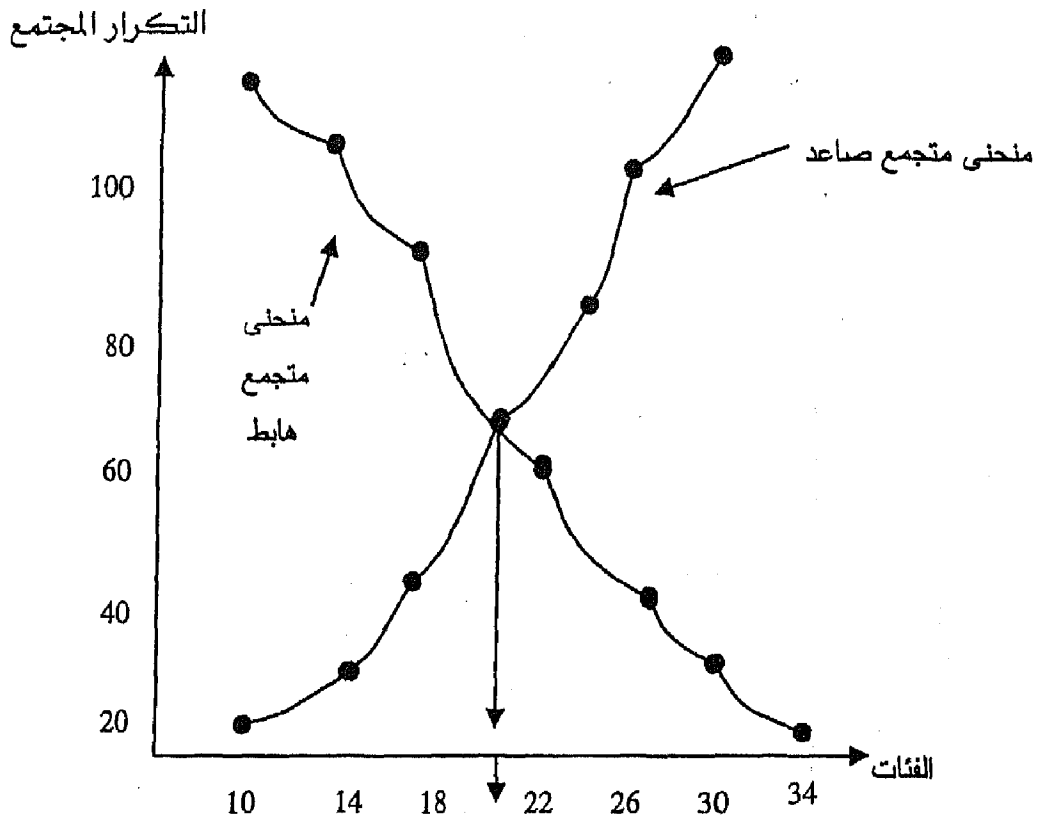
(1) هو نقطة تقاطع المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد مع المنحنى التكرارى المتجمع الهابط . وبالتالي يلزمنا عمل جدول التكرار المتجمع الهابط .

34	30	26	22	18	14	10	ف
فأكثر	فأكثر	فأكثر	فأكثر	فأكثر	فأكثر	فأكثر	
0	8	20	45	75	90	100	ت م هـ

بداية كل فئة فأكثر

ر

وباستخدام المنحنيين المتجمع الصاعد والمتجمع الهابط ومن نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط وبإسقاط عمود على المحور الأفقى تتحدد قيمة الوسيط من الجدولين كما يتضح من الرسم التالى :



21.33

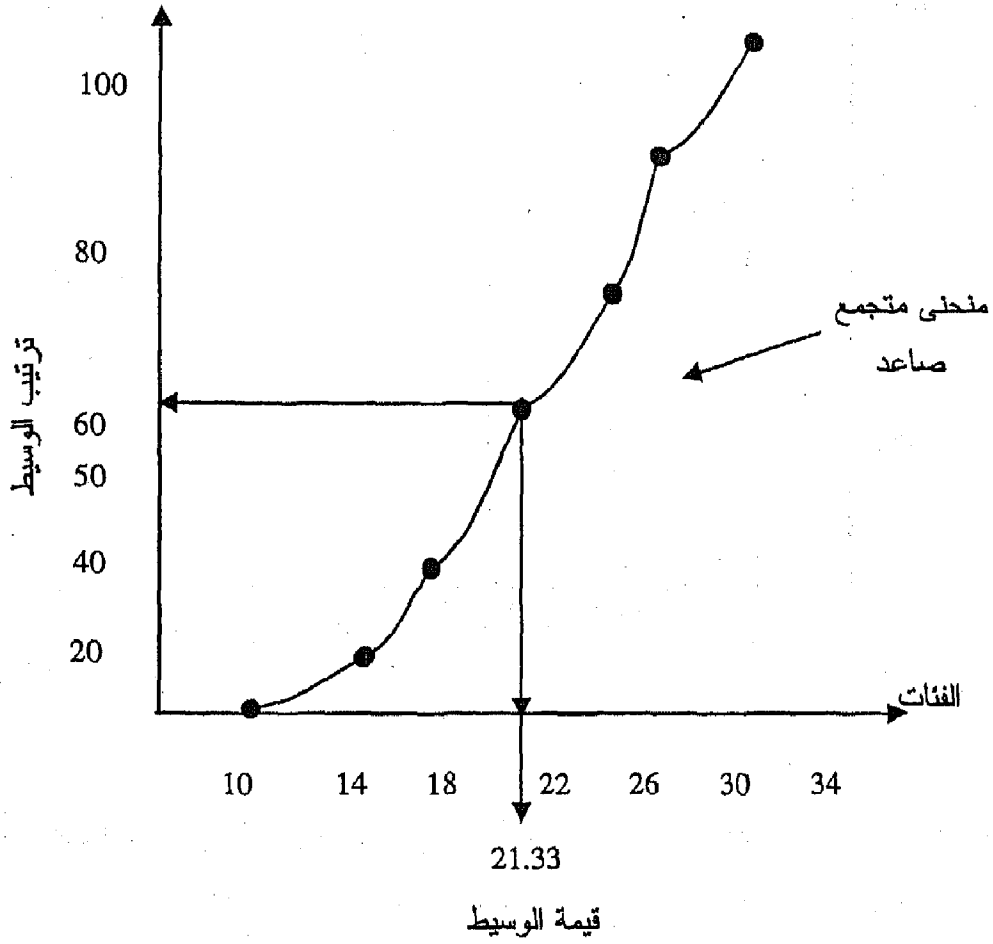
(2) يمكن إيجاد الوسيط بيانياً أيضاً باستخدام أحد المنحنيين المتجمعين (الصاعد أو الهابط) وترتيب الوسيط كما يتضح من الآتى :

- نحدد ترتيب الوسيط =  $n/2$
- نكون الجدول المتجمع الصاعد أو الهابط
- نرسم المنحنى حسب الجدول السابق
- نمد خط من نقطة ترتيب الوسيط لتتلاقى المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط ثم نسقط عموداً من نقطة التلاقى على المحور الأفقى فى نقطة تمثل بذلك قيمة الوسيط .



بافتراض أننا سوف نقوم بإيجاد الوسيط من المنحنى المتجمع

الصاعد



### ثالثاً : المنوال Mode

يُعرف بأنه القيمة الأكثر تكراراً أو شيوعاً بين مفردات مجموعة من القيم ويمكن حساب المنوال من القيم المطلقة أو البيانات المبوبة في شكل جدول توزيع تكرارى .

( أ ) حساب المنوال من القيم المطلقة :

لحساب المنوال وفقاً للتعريف السابق يتم البحث عن أكثر القيم تكراراً أو ظهوراً .

مثال : أحسب المنوال للمجموعات التالية من البيانات :

المجموعة (أ) 17، 12، 37، 22، 5، 7، 2، 1، 25

المجموعة (ب) 2، 1، 5، 6، 3، 2، 4، 10

المجموعة (ج) 4، 5، 4، 6، 8، 5، 3

الحل :

المجموعة (أ) ليس لها منوال لأن كل القيم لها نفس التكرار .

المجموعة (ب) يوجد بها منوال وهو الرقم 2 لأنه تكرر أكثر من غيره.

المجموعة (ج) يوجد بها منوالين هما 4، 5 لأن لهما نفس التكرار .

ويلاحظ من الحل السابق أنه لا يمكننا اعتبار المنوال في

الحالتين (أ)، (ج) مقياساً للنزعة المركزية .

(ب) حساب المنوال من البيانات المبوبة :

(1) الطريقة الحسابية : يوجد أكثر من طريقة لحساب المنوال بالطريقة

الجبرية منها طريقة الرافعة وطريقة بيرسون (الفروق المجزئة) .

أ - طريقة الرافعة :

وفيها تمثل الفئة المنوالية برافعة تحمل عند بدايتها التكرار

السابق لتكرار الفئة المنوالية، وعند نهايتها التكرار اللاحق للفئة

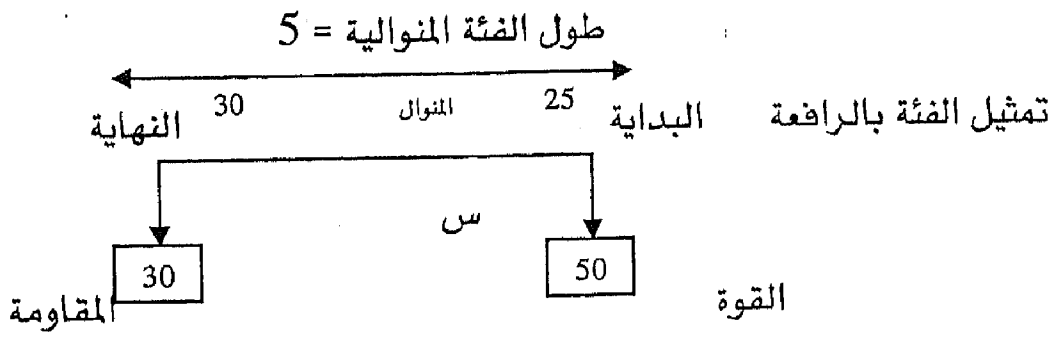
المنوالية . والفئة المنوالية هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار في جدول

التوزيع التكرارى .

مثال : أوجد المنوال حسابياً من الجدول التكرارى الآتى :

ف	- 10	- 15	- 20	- 25	- 30	35 - 40	المجموع
ك	10	30	50	100	30	20	240

الحل : الفئة المنوالية المقابلة لأكبر تكرار هي 25 - 30



نفرض أن المسافة من بداية الفئة المنوالية إلى المنوال = س،  
وبالتالي تكون المسافة من المنوال حتى نهاية الفئة المنوالية هي 5 - س أي  
طول الفئة المنوالية - س .

وللحصول على قيمة س نطبق قانون الروافع

$$\text{القوة} \times \text{ذراعها} = \text{المقاومة} \times \text{ذراعها}$$

$$50 \times \text{س} = 30 \times (5 - \text{س})$$

$$50 \text{س} = 150 - 30 \text{س}$$

$$80 \text{س} = 150$$

$$\therefore \text{س} = \frac{150}{80} = 1.875$$

$$80$$

$\therefore$  المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

$$26.875 = 1.875 + 25 =$$

(ب) طريقة بيرسون (الفروق المجزئة) :

خطوات الحل:

- 1- نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة المقابلة لأكبر تكرار .
- 2- نوجد  $f_1$  = تكرار الفئة المنوالية - التكرار السابق لها.
- 3- نوجد  $f_2$  = تكرار الفئة المنوالية - التكرار اللاحق لها.
- 4- نحسب المنوال من القانون التالي

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times l$$

مثال : أوجد المنوال من المثال السابق

الحل : الفئة المنوالية 25 – 30

الحد الأدنى للفئة المنوالية = 25

تكرار الفئة المنوالية = 100

التكرار السابق للفئة المنوالية = 50

التكرار اللاحق للفئة المنوالية = 30

$$f_1 = 50 - 100 = 50$$

$$f_2 = 30 - 100 = 70$$

ل = الحد الأعلى للفئة المنوالية - الحد الأدنى للفئة المنوالية

$$= 30 - 25 = 5$$

$$\therefore \text{المنوال} = 25 + \frac{50}{70 + 50} \times 5$$

$$= 27.08 = \frac{250}{120} + 25 =$$

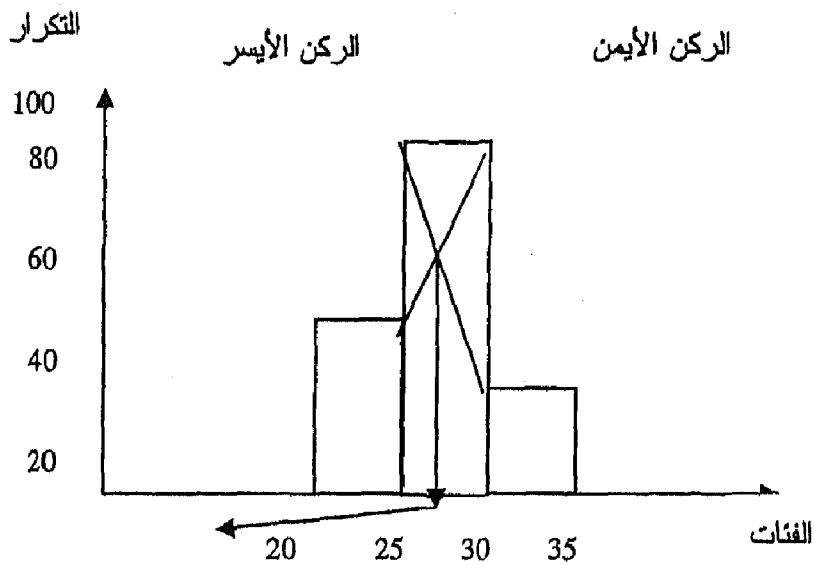
وبلاحظ إن نتائج هذه الطريقة أدق من الطريقة السابقة لأن طريقة الراضعة تهمل تكرار الفئة المنوالية، أما طريقة بيرسون فتأخذها في الاعتبار .

## (2) الطريقة البيانية لإيجاد المنوال :

تتلخص هذه الطريقة في رسم المدرج التكرارى (علاقة بين الفئات والتكرار) ومن تكرار الفئة المنوالية والسابقة واللاحقة لها يتم إيجاد المنوال، ويتم إيصال الركن الأيمن للفئة المنوالية بالركن الأيمن للفئة السابقة لها وإيصال الركن الأيسر للفئة المنوالية بالركن الأيسر للفئة اللاحقة لها وعند تقاطع الخطين المتصلين بالأركان نسقط عمود على المحور الأفقى الممثل للفئات فنحصل على قيمة تقريبية للمنوال وذلك كما يتضح من المثال التالى :

مثال : أوجد المنوال بيانياً من الجدول التكرارى للمثال السابق

الحل : نحدد الفئة المنوالية والسابقة لها واللاحقة لها ورسم مدرج تكرارى للثلاث فئات كما يلى :



حساب المنوال من الجداول غير المنتظمة :

عند حساب المنوال من الجداول غير المنتظمة يلزم تعديل التكرار أولاً بالحصول على التكرار المعدل وذلك قبل تحديد الفئة المنوالية ثم يكمل الحل بإحدى الطرق السابقة، ويكون التكرار المعدل مساوياً للتكرار الأصلي مقسوماً على طول الفئة. وتكون الفئة المنوالية هى المقابلة لأكبر تكرار معدل .

مثال : أوجد قيمة المنوال من الجدول التكرارى التالى :

المجموع	20-18	-15	-14	-12	-10	ف
120	20	30	40	20	10	ك

الحل : يلاحظ أن هذا الجدول غير منتظم ولذلك يلزم أولاً

الحصول على التكرار المعدل كما يلى :

ف	ك	ل	ك	التكرار المعدل ←
-10	10	2	5	
-12	20	2	10	
-14	40	1	40	
-15	30	3	10	
20-18	20	2	10	
المجموع	120			

الفئة المنوالية وهي التي تقابل أكبر تكرار معدل وهو 40

وتكون الفئة المنوالية هي 14-15 وبالتالي فإن

$$\text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} = 14$$

$$\text{تكرار الفئة المنوالية} = 40$$

$$\text{التكرار السابق للفئة المنوالية} = 10$$

$$\text{التكرار اللاحق للفئة المنوالية} = 10$$

$$\text{طول الفئة المنوالية (ل)} = 1$$

$$f_1 = 10 - 40 = 30$$

$$f_2 = 10 - 40 = 30$$

$$\text{المنوال} = 14 + \frac{30}{30 + 30} \times 1$$

$$= 14 + \frac{1}{2} = 14.5$$

## العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية

توجد عدة علاقات بين مقاييس النزعة المركزية الثلاثة السابق ذكرها ، وتتوقف هذه العلاقة على تماثل التوزيع أو التواءه كما يتضح فيما يلي :

1- إذا كان التوزيع متماثلاً فإن

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{الوسيط} = \text{المنوال}.$$

2- إذا كان التوزيع غير متماثل أو ملتوى فإن :

أ - إذا كان التوزيع ملتوى ناحية اليسار فإن :

$$\text{الوسط الحسابي} > \text{الوسيط} > \text{المنوال}$$

ب- إذا كان التوزيع ملتوى ناحية اليمين فإن

$$\text{الوسط الحسابي} < \text{الوسيط} < \text{المنوال}$$

$$3- \text{الوسط الحسابي} \times 2 = 3 \times \text{الوسيط} - \text{المنوال}$$

$$\text{ومنها الوسط الحسابي} = \frac{3 \times \text{الوسيط} - \text{المنوال}}{2}$$

$$4- \text{المنوال} = 3 \times \text{الوسيط} - 2 \times \text{الوسط الحسابي}$$

$$5- \text{المتوسط} - \text{المنوال} = 3 (\text{المتوسط} - \text{الوسيط})$$

### رابعاً : الوسط الهندسي Geometric Mean

إذا كان لدينا مجموعة من القيم يرمز لها بالرمز س1، س2، ...س ن فإن الوسط الهندسي لهذه المجموعة من القيم يمكن حسابه من الصيغة الرياضية التالية:



الوسط الهندسى  $S_n = \sqrt[n]{1s \times 2s \times \dots \times ns}$  ..... (أ)

حيث  $n$  هي عدد القيم

أى إنه يساوى الجذر التوئى لحاصل ضرب مجموعة القيم المعطاة بالعدد  $n$ .

ويمكن باستخدام اللوغاريتمات اختصار العمليات الحسابية المعقدة فإذا رمزنا للوسط الهندسى بالرمز  $h$  ونأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن

$$\log h = \frac{1}{n} (\log 1s + \log 2s + \dots + \log ns) \quad \text{..... (ب)}$$

ومن خصائص اللوغاريتمات  $\log a^b = b \log a$

$$\log a \times b = \log a + \log b$$

وتطبيق هاتين الخاصيتين على المعادلة (ب) ينتج

$$\log h = \frac{1}{n} (\log 1s + \log 2s + \dots + \log ns)$$

$$= \frac{1}{n} \log 1s \dots ns$$

وذلك يعنى أن لوغاريتم الوسط الهندسى لمجموعة من القيم يساوى الوسط الحسابى للوغاريتمات هذه القيم .

مثال : أوجد الوسط الهندسى لمجموعة القيم 60 , 55 , 70 , 62 , 67

$$\text{الحل : } \log h = \frac{1}{5} (\log 60 + \log 50 + \log 70 + \log 62 + \log 67)$$

$$(1.83 + 1.79 + 1.84 + 1.74 + 1.77) \frac{1}{5} =$$

$$1.80 = (8.98) \frac{1}{5} =$$

وبالنظر في جداول الأعداد المقابلة ينتج أن هـ = 62.60 تقريباً .

حل آخر : يمكن حل التمرين السابق مباشرة باستخدام المعادلة

(أ) لحساب الوسط الهندسى .

$$\sqrt[5]{67 \times 62 \times 70 \times 50 \times 60} = \text{هـ}$$

$$\sqrt[5]{959547000} = \sqrt[5]{959547000} =$$

$$= 62.58 \text{ تقريباً}$$

ملحوظة : للحصول على الجذر الخامس لهذا الرقم باستخدام

الآلة الحاسبة نتبع الخطوات التالية :

1- نكتب الرقم المطلوب إيجاد الجذر الخامس له في الآلة الحاسبة .

2- ننتك على زر  أو  في الآلة الحاسبة

3- ننتك على زر

4- نكتب 0.2 وهي قيمة  $\frac{1}{5}$

5- ننتك على علامة  فنحصل على الجذر المطلوب

للتدريب : أوجد  $\sqrt[5]{32}$  (الحل 20)

أوجد  $\sqrt[5]{243}$  (الحل 3)

ملحوظة : الوسط الهندسى هو الوسط المثالى فى حالة حساب متوسط النسب أو المعدلات .

طريقة أخرى لاستخدام الماكينة أو الآلة الحاسبة :

1- نكتب الرقم المطلوب إيجاد جذره وليكن جذر (ن) .

2- نك على زر  $\boxed{INV}$  أو  $\boxed{Shift}$

3- نك على زر  $\boxed{\div}$  نكتب دليل الجذر أو قيمة (ن)

4- نك على علامة  $\boxed{=}$  فنحصل على المطلوب

للتدريب : أوجد  $\sqrt[7]{150}$  (الحل 2.0458)

أوجد  $\sqrt[8]{260}$  (الحل 2.0038)

أوجد  $\sqrt[12]{4658}$  (الحل 2.0215)

ملحوظة : إذا كانت  $n = \sqrt[n]{s}$  حيث ن تسمى دليل الجذر

فإن  $n = (s)^{\frac{1}{n}}$  حيث  $\frac{1}{n}$  تسمى الأس

وبمعلومية الخاصية مقام الأس = دليل الجذر فإنه يمكننا

تحويل أى جذر فمثلاً :

$$\sqrt[10]{s} = (s)^{\frac{1}{10}}$$

$$\sqrt[8]{s} = (s)^{\frac{1}{8}} \text{ وهكذا}$$

إيجاد الوسط الهندسى فى حالة البيانات المبوية :

فى هذه الحالة للحصول على الوسط الهندسى يطبق القانون

التالى :

$$\text{هـ} = \sqrt[n]{\text{س}_1^{\text{ك}_1} \times \text{س}_2^{\text{ك}_2} \times \dots \times \text{س}_n^{\text{ك}_n}} \quad (1) \dots$$

حيث مج ك هى مجموع التكرارات

ك<sub>1</sub>.... ك<sub>2</sub> هى التكرارات

س هى مركز الفئة

ويأخذ لوغاريتم الطرفين من المعادلة (1) فإن

$$\frac{1}{\text{مج ك}} \left[ \text{س}_1^{\text{ك}_1} \times \text{س}_2^{\text{ك}_2} \times \dots \times \text{س}_n^{\text{ك}_n} \right] \text{مج ك} = \text{لو هـ}$$

$$\frac{1}{\text{مج ك}} \left[ \text{لوس}_1^{\text{ك}_1} + \text{لوس}_2^{\text{ك}_2} + \dots + \text{لوس}_n^{\text{ك}_n} \right] =$$

$$\frac{1}{\text{مج ك}} \left[ \text{ك}_1 \text{لوس}_1 + \text{ك}_2 \text{لوس}_2 + \dots + \text{ك}_n \text{لوس}_n \right] =$$

$$= \frac{\text{مج ك لوس}}{\text{مج ك}}$$

مج ك

مثال : أوجد الوسط الهندسى من الجدول التكرارى التالى :

60-50	-40	-30	-20	-10	الفئات
8	20	35	25	12	التكرار

الحل : نكون الجدول التالي :

ك لوس	لوس	س	ك	ف
17.640	1.176	15	12	-10
34.925	1.397	25	25	-20
54.040	1.544	35	35	-30
74.385	1.653	45	20	-40
95.700	1.740	55	8	60-50
276.69			100	المجموع

$$\text{لوه} = \frac{\text{مجدك لوس}}{\text{مجدك}} = \frac{276.69}{100} = 2.7669$$

∴ ه = 584.66

ملحوظة : لإيجاد قيمة ه نجرى الخطوات التالية .

1- نكتب قيمة لوه فى الآلة الحاسبة .

2- نضغط على IN V ثم نضغط على زر Log فنحصل على قيمة ه

خامساً : المتوسط الموزون :

وفى بعض الأحيان يسمى المتوسط الحسابى المرجح ويستخدم فى حالة إذا كان لبعض القيم وزناً أكثر من غيرها ، فإذا أردنا أن نأخذ الأهمية النسبية فى الاعتبار عن حساب المتوسط الحسابى فيفضل استخدام المتوسط الموزون فإذا كان لدينا القيم س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> ، ... ، س<sub>n</sub> والوزن المقابل لكل قيمة هو و<sub>1</sub> ، و<sub>2</sub> ، ... ، و<sub>n</sub> فالمتوسط الحسابى الموزون لهذه القيم يعبر عنه بالعلاقة .

$$\frac{س1 و19 + س2 و20 + \dots + سn وn}{و1 + و2 + و3 + \dots + وn} = \text{الوسط الحسابي الموزون}$$

$$= \frac{\text{مجس و}}{\text{مج و}}$$

مج و

مثال : مصنع ملابس لدية ثلاثة أنواع من البدل الجاهزة، فإذا كان سعر البدله من النوع الأول 250 دينار ومن النوع الثانى 350 دينار ومن النوع الثالث 500 دينار، وإذا علمت أن النوع الأول يوجد منه 100 قطعة والنوع الثانى 60 قطعة والنوع الثالث 40 قطعة فأوجد متوسط سعر القطعة .

الحل :

$$\text{المتوسط الموزون} = \frac{40 \times 500 + 60 \times 350 + 100 \times 250}{40 + 60 + 100} = 330 \text{ دينار}$$

## تمارين

(1) أوجد الوسط الحسابي للقيم 15 , 12 , 7 , 20 , 8 , 10 مرة  
بالطريقة العادية ومرة أخرى بطريقة الانحرافات ومرة ثالثة  
بالطريقة المختصرة .

(2) لديك جدول التوزيع التكرارى التالى

ف	-15	-25	-35	-45	-55	-65	-75	95-85	المجموع
ك	5	10	10	25	20	15	10	5	100

أوجد : 1- الوسط الحسابى بالطريقة العادية.

2- الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات.

3- الوسط الحسابى بطريقة الانحرافات المختصرة.

(3) أوجد الوسيط لمجموعتى البيانات الآتية :

مجموعة (أ) : 8,9,20,17,15

مجموعة(ب) : 30,9,25,16,18,20

(4) أوجد الوسيط من بيانات جدول التوزيع التكرارى التالى

ف	-10	-20	-30	-40	-50	70-60	المجموع
ك	10	20	30	50	40	10	160

(5) أوجد المنوال من مجموعتى البيانات الآتية :

مجموعة ( أ ) : 1,2,4,3,5,2

مجموعة (ب) : 1,3,5,2,3,4,5

(6) أوجد المنوال من بيانات جدول تمرين (4)

(7) أوجد قيمة المنوال من جدول التوزيع التكرارى التالى :

ف	-20	-24	-28	-30	-35	50-40	المجموع
ك	40	60	80	40	20	12	252

(8) أوجد الوسط الحسابى والوسيط والمنوال للقيم الآتية :

(أ) : 8,6,4,6,7,8,6,5

(ب) : 5,12,4,12,9,6

(9) من الجدول التكرارى التالى :

ف	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	90-80	المجموع
ك	5	10	15	20	35	50	20	5	160

أوجد :1- الوسط الحسابى

2- الوسيط جبرياً وبيانياً

3- المنوال جبرياً وبيانياً

4- العلاقة بين الوسط الحسابى والوسيط والمنوال

(10) احسب الوسط الهندسى للقيم 190,180,114,136,105

(11) أحد شركات الموبيل تباع ثلاثة أنواع من الأجهزة نوكيا وأر

يكسون وموتورولا سعر القطعة من النوع الأول 1200 دينار ومن

النوع الثانى 1100 دينار ومن النوع الثالث 900 دينار فإذا كان

متوافر لدى الشركة 10 قطع من النوع الأول و25 قطعة من النوع

الثانى و15 قطعة من النوع الثالث . فأوجد متوسط سعر القطعة

من كل نوع من الأنواع الثلاثة .





## الفصل الرابع

مقاييس التشتت *Dispersion*



تمهيد :

يقصد بالتشتت درجة الاختلاف أو التفاوت بين مجموعة من القيم ، فإذا كانت القيم متقاربة من بعضها يكون تشتتها أقل والعكس صحيح أى إذا كانت متباعدة عن بعضها يكون تباينها كبير.

وقد تكون مقاييس النزعة المركزية السابق ذكرها غير معبرة صراحة عن طبيعة الظاهرة محل البحث والدراسة لأنه قد يتساوى متوسط أى مجموعتين من القيم ولكن فى نفس الوقت يكون هناك اختلاف أو تباين كبير بين مفردات كل منهما مما يعطى نتائج مضللة فى حالة الاكتفاء بنتائج المتوسط فقط .

ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالى :

مثال : إذا كان لدينا مجموعتين من القيم

مجموعة (1) : 8 , 10 , 12 , 14 , 16

مجموعة (2) : 2 , 4 , 12 , 18 , 24

فالوسط الحسابى فى كل من المجموعتين يساوى 12 فإذا اكتفينا بالوسط الحسابى فقط لأعطينا انطباعاً بأن مجموعتى البيانات (1) ، (2) متشابهتين فى حين أن قيم المجموعة (1) أكثر تقارباً وبالتالي أقل تبايناً من قيم المجموعة (2)

فمثلاً المدى للمجموعة (1) هو  $16 - 8 = 8$

والمدى للمجموعة (2) هو  $24 - 2 = 22$

وبالتالى يقال أن المجموعة (2) أكثر تشتتاً من المجموعة (1) .

ومن أهم مقاييس التشتت :

- 1- المدى Range
- 2- الانحراف المتوسط Average Deviation
- 3- الانحراف الربيعي Quartile Deviation
- 4- الانحراف المعياري Standard Deviation
- 5- معامل الاختلاف Coefficient of Variation

### أولاً: المدى Range

هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها في الحساب، ويعرف بأنه عبارة عن الفرق بين أكبر وأقل قيمة من بين مفردات القيم. ويعتبر المدى أقل مقاييس التشتت استخداماً لاعتماده على قيمتين فقط في حسابه لذا فقد يعطى بيانات مضللة في حالة وجود قيم شاذة متطرفة. بالإضافة إلى صعوبة حسابه من الجداول المفتوحة مما يلزم الرجوع للقيم الأصلية .

### ثانياً: الانحراف الربيعي Quartile Deviation

ويطلق عليه في بعض الأحيان نصف المدى الربيعي . ويستخدم هذا المقياس لمعالجة عيوب المدى وأهمها تأثره بالقيم الشاذة والمتطرفة ، كما أنه المقياس التشتتي الوحيد الذي يستخدم في حالة البيانات المبوبة في شكل جدول توزيع تكراري مفتوح . ويعبر عن نصف المدى الربيع بالصيغة الرياضية التالية :

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

الحل أولاً : نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد

		التكرار المتجمع	الفئات
		0	أقل من 20
		10	أقل من 30
1ر	→	25	أقل من 40
2ر	→	55	أقل من 50
3ر	→	77	أقل من 60
		91	أقل من 70
		100	أقل من 80

$$25 = \frac{100}{4} = \frac{\text{مجمك}}{4} = \text{ترتيب الربع الأدنى}$$

فئة الربع الأدنى 50 - 40

$$\text{الربع الأدنى} = 40 + \frac{10 - 25}{10 - 55} \times 10$$

$$= 43.33 \text{ تقريباً}$$

(ب) الربع الأعلى (3ر) Upper Quartile

هو القيمة التي تقسم مجموعة القيم إلى قسمين بحيث يقع

75% من القيم قبلها و 25% من القيم بعدها .

وخطوات حساب الربيع الأعلى هي نفسها خطوات حساب الربيع الأدنى مع الاختلاف في ترتيب الربيع الأعلى وقانون الربيع الأعلى هو :

$$\text{ترتيب الربيع الأعلى} = \text{مجدك} \times \frac{3}{4}$$

$$\text{الربيع الأعلى} = \text{الحد الأعلى لفئة الربيع الأعلى}$$

$$\left[ \frac{\text{ترتيب الربيع الأعلى} - \text{ت م ص السابق لترتيب الربيع الأعلى}}{\text{ت م ص اللاحق} - \text{ت م ص السابق}} \right] +$$

$$\times \text{طول فئة الربيع الأعلى}$$

مثال : احسب الربيع الأعلى من المثال السابق.

$$\text{الحل : ترتيب الربيع الأعلى} = \text{مجدك} \times \frac{3}{4}$$

$$75 = \frac{3}{4} \times 100 =$$

$$\text{فئة الربيع الأعلى} = 60 - 50$$

$$\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2} = 10 \times \frac{55 - 75}{55 - 77} + 50 = \text{الربيع الأعلى} = 59.09 \text{ تقريباً}$$

مثال أوجد الانحراف الربيعي من بيانات جدول التوزيع

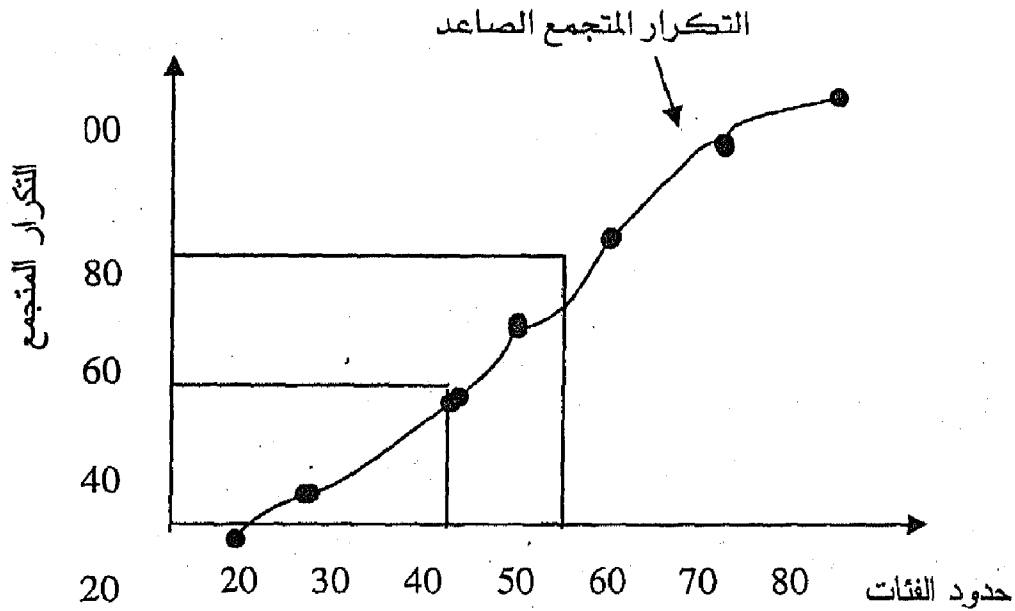
التكراري السابق .

$$\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2} = \text{الحل : الانحراف الربيعي} =$$

$$7.88 = \frac{43.33 - 59.09}{2} =$$

## إيجاد الربيعين بيانياً :

لإيجاد قيمة الربيع الأدنى نعين ترتيبه على المحور الرأسى الذى يمثل التكرار المتجمع الصاعد ثم نرسم خطاً أفقياً ليقابل المتجمع الصاعد فى نقطه ، نسقط منها عموداً على المحور الأفقى الذى يمثل حدود الفئات لنحصل على قيمة الربيع الأدنى . ولإيجاد قيمة الربيع الأعلى نحدد ترتيبه على المحور الرأسى ونتبع نفس الطريقة لتعيين قيمته على المحور الأفقى فنجد قيمته = 59.09 كما يتضح من الرسم .



## Mean Deviation : الانحراف المتوسط

ويعرف بأنه متوسط القيمة العددية لانحرافات القيم عن وسطها الحسابى . وهذا المقياس مؤشر لمدى تقارب أو تباعد مجموعة من القيم عن وسطها الحسابى.



ويمكن حساب الانحراف المتوسط من القيم المطلقة أو من البيانات المبوبة .

### (أ) حساب الانحراف المتوسط من القيم المطلقة :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{1}{n} \text{مجم} |s - \bar{s}|$$

حيث  $n$  = عدد القيم

وأن القيمة العددية لأي عدد سالب = موجب نفس العدد

$$4 = |4 - 4|$$

مثال : احسب الانحراف المتوسط للقيم 4 , 5 , 8 , 3

$$5 = \frac{3 + 8 + 5 + 4}{4} = \bar{s}$$

القيم (س)	$s - \bar{s}$
4	$4 - 5 = -1$
5	$5 - 5 = 0$
8	$8 - 5 = 3$
3	$3 - 5 = -2$
المجموع	6

$$1.5 = \frac{6}{4} = \text{الانحراف المتوسط}$$

(ب) حساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة :

لحساب الانحراف المتوسط من البيانات المبوبة نتبع الخطوات التالية :

1- نحسب الوسط الحسابي من جدول التوزيع التكراري بأحد الطرق

الثلاثة السابق ذكرها

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع س ك}}{\text{مجموع س}}$$

2- نحسب القيمة العددية لانحرافات مركز كل فئة عن الوسط

$$\text{الحسابي أي نحصل على } |س - \bar{س}|$$

3- نضرب  $|س - \bar{س}|$  في تكرار كل فئة ثم نحصل على

$$\text{مجموع } |س - \bar{س}|$$

4- نطبق العلاقة التالية للحصول على الانحراف المتوسط

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجموع } |س - \bar{س}|}{\text{مجموع س}}$$

مثال : احسب الانحراف المتوسط من جدول التوزيع التكراري التالي

ف	-10	-20	-30	-40	50-60	المجموع
ك	5	15	50	20	10	100

الحل

الفئات	التكرار	س	س ك	$ س - \bar{س} $	ك $ س - \bar{س} $
-10	5	15	75	21.5	107.5
-20	15	25	375	11.5	172.5
-30	50	35	1750	1.5	75.0
-40	20	45	900	8.5	170
50-60	10	55	550	18.5	185
المجموع	100		3650		710

$$36.50 = \frac{3650}{100} = \frac{\text{مج س} \times \text{ك}}{\text{مج ك}} = \text{الوسط الحسابى}$$

$$7.1 = \frac{710}{100} = \frac{|\bar{\text{س}} - \text{س}| \text{ مج ك}}{\text{مج ك}} = \text{الانحراف المتوسط}$$

### رابعاً: الانحراف المعياري Standard Deviation

وهو من أهم مقاييس التشتت وأكثرها استخداماً وذلك لدخوله فى حساب كثير من المقاييس الإحصائية الأخرى. وهو يشبه الانحراف المتوسط فى اعتماده على كل قيم المجموعة ونحصل عليه بتربيع انحرافات القيم عن وسطها الحسابى (بدلاً من إهمال الإشارة كما فى حالة الانحراف المتوسط) وبذلك نحصل على مقياس آخر للتشتت يسمى بالتباين Variance ويرمز له بالرمز  $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}$$

وهو عبارة عن متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى وللحصول على الانحراف المعياري نحصل على الجذر التربيعى للتباين .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$$

أى أن الانحراف المعياري (ع) هو الجذر التربيعى للتباين (ع<sup>2</sup>) ويمكن حساب الانحراف المعياري من القيم المطلقة أو من البيانات المبوبة .

أولاً : القيم المطلقة :

1- حساب الانحراف المعياري بالطريقة المطولة باستخدام القيم المطلقة :

يتضح مما سبق أن حساب التباين بالطريقة السابقة يحتاج إلى عمليات حسابية كثيرة ومعقدة خاصة إذا احتوى الوسط الحسابي  $\bar{س}$  على كسور مما يتبعه احتواء انحرافات القيم عن وسطها الحسابي  $(س - \bar{س})$  على كسور أيضاً ومن ثم صعوبة حساب مربعاتها ، لذلك من المفضل استخدام طريقة أخرى لحساب التباين لا تتضمن حسابات كثيرة ومعقدة وهذه الطريقة هي :

$$ع^2 = \frac{\sum \text{مجس}^2}{ن} - \left[ \frac{\sum \text{مجس}}{ن} \right]^2$$

أي أن التباين هو ( متوسط المربعات - مربع المتوسط )

وبالتالي فإن الانحراف المعياري يكون :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum \text{مجس}^2}{ن} - \left[ \frac{\sum \text{مجس}}{ن} \right]^2}$$

وتسمى هذه الطريقة باسم الطريقة المطولة

مثال : اثبت أن  $\text{مج}(س - \bar{س})^2 = \sum \text{مجس}^2 - 2\bar{س}\sum \text{مجس} + ن\bar{س}^2$

$$\sum \text{مجس}^2 - \frac{(\sum \text{مجس})^2}{ن} =$$

الحل :  $\text{مج}(س - \bar{س})^2 = \sum \text{مجس}^2 - 2\bar{س}\sum \text{مجس} + ن\bar{س}^2$

$$= \sum \text{مجس}^2 - 2\bar{س}\sum \text{مجس} + ن\bar{س}^2$$

$$\frac{\text{مجس}^2}{\text{ن}} + \frac{\text{مجس}^2}{\text{ن}} = \text{مجس}^2 =$$

$$\frac{\text{مجس}^2}{\text{ن}} - \text{مجس}^2 =$$

ويضرب الطرفين في 1 / ن

$$2 \left[ \frac{\text{مجس}}{\text{ن}} \right] - \frac{\text{مجس}^2}{\text{ن}} = \frac{\text{مجس}^2(\bar{\text{س}} - \text{س})}{\text{ن}}$$

مثال : أوجد الانحراف المعياري للقيم الآتية : 3 , 8 , 5 , 4

$$5 = \frac{3+8+5+4}{4} = \text{س} : \text{الحل}$$

س	س - $\bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$
4	1-	1
5	0	0
8	3	9
3	2-	4
المجموع		14

$$1.87 = \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{\text{مجس}^2(\bar{\text{س}} - \text{س})}}{\text{ن}} = \text{ع}$$

حل آخر:

س	س <sup>2</sup>	
4	16	
5	25	
8	64	
3	9	
المجموع	114	20

$$= ع \sqrt{\frac{\text{مجموع } س^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجموع } س}{ن}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{114}{4} - \left(\frac{20}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{28.5 - 25} = 1.87$$

2- حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات:

وفيها يتم اختيار وسط فرضي بدلاً من الوسط الحسابي، ثم

نستخدم القانون التالي لحساب الانحراف المعياري.

$$= ع \sqrt{\frac{\text{مجموع } س^2}{ن} - \left(\frac{\text{مجموع } س}{ن}\right)^2}$$

حيث ح = س - و

س ← قيمة المشاهدة

و ← الوسط الفرضي

مثال : احسب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات من بيانات

المثال السابق .

الحل : البيانات هي 4 , 5 , 8 , 3

نفرض أن الوسط الفرضي و = 5

ح <sup>2</sup>	ح = س - و	س
1	1-	4
0	0	5
9	3	8
4	2-	3
14	0	المجموع

$$1.87 = \frac{\sqrt{14}}{4} = \sqrt{\frac{0}{4}} - \frac{14}{4} =$$

3- حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة :

ومن خلال هذه الطريقة يتم قسمة الانحرافات (ح) على رقم

ثابت كعامل مشترك ثم نستخدم هذه البيانات في الحصول على

الانحراف المعياري من خلال تطبيق القانون التالي :

$$ع = ت \times \sqrt{\frac{\text{مجم ح}^2}{ن} - \frac{(\text{مجم ح})^2}{ن^2}}$$

$$\frac{ح}{ت} = ح = \text{حيث ت هي العامل المشترك ، ح}$$

مثال : أوجد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة للقيم

145 , 140 , 135 , 130 , 125

الحل

قيم س	ح = س - 130	ح = $\frac{ح}{ت}$	$ح^2$
125	5-	1-	1
130	0	0	0
135	5+	1	1
140	10+	2	4
145	15+	3	9
المجموع	25	5	15

$$ع = ت \times \sqrt{\frac{\text{مجم ح}^2}{ن} - \frac{(\text{مجم ح})^2}{ن^2}}$$

$$ع = 5 \times \sqrt{\frac{25}{5} - \frac{15^2}{5^2}}$$

$$ع = 5 \times \sqrt{1 - 3}$$

$$ع = 7.07 = \sqrt{2} \times 5 =$$



ثانياً : البيانات المبوبة :

1- حساب الانحراف المعياري بالطريقة المطولة :

يمكن حساب الانحراف المعياري من البيانات المبوبة في

شكل جدول توزيع تكراري بالطريقة المطولة كما يأتي .

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجس}^2 ك}{\text{مجك}} - \left( \frac{\text{مجس ك}}{\text{مجك}} \right)^2}$$

حيث س هي مركز الفئة ، ك هي التكرار

مثال : احسب الانحراف المعياري بالطريقة المطولة من بيانات

الجدول التكراري:

المجموع	150-140	-130	-120	-110	-100	-90	ف
50	2	4	11	16	14	3	ك

الحل : نكون الجدول التالي :

س <sup>2</sup> ك	س ك	س	ك	ف
27075	285	95	3	-90
154350	1470	105	14	-100
211600	1840	115	16	-110
171875	1375	125	11	-120
72900	540	135	4	-130
42050	290	145	2	150-
679850	5800		50	المجموع

$$= \sqrt{2 \left( \frac{5800}{50} \right) - \frac{679850}{50}} = \epsilon$$

$$= \sqrt{13456 - 13597} =$$

$$= \sqrt{141} = 11.9 \text{ تقريباً}$$

2- حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات :

لتسهيل العمليات الحسابية يمكن اختيار وسط فرضي (و) من بين مراكز الفئات (س) وتحسب الانحرافات عن هذا الوسط الفرضي ويتم حساب الانحراف المعياري من الصيغة التالية :

$$= \sqrt{2 \left( \frac{\text{مجم ك}}{\text{مجم ك}} \right) - \frac{\text{مجم ك}^2}{\text{مجم ك}}} = \epsilon$$

ويلاحظ من هذه الصيغة أنه تتبع نفس الخطوات السابق ذكرها عند حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات ثم يزداد على ذلك عمود واحد هو  $\text{مجم ك}^2$  كما يتضح من المثال التالي :

مثال : احسب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات من بيانات

المثال السابق .

الحل :

ح <sup>2</sup> × ك	ح × ك	ح = س - و	س	ك	ف .
1200	60-	20-	95	3	-90
1400	140-	10-	105	14	-100
0	0	0	<u>115</u>	16	-110
1100	110	10	125	11	-130
1600	80	20	135	4	150-
1800	60	30	145	2	140
7100	50			50	المجموع

لاحظ أننا اخترنا القيمة 115 كوسط فرضي، والوسط

الفرضي عادة يكون مركز الفئة الموجود أمام أكبر تكرار.

$$= \epsilon \sqrt{\left( \frac{50}{50} \right)^2 - \frac{7100}{50}}$$

$$= \sqrt{1 - 142} = 11.9 \text{ وهي نفس القيمة السابقة}$$

3- حساب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة :

في حالة التوزيعات المنتظمة ذات أطوال الفئات المتساوية يمكن

استخدام الانحرافات المختصرة وذلك بقسمة انحرافات القيم عن الوسط

الفرضي على طول الفئة (ل). ويمكن الحصول على الانحراف المعياري

من الصيغة التالية :

$$= \frac{\sqrt{\frac{\sum \bar{C}^2}{n} - \frac{(\sum C)^2}{n^2}}}{\sqrt{L}} = \bar{C}$$

حيث ل : طول الفئة

$$\bar{C} = \frac{\sum C}{n} \quad , \quad C = S - O$$

مثال : احسب الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة

من بيانات المثال السابق :

الحل :

ف	ك	س	ح	ح	ح ك	ح <sup>2</sup> ك
-90	3	95	20-	2-	6-	12
-100	14	105	10-	1-	14-	14
-110	16	115	0	0	0	0
-120	11	125	10	1	11	11
-130	4	135	20	2	8	16
140	2	145	30	3	6	18
المجموع	50				5	71

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{50}{50}\right) - \frac{71}{50}}}{\sqrt{10}} = \bar{C}$$

$$= \frac{\sqrt{1.41}}{\sqrt{10}} = 11.9 \text{ تقريباً وهي نفس القيمة السابقة}$$

## خامساً : معامل الاختلاف Coefficient of Variation

وهو مقياس إحصائي وصفى يستخدم للحكم على مدى التشتت بين مجموعتين انحرافهما المعياري متساوي . ويطلق على معامل الاختلاف اسم مقياس التشتت النسبي ويستخدم أيضاً في المقارنة بين نتائج ظاهرتين خاصة إذا كان التمييز بينهما مختلف .

ويتم استخدام أى من القوانين التالية فى حساب معامل

الاختلاف :

$$(1) \text{ معامل الاختلاف} = 100 \times \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}}$$

أو

$$(2) \text{ معامل الاختلاف} = 100 \times \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}}$$

أو

$$(3) \text{ معامل الاختلاف} = 100 \times \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{متوسط الربيعين}}$$

$$100 \times \frac{1r - 3r}{1r - 3r} =$$

ملحوظة : من فوائد معامل الاختلاف أنه يستخدم فى المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر إذا كان كل منهما مقاس بوحدات تختلف عن وحدات قياس الآخر لأنه مقياس نسبي لا يميز كما هو الحال فى

مقاييس التشتت الأخرى حيث تكون مميزة بنفس وحدات التمييز الأصلية .

مثال : احسب معامل الاختلاف من جدول التوزيع التكرارى للمثال السابق .

الحل :

$$100 \times \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} = \text{معامل الاختلاف}$$

الانحراف المعياري = 11.9 من المثال السابق

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{و} + \frac{\text{مجاك} \times \bar{ل}}{\text{مجاك}}$$

$$116 = 10 \times \frac{5}{50} + 115 =$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = 100 \times \frac{11.9}{116} = 10.26 \% \text{ تقريباً}$$

مثال : أيهما أقل تشتت من المجموعتين (1) ، (2) حيث

مجموعة (1) : 12 , 10 , 8

مجموعة (2) : 102 , 100 , 98

$$\text{الحل : } \bar{س}_1 = \frac{12 + 10 + 8}{3}$$

$$100 = \frac{98 + 100 + 102}{3} = \bar{س}2$$

$$2 \left( \frac{\text{مجس}}{ن} \right) - \frac{\text{مجس}^2}{ن} \sqrt{\quad} = 1ع$$

$$1.63 = 2 \left( \frac{30}{3} \right) - \frac{308}{3} \sqrt{\quad} =$$

$$1.63 = 2 \left( \frac{30}{3} \right) - \frac{3008}{3} \sqrt{\quad} = 2ع$$

$$\%16.3 = 100 \times \frac{1.63}{10} = 1خ$$

$$\%1.63 = 100 \times \frac{1.63}{10} = 2خ$$

∴ يلاحظ أن بيانات المجموعة (2) أقل تشتتاً من بيانات المجموعة (1)

بالرغم من تساويهما في الانحراف المعياري .

## تمارين

(1) أوجد المدى والانحراف المتوسط والانحراف المعياري للقيم التالية :

22 , 14 , 11 , 8 , 5

(2) احسب الانحراف المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف من جدول التوزيع التكراري التالي .

الفئات	-30	-40	-50	-60	80-70	المجموع
التكرار	9	22	36	25	8	100

(3) فيما يلي التوزيع التكراري لدرجة 100 طالب في مادة الإحصاء .

الفئات	-50	-60	-70	-80	100-90	المجموع
التكرار	3	10	18	40	29	100

والمطلوب إيجاد :

- 1- الربيع الأدنى والربيع الأعلى حسابياً وبيانياً .
- 2- معامل الاختلاف بطريقتين مختلفتين .
- (4) احسب الانحراف المعياري والانحراف المتوسط من بيانات جدول التوزيع التكراري للتمرين السابق .
- (5) فيما يلي إنتاجية مساحات مختلفة من القطن والكتان موزعة في

شكل جدول توزيع تكراري كالاتي :

المسافة بالأفدنة	-30	-40	-50	-60	-70	90-80
إنتاج القطن بالطن	8	16	20	24	20	12
إنتاج الكتان بالطن	4	8	10	12	10	6



والمطلوب مقارنة تشتت الإنتاجية لكل من محصولى القطن والكتان .

(6) من الجدول التكرارى التالى

32-28	-24	-20	-16	-12	-8	-4	الفئات
50	10	20	40	20	3	2	التكرار

والمطلوب : إيجاد مقياس للتشتت ومعامل الاختلاف .

(7) أوجد نصف المدى الربيعى والمنوال حسابياً وبيانياً من جدول التوزيع

التكرارى للتمرين رقم (6) .

(8) أظهرت نتيجة امتحان طلبة الفرقة الثالثة كلية الآداب فى مادة

الإحصاء ومادة الاجتماع عن الآتى .

الإحصاء      الاجتماع

الوسط الحسابى لدرجة الطلاب      84      68

الانحراف المعيارى لدرجة الطلاب      7      17

والمطلوب مقارنة تشتت الدرجات فى مادتى الإحصاء والاجتماع .

(9) إذا كان متوسط أجر المرأة العاملة فى أحد المصانع هو 300 دينار

شهرياً بانحراف معيارى قدره 18 دينار ومتوسط أجر الرجل فى

نفس المصنع 400 دينار شهرياً بانحراف معيارى قدره 15 دينار ،

وضح أيهما أكثر تشتت أجر المرأة أم أجر الرجل .



الفصل الخامس

*Correlation* الارتباط



## تمهيد:

مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت السابق ذكرها من المقاييس الإحصائية التي تصف متغيراً واحداً ، بينما يختص الارتباط بقياس العلاقة بين متغيرين ويتم قياس هذه العلاقة من خلال مقياس يطلق عليه معامل الارتباط **Correlation Coefficient** .

ونتيجة معامل الارتباط تحدد قوة واتجاه العلاقة بين المتغيرين موضع الدراسة فإذا كانت إشارة معامل الارتباط موجبة دل ذلك على العلاقة الطردية بين المتغيرين بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين يؤدي إلى زيادة المتغير الآخر . بينما إذا كانت إشارة معامل الارتباط سالبة دل ذلك على العلاقة العكسية بين المتغيرين بمعنى أن زيادة أحد المتغيرين تؤدي إلى نقص المتغير الآخر .

وتتحدد قيمة معامل الارتباط بين  $\pm 1$  فإذا رمزنا لمعامل

الارتباط بالرمز  $r$  فإن  $r$  لها الدرجات التالية :

$$(1) \quad r = \pm 1 \text{ يوجد ارتباط تام طردى أو عكس}$$

$$(2) \quad 0.7 < r < 1 \text{ يوجد ارتباط قوى طردى أو عكس}$$

$$(3) \quad 0.4 < r < 0.7 \text{ يوجد ارتباط وسط طردى أو عكس}$$

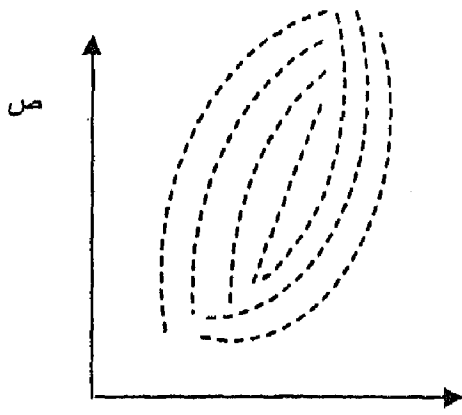
$$(4) \quad \text{صفر} < r < 0.7 \text{ يوجد ارتباط ضعيف طردى أو عكس}$$

$$(5) \quad r = \text{صفر} \text{ لا يوجد ارتباط بين المتغيرين .}$$

ويمكن الاستعانة بالتمثيل البياني لقيم المتغيرين موضع الدراسة

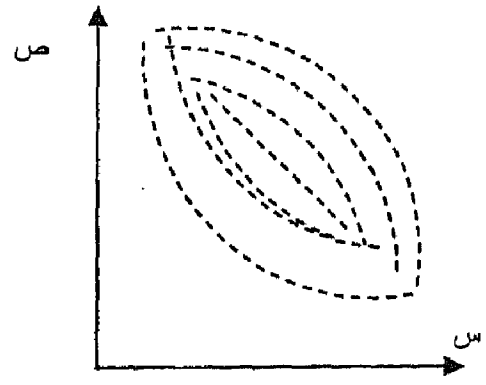
لاستخدام شكل الانتشار لمعرفة اتجاه العلاقة بينهما كما يتضح من

الأشكال البيانية التالية :



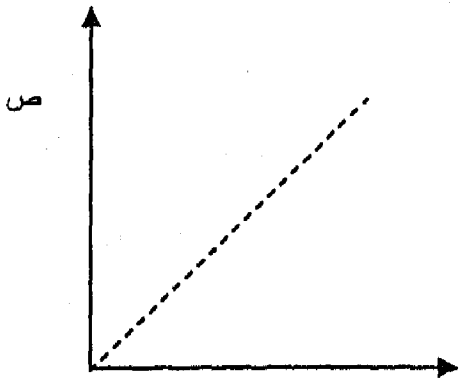
علاقة طردية بين قيم س ، ص

ومعامل الارتباط يأخذ قيمة موجبة



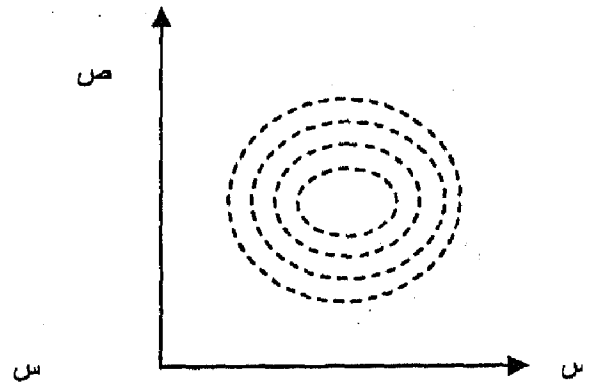
علاقة عكسية بين قيم س ، ص

ومعامل الارتباط يأخذ قيمة سالبة



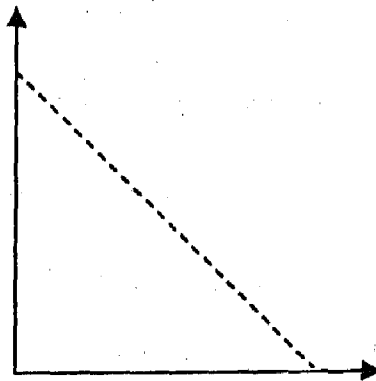
علاقة طردية تامة بين قيم س ، ص

ومعامل الارتباط يأخذ قيمة الواحد



عدم وجود ارتباط بين قيم س ، ص

ومعامل الارتباط يأخذ قيمة صفر



علاقة عكسية تامة بين قيم س ، ص

وقيمة معامل الارتباط = -1

## خصائص معامل الارتباط :

1- إذا أضيف أو طرح مقدار ثابت من قيم المتغيرين س ، ص المراد تقدير معامل الارتباط لهما فإن ذلك لا يؤثر على حساب معامل الارتباط وتستخدم هذه الخاصية فى استخدام الطرق المختزلة لحساب معامل الارتباط .

2- إذا تم ضرب أو قسمة قيم المتغيرين س ، ص فى مقدار ثابت فإن ذلك لا يؤثر أيضاً على معامل الارتباط .

حساب معامل الارتباط الخطى (بيرسون) :

يستخدم معامل الارتباط لقياس العلاقة بين الظواهر الكمية

كما فى التالى :

(1) حساب معامل الارتباط للقيم المطلقة :

إذا فرض أن لدينا قيم المتغيرين س ، ص فإنه يمكن قياس الارتباط بينهما وفقاً لمعامل ارتباط بيرسون نسبة إلى العالم بيرسون

$$\text{حيث } r = \frac{\text{مجم } \sum \text{ص} - \text{س ص}}{n \text{ عم } \text{ص}}$$

$$\text{حيث } \text{عم} = \sqrt{\frac{\text{مجم } \sum \text{ص}^2}{n} - \left(\frac{\text{مجم } \sum \text{ص}}{n}\right)^2}$$

الانحراف المعياري لقيم س

$$\text{حيث } E_{ص} = \sqrt{\left( \frac{\text{مج ص}}{ن} \right)^2 - \frac{\text{مج ص}^2}{ن}}$$

كما يمكن حساب معامل الارتباط وفقاً للصيغ التالية:

(2) طريقة الانحرافات البسيطة: وتستخدم الصيغة التالية لحساب (ر)

$$ن \text{ مج ح ص} - (\text{مج ح ص}) (\text{مج ص})$$

$$= \frac{\sqrt{\left( \frac{ن \text{ مج ح ص} - (\text{مج ح ص}) (\text{مج ص})}{ن} \right)^2 - \left( \frac{ن \text{ مج ح ص} - (\text{مج ح ص}) (\text{مج ص})}{ن} \right)^2}}{ن}$$

حيث ح ص تمثل انحراف قيم س عن الوسط الفرضي (أ) = س - أ

ح ص تمثل انحراف قيم ص عن الوسط الفرضي (ب) = ص - ب

(3) طريقة الانحرافات المختصرة:

يمكن الحصول على الصيغة المختصرة وذلك بقسمة ح ص على

عامل مشترك وكذلك ح ص وتستخدم العلاقة التالية لحساب قيمة (ر):

$$ن \text{ مج ح ص} - (\text{مج ح ص}) (\text{مج ص})$$

$$= \frac{\sqrt{\left( \frac{ن \text{ مج ح ص} - (\text{مج ح ص}) (\text{مج ص})}{ن} \right)^2 - \left( \frac{ن \text{ مج ح ص} - (\text{مج ح ص}) (\text{مج ص})}{ن} \right)^2}}{ن}$$

مثال: أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص

5	4	3	2	1	س
11	9	7	5	3	ص



الحل :

ص <sup>2</sup>	س <sup>2</sup>	ص س	ص	س	
9	1	3	3	1	
25	4	10	5	2	
49	9	21	7	3	
81	16	36	9	4	
121	25	55	11	5	
285	55	125	35	15	المجموع

ن مج س ص - (مج س) (مج ص)

$$\dots =$$

$$\sqrt{\frac{(ن مج س^2 - (مج س)^2) (ن مج ص^2 - (مج ص)^2)}{ن مج س ص - س ص}}$$

$$= \sqrt{\frac{[ن مج س^2 - (مج س)^2] [ن مج ص^2 - (مج ص)^2]}{ن (ن مج س ص - س ص)}}$$

$$\therefore = \sqrt{[2(35) - 285 \times 5] [2(15) - 55 \times 5]}$$

$$1 = \frac{100}{10000} = \frac{100}{200 \times 50}$$

∴ يوجد ارتباط طردى تام بين قيم المتغيرين س ، ص

ثانيا : طريقة الانحرافات :

باستخدام الانحرافات حول الوسط الفرضى

س	ص	حس	ح	ح <sup>2</sup> حس	ح <sup>2</sup> س	ح <sup>2</sup> ص
1	3	2-	4-	8	4	16
2	5	1-	2-	2	1	4
<u>3</u>	<u>7</u>	0	0	0	0	0
4	9	1	2	2	1	4
5	11	2	4	8	4	16
المجموع	35	صفر	صفر	20	10	40

$$ن \text{ مج } ح \text{ ح } - ( \text{مج } ح ) ( \text{مج } ح )$$

$$= \frac{\sqrt{ن \text{ مج } ح \text{ ح } - ( \text{مج } ح ) ( \text{مج } ح )}}{\sqrt{ن \text{ مج } ح \text{ ص } - ( \text{مج } ح ) ( \text{مج } ح )}}$$

$$= \frac{20 \times 5 - \text{صفر} \times \text{صفر}}{\sqrt{(5 \times 10 - \text{صفر}) (5 \times 40 - \text{صفر})}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{200 \times 50}}$$

$$= \frac{100}{100} = 1 \text{ طردى تام}$$

وهى نفس النتيجة السابقة التى حصلنا عليها مع ملاحظة تقليل العمليات الحسابية ، ولذلك يفضل استخدام هذه الطريقة لتسهيل العمل الحسابى وتقليل الوقت اللازم لحساب معامل الارتباط .  
معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) :

يستخدم هذا المعامل لقياس العلاقة الارتباطية بين المتغيرات النوعية غير القابلة للقياس الكمى مثل العلاقة بين تقديرات الطلبة فى

المواد التي يقومون بدراستها . ويعتبر هذا المعامل من الطرق الإحصائية المهمة فى قياس العلاقة بين متغيرين رئيسيين وبصفة خاصة عندما يكون حجم العينة صغيراً ولا يزيد عن 30 مفردة وتعتمد هذه الطريقة على إعطاء المتغيرات رتب تحل محل القياس العددي وباستخدام الفروق بين رتب المتغيرين يمكن إيجاد العلاقة الارتباطية بينهما من خلال صيغة معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) .

وتمتاز هذه الطريقة عن طريقة بيرسون بالسهولة فى الحساب بالإضافة إلى إمكانية استخدامها فى حالة المتغيرات الكمية وتعتمد هذه الطريقة على الترتيب التنازلى أو التصاعدي لقيم الظاهرتين .

ويمكن تلخيص خطوات إيجاد معامل ارتباط الرتب (سبيرمان)

فى الآتى:

1- نضع فى العمودين الأول والثانى قيم الظاهرتين س، ص والتي غالباً ما تكون فى صورة تقديرات الطلبة فى الامتحانات أو قد تكون فى صورة قيم مطلقة .

2- نجئ فى الهامش ويتم ترتيب التقديرات الخاصة بالعمودين الأول والثانى تصاعدياً أو تنازلياً ونعطى كل تقدير رتبه .

3- ننقل من الهامش الرتب المعطاة لكل تقدير ونضعها فى العمود الثالث والرابع كل تقدير وفق رتبته مع مراعاة كتابة التقديرات فى العمود الأول والثانى بنفس ترتيبها فى المسألة المراد إيجاد معامل ارتباط الرتب لها .

4- نكون عمود خامس للفرق بين رتب العمود (3) ، العمود (4) .

5- نربع قيم العمود الخامس لنحصل على  $F^2$  .

6- نوجد معامل ارتباط الرتب من العلاقة .

$$r = 1 - \frac{6 \text{ مجف}^2}{n(n-1)}$$

حيث ن عدد الرتب

ويلاحظ أنه كلما صغرت قيمة ف<sup>2</sup> تدل أن العلاقة قوية وطرديه

والعكس صحيح .

وعندما يكون الناتج

$$1 < \frac{6 \text{ مجف}^2}{n(n-1)}$$

يدل ذلك على أن العلاقة عكسية بين المتغيرين .

مثال : فيما يلي تقديرات 6 من الطلبة فى امتحان مادتي

الاقتصاد والرياضة والمطلوب حساب معامل الارتباط (سبيرمان) بين

تقديرات المادتين.

الاقتصاد	ممتاز	جيد	ضعيف	مقبول	ضعيف جداً	جيد جداً
الرياضة	جيد	مقبول	ممتاز	ضعيف	جيد جداً	ضعيف جداً

الحل : نرتب تقديرات كل من المادتين ترتيب تصاعدي أو تنازلي

وذلك بإعطاء التقدير ممتاز (رتبة 1) والتقدير جيد جداً (رتبة 2)

والتقدير جيد (رتبة 3) والتقدير مقبول (رتبة 4) والتقدير ضعيف (رتبة

5) والتقدير ضعيف جداً (رتبة 6) . ثم نحسب الفروق بين رتب التقديرات

أى الفرق بين كل رتبتين متناظرتين ثم نربع الفروق كما فى الجدول

التالى :

الاقتصاد	الرياضة	رتب الاقتصاد	رتب الرياضة	ف	ف <sup>2</sup>
ممتاز	جيد	1	3	2-	4
جيد	مقبول	3	4	1-	1
ضعيف	ممتاز	5	1	4+	16
مقبول	ضعيف	4	5	1-	1
ضعيف جداً	جيد جداً	6	2	4+	16
جيد جداً	ضعيف جداً	2	6	4-	16
المجموع				صفر	54

$$r = \frac{6 \text{ مج ف}^2}{n(1-2)} - 1$$

$$0.54 = \frac{54 \times 6}{(1-36)6} - 1 = r$$

وهذا يعنى أن هناك علاقة عكسية وسط بين تقديرات مادتى الاقتصاد والرياضة .

حساب معامل الارتباط (سبيرمان) فى حالة الرتب المكررة :

فى حالة الرتب المكرر نقوم بإعطاء المقيم المتكررة رتباً تساوى متوسط الرتب التى كانت لتعطى لو لم تتكرر التقديرات ، والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال : أوجد معامل الارتباط (سبيرمان) لتقديرات 10 من الطلاب فى مادتى الرياضة والإحصاء.

ممتاز	جيد	مقبول	ضعيف جداً	ضعيف	مقبول	جيد	ممتاز	جيد	مقبول	الرياضة
جيد	ضعيف	ضعيف جداً	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	جيد جداً	ممتاز	جيد	الإحصاء

الحل : نكون جدول الحل

رقم الطالب	الرياضة	الإحصاء	رتب الرياضة	رتب الإحصاء	f	f <sup>2</sup>
1	مقبول	جيد	7	4	3	9
2	جيد	ممتاز	4	1	3	9
3	ممتاز	جيد جداً	1.5	2	0.5	0.25
4	جيد	مقبول	4	6.5	2.5	6.25
5	مقبول	جيد	7	4	3	9
6	ضعيف	مقبول	9	6.5	2.5	6.25
7	ضعيف جداً	ضعيف	10	8.5	1.5	2.25
8	مقبول	ضعيف جداً	7	10	3	9
9	جيد	ضعيف	4	8.5	4.5	20.25
10	ممتاز	جيد	1.5	4	2.5	6.25
المجموع					صفر	77.50

$$r = \frac{6 \text{ مجف}^2}{n(n-1)} - 1$$

$$r = \frac{77.5 \times 6}{(100-1)} - 1$$

$$= \frac{465}{990}$$

$$= 0.47 - 1 = -0.53$$

∴ يوجد ارتباط طردى وسط بين مادتي الرياضة والإحصاء .

## ملحوظة:

عند إعطاء رتب لتقديرات مادة الرياضة نجد أن الطالب رقم (3) الذي يستحق الرتبة (1) والطالب رقم (10) الذي يستحق الرتبة (2) حاصلان على تقدير ممتاز ولذلك يستحق كل منهم متوسط الرتبة وهو  $1 + 2 / 2 = 1.5$  ، والطالب رقم (2) في هذه المادة ورقم (4) ورقم (9) يستحقون الرتب الثالث والرابع والخامس ولهم نفس التقدير ونظراً لتساويهم في التقدير فيعطى كل منهم متوسط هذه الرتب وهو  $5 + 4 + 3 / 3 = 4$  ، والطالب رقم (1) ، (5) ، (8) لهم نفس التقدير ويستحقون الرتب (6) ، (7) ، (8) ونظراً لتساويهم في التقدير فيعطى كل منهم متوسط هذه الرتب وهو  $6 + 7 + 8 / 3 = 7$  ، والطالب رقم (6) يستحق الرتبة (9) والطالب رقم (7) يستحق الرتبة (10) .

وبإتباع نفس الطريقة عند إعطاء رتب لتقدير مادة الإحصاء يمكن أن نحسب الفروق كما في الجدول السابق .

حساب معامل الارتباط (سبيرمان) في حالة البيانات الكمية :

كما ذكر سابقاً لا يقتصر استخدام معامل ارتباط سبيرمان على المتغيرات النوعية فقط بل يستخدم في حالة المتغيرات الكمية أيضاً وذلك كما يتضح من المثال التالي :

مثال : احسب معامل ارتباط سبيرمان بين قيمة المتغيرين (س ، ص) .

50	45	40	35	30	25	س
42	31	20	18	16	13	ص

الحل : نكون جدول الحل التالي :

ف <sup>2</sup>	ف	رتب ص	رتب س	ص	س
صفر	صفر	1	1	13	25
صفر	صفر	2	2	16	30
صفر	صفر	3	3	18	35
صفر	صفر	4	4	20	40
صفر	صفر	5	5	31	45
صفر	صفر	6	6	42	50
صفر	صفر				المجموع

$$r = 1 - \frac{6 \text{ مجف}^2}{n(n-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times \text{صفر}}{6(1 \times 36)}$$

أى أن الارتباط طردى تام بين قيم المتغيرين س ، ص .

اختبار معنوية معامل الارتباط :

يستعمل اختبار (ت) للكشف عن معنوية معامل الارتباط (ر) وذلك وفقاً

للصيغة التالية :

$$t_r = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

حيث ن : عدد المفردات ،  $r^2$  = مربع معامل الارتباط



مثال : فى دراسة العلاقة بين عمر نبات الفول بالأسبوع وطول النبات بالسنتيمتر حصل الباحث على النتائج التالية :

7	6	5	4	3	2	1	العمر (س)
40	38	33	23	16	13	5	الطول (ص)

والمطلوب حساب معامل الارتباط واختبار معنويته

الحل : معامل الارتباط (ر)

$$\frac{\text{مجم س ص} - \text{س ص}}{ن}$$

$$= \frac{\left[ \frac{\text{مجم ص}^2}{ن} - \frac{(\text{مجم ص})^2}{ن^2} \right] \left[ \frac{\text{مجم س}^2}{ن} - \frac{(\text{مجم س})^2}{ن^2} \right]}{\sqrt{\quad}}$$

ص	س	ص س	ص <sup>2</sup>	س <sup>2</sup>
5	1	5	25	1
13	2	26	169	4
16	3	48	256	9
23	4	92	529	16
33	5	165	1089	25
38	6	228	1444	36
40	7	280	1600	49
168	28	844	5112	140
المجموع				

$$\frac{844}{(24)(4)} - \frac{7}{7}$$

$$0.989 = \frac{\sqrt{\frac{2(24) - 5112}{7} \left[ \frac{2(4) - 140}{7} \right]}}{\sqrt{\quad}} = r$$

ويعنى ذلك أنه يوجد ارتباط طردى قوى بين عمر النبات وطوله .

إختبار معنوية معامل الارتباط :

$$226.02 = \frac{\sqrt{2-7} \cdot 0.989}{\sqrt{2(0.989)^2 - 1}} = \text{تر}$$

و بمقارنة هذه القيمة بنظيرتها الجدوليه (ت 0.05) = 2.571 تبين

معنوية العلاقة بين عمر النبات وطوله .

## تمارين

(1) أوجد معامل الارتباط بيرسون من بيانات الجدول التالي :

س	13	18	14	18	23	21	14	25	23	14
ص	10	16	12	18	17	17	9	19	17	11

ملحوظة : (مجم س = 146 ، مجم ص = 183 ، مجم س ص = 804 ،

مجم س<sup>2</sup> = 2254 ، مجم ص<sup>2</sup> = 3529) .

(2) إذا علمت أن

مجم س = 768 ، مجم س ص = 63885 ، مجم ص<sup>2</sup> = 68153 ، مجم

س<sup>2</sup> = 60064 ، مجم ص = 821 ، ن = 10 .

أوجد معامل ارتباط بيرسون .

(3) إذا علمت أن

س<sup>-</sup> = 43.5 ، مجم س ص = 14438 ، مجم س<sup>2</sup> = 24045 ،

ص<sup>-</sup> = 27.2 ، مجم ص<sup>2</sup> = 68153 ، ن = 10 .

أوجد معامل ارتباط بيرسون .

(4) فيما يلي التقديرات التي حصل عليها 6 طلاب في مادتي الإحصاء

والرياضة والمطلوب حساب معامل الارتباط بين تقديرات هاتين

المادتين .

الإحصاء	ممتاز	جيد	ضعيف	مقبول	جيد جداً	ضعيف جداً
الرياضة	ضعيف	مقبول	جيد	جيد جداً	ضعيف جداً	ممتاز

(5) فيما يلي التقديرات التي حصل عليها 8 طلاب في مادتي الإحصاء والاقتصاد المطلوب حساب معامل الارتباط بين تقديرات هاتين المادتين .

الإحصاء	ضعيف جداً	مقبول	مقبول	جيد	جيد جداً	ممتاز	مقبول	ضعيف
الاقتصاد	ضعيف	مقبول	مقبول	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف جداً	ضعيف

(6) استخدم معامل ارتباط سبيرمان لحساب العلاقة الارتباطية بين قيم المتغيرين س ، ص .

س	11	21	31	41	51
ص	20	40	60	80	100

الفصل السادس

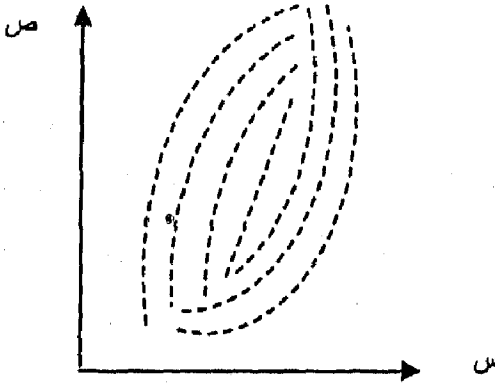
الانحدار *Regression*



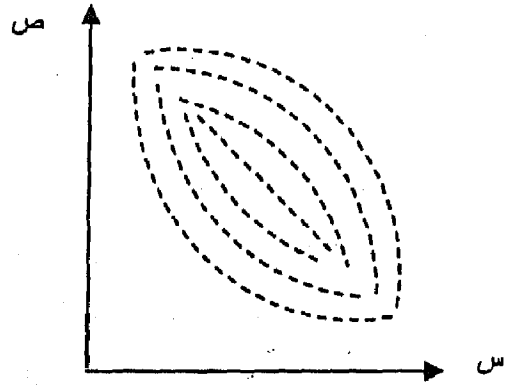
## تمهيد :

يختص الانحدار بدراسة العلاقة بين متغيرين أو أكثر أحدهما متغير تابع **Dependent Variable** والآخر متغير مستقل **Independent Variable** (أو متغيرات مستقلة) فإذا كانت العلاقة بين متغيرين فقط أحدهما تابع والآخر مستقل سمي بالانحدار البسيط **Simple Regression** ، بينما إذا كانت العلاقة بين متغير تابع وأكثر من متغير مستقل سمي بالانحدار المتعدد **Multi Regression** ويمكن استخدام الانحدار في عملية التنبؤ **Prediction** الإحصائي بالمستقبل .

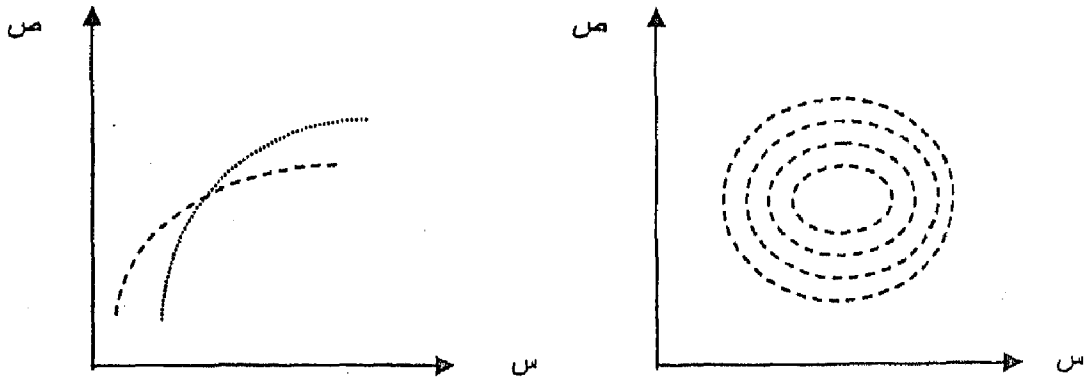
ويمكن من خلال شكل الانتشار **Scatter Diagram** بين قيم المتغير التابع وقيم المتغير المستقل تكوين فكرة مبدئية عن نوع العلاقة إذا كانت طردية أم عكسية أم لا توجد علاقة بين المتغيرين وذلك كما يتضح من الأشكال التالية :



علاقة طردية بين قيم س ، ص



علاقة عكسية بين قيم س ، ص



لا توجد علاقة بين قيم  $S$  ،  $V$       علاقة غير خطية بين قيم  $S$  ،  $V$   
 طريقة المربعات الصغرى لتوفيق الخط المستقيم :

تعتبر طريقة المربعات الصغرى الطريقة الشائعة لتوفيق الخط المستقيم ، وتبنى هذه الطريقة على أساس توفيق خط لمجموعة من القيم بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات قيم  $V$  عن الخط المستقيم المحسوب أقل ما يمكن ، أى مجموع الفروق بين القيم المشاهدة والقيم المتوقعة يساوى صفر ، وفى نفس الوقت يمكن التعبير عن الخط بمعادلة يحسب منها وهذا الخط يطلق عليه خط الانحدار. وخط الانحدار المطلوب توفيقه سوف لا يمر بجميع النقاط فى شكل الانتشار ولكن بعض هذه النقاط سوف يقع فوقه والبعض الآخر سوف يقع تحته وبالتالي إذا اخترنا أى قيمة للمتغيرين ( $S$ ) و قدرنا قيمة ( $V$ ) المناظرة لها من واقع معادلة هذا الخط (معادلة الانحدار) فإن قيمة ( $S$ ) سوف تختلف عن قيمة ( $V$ ) الفعلية فى حالة عدم انطباق النقطة على الخط تماماً ، وهذا الاختلاف يعطى لنا انحراف النقطة (البعد الرأسى لها) عن خط الانحدار .

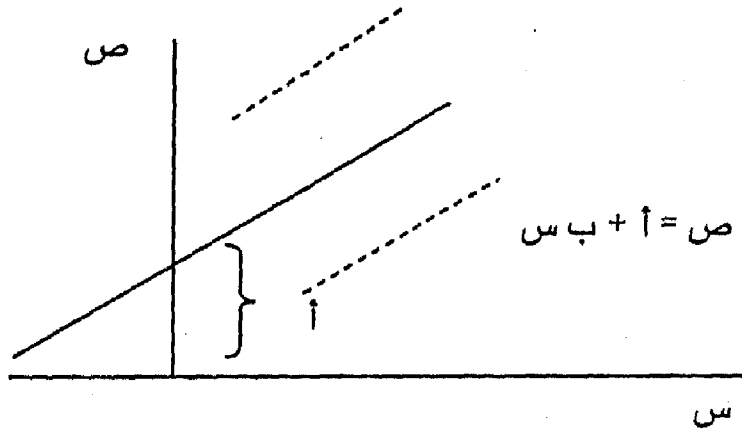
معادلة إنحدار  $V$  على  $S$

ولإيجاد معادلة الانحدار التى على الصورة

$$V = A + B S$$



حيث أ هو الجزء المقطوع من المحور الرأسى ، (ب) هى ميل خط الانحدار أو معامل الانحدار ص على س ويعرف بأنه التغير فى قيمة (ص) نتيجة التغير فى (س) بوحدة واحدة .



ويمكن الحصول على قيمتى أ ، ب من المعادلتين التاليتين :

$$\hat{b} = \frac{\text{مج س ص} - \bar{\text{س}} \bar{\text{ص}}}{\text{ن مج س ص} - (\text{مج س}) (\text{مج ص})} = \frac{\text{مج س ص} - \bar{\text{س}} \bar{\text{ص}}}{\text{ن}^2 \left( \frac{\text{مج س}}{\text{ن}} \right)^2 - \frac{\text{مج س}^2}{\text{ن}}}$$

$$\hat{a} = \bar{\text{ص}} - \hat{b} \bar{\text{س}}$$

حيث  $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مج س}}{\text{ن}}$  ،  $\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مج ص}}{\text{ن}}$

ن = عدد مفردات س أو ص

وتكون الصيغة الرياضية لمعادلة انحدار ص على س على الصورة

التالية :

$$\hat{\text{ص}} = \hat{a} + \hat{b} \text{س} \quad (1)$$

حيث  $\hat{v}$  : هي قيم  $v$  المقدره فى المشاهدة  $v$

$s$  : هي قيم  $s$  فى المشاهدة  $s$

$h$  : هي مشاهدات ( $s$  ،  $v$ ) الزوجية

$\hat{b}$  : معامل الانحدار وهو يشير إلى مقدار التغير فى قيمة ( $v$ )  
عندما تتغير ( $s$ ) بوحدة واحدة، كما إنه يشير إلى ميل  
الخط المستقيم .

$\hat{a}$  : المعلمة الثابتة ويشير إلى الجزء المقطوع من محور ( $v$ )  
ويوضح أثر المتغيرات الأخرى خلاف ( $s$ ) المؤثرة على ( $v$ )  
والتي لم تؤخذ فى الاعتبار عند تقدير العلاقة الرياضية بين  
( $s$  ،  $v$ ) .

ويمكن استخدام معادلة الانحدار فى التنبؤ بقيمة ( $v$ ) عندما  
تأخذ ( $s$ ) قيمة معينة، فإذا فرض أن دالة إنتاج محصول ما ممثلة  
بالعلاقة التالية :

$$\hat{v} = 2 + 3s$$

حيث تعبر  $\hat{v}$  عن حجم الإنتاج المقدر بالطن وأن ( $s$ ) هي المورد  
الإنتاجى الممثل فى الأسمدة . فإذا كانت كمية الأسمدة هي 60 وحدة  
فإنه يمكن تقدير حجم الإنتاج من المحصول استناداً إلى معادلة الانحدار  
أو دالة الإنتاج السابقة .

$$\hat{v} = 2 + 3 \times 60 = 182 \text{ وحدة}$$

وعلى ذلك يمكن تقدير حجم الإنتاج كلما اختلفت كمية السماد بنفس طريقة التقدير السابقة وذلك بالتعويض عن قيمة (س) في معادلة الانحدار بما يقابلها من كمية السماد المعطاة .

خطوات حساب معامل الانحدار ب :

- 1- بالإضافة إلى عمودى أزواج المشاهدات س ، ص نكون عمودين آخرين هما عمود س ص ، عمود س<sup>2</sup> .
- 2- نحصل على مجموع الأربعة أعمدة .
- 3- نطبق القانون للحصول على قيمة ب .

معادلة انحدار س على ص :

هذه المعادلة تأخذ الصورة الرياضية التالية :

$$\hat{س} = ج + ع ص + د ص^2 \quad (2)$$

ويمكن الحصول على ع ، ج كما يلي

$$\frac{مجم س ص - \bar{س} \bar{ص}}{ن}$$

$$= ع$$

$$\left[ \frac{مجم ص}{ن} \right] - \frac{مجم ص^2}{ن}$$

$$ج = \bar{س} - ع \bar{ص}$$

ويلاحظ إننا يمكن اشتقاق معادلة انحدار س على ص واشتقاق

معامل الانحدار الخاص بها وكذلك الجزء الثابت ج من خلال تبديل

(س) ب (ص) أو (ص) ب (س) في المعادلة (1) لنحصل على المعادلة (2) .

مثال : أوجد معامل انحدار ص على س من بيانات الجدول التالي :

س	1	3	9	8	4
ص	2	6	8	5	4

الحل : نكون أعمدة الحل

س	ص	ص	س	
1	2	2	1	
9	18	6	3	
81	72	8	9	
64	40	5	8	
16	16	4	4	
171	148	25	25	المجموع

$$\bar{س} = \frac{25}{5} = 5, \quad \bar{ص} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\bar{ص} - \bar{س} = 5 - 5 = 0$$

$$\hat{ب} = \frac{\frac{25}{5} - \left(\frac{25}{5}\right)^2}{\frac{25}{5} - \left(\frac{25}{5}\right)^2}$$

$$0.5 = \frac{5 \times 5 - \frac{148}{5}}{9.2 - \left(\frac{25}{5}\right)^2 - \frac{171}{5}}$$

$$\hat{ا} = \bar{ص} - \bar{ب} \bar{س}$$

$$2.5 = 5 - 5 \times 0.5 = 2.5$$

∴ معادلة الانحدار هي

$$\hat{ص} = 2.5 + 0.5 \hat{س}$$

ويمكن التنبؤ بقيمة (ص) عندما (س) يساوى 100 مثلاً وذلك من خلال التعويض فى معادلة الانحدار عن قيمة س = 100 لنحصل على ص :

$$\hat{ص} = 2.5 + 0.5 \times 100 = 52.5$$

وأن 0.5 تعنى أنه إذا تغيرت (س) بمقدار وحدة واحدة فإن (ص) تتغير بمقدار 0.5 وحدة .

مثال : أوجد معادلة انحدار س على ص من البيانات الآتية :

س	1	2	3	4	5
ص	5	4	3	2	1

الحل : نكون أعمدة الحل

س	ص	ص ص	ص <sup>2</sup>
1	5	5	25
2	4	8	16
3	3	9	9
4	2	8	4
5	1	5	1
المجموع	15	35	55

$$\frac{\text{مجموع ص} - \text{س ص}}{ن}$$

$$= \frac{\text{مجموع ص} - \left( \frac{\text{مجموع ص} \times \text{س}}{ن} \right)}{ن}$$

$$1 - = \frac{9 - 7}{9 - 11} = \frac{3 \times 3 - \frac{35}{5}}{\left(\frac{15}{5}\right)^2 - \frac{55}{5}} =$$

ج = س - ع ص

$$6 = 3 \times (1 -) - 3 =$$

∴ معادلة الانحدار س على ص هي

$$\hat{س} = ص - 6$$

مثال : أوجد معادلة خط انحدار (ص على س) من بيانات الجدول التالي :

1	3	1	2	3	س
8	10	5	8	9	ص

الحل : نكون أعمدة الحل

س <sup>2</sup>	س ص	ص	س	
9	27	9	3	
4	16	8	2	
1	5	5	1	
9	30	10	3	
1	8	8	1	
24	86	40	10	المجموع

$$8 = \frac{40}{5} = \bar{ص} \quad , \quad 2 = \frac{10}{5} = \bar{س}$$

$$1.5 \text{ تقريباً} = \frac{8 \times 2 - \frac{86}{5}}{\left(\frac{10}{5}\right)^2 - \frac{24}{5}} = \hat{ب}$$

$$\hat{ا} = \bar{ص} - \bar{ب} \bar{س}$$

$$5 = 2 \times 1.5 - 8 =$$

∴ معادلة الانحدار هي

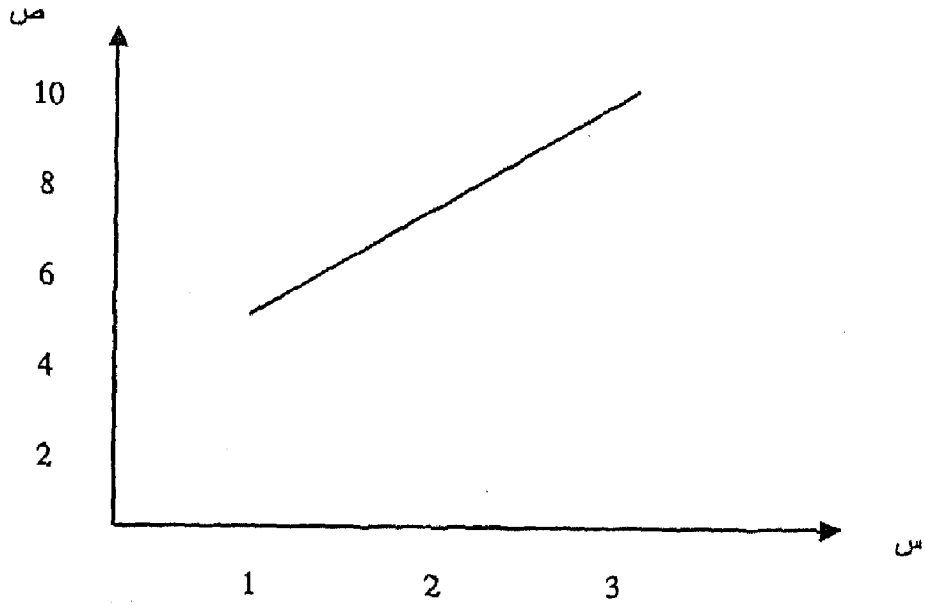
$$\hat{ص} = 1.5 + 5 \hat{س}$$

ويمكن تقدير  $\hat{ص}$  التقديرية المقابلة لقيم  $\bar{س}$  الأصلية عند كل قيمة من قيم ( $\bar{س}$ ) كما يلي:

قيم $\bar{س}$	قيم $\bar{ص}$ الأصلية	قيم $\bar{ص}$ التقديرية
3	9	9.5
2	8	8
1	5	6.5
3	10	9.5
1	8	6.5

ويمكن الحصول بيانياً على الخط المستقيم الممثل لبيانات ( $\bar{س}$  ،

$\bar{ص}$ ) وذلك بتوقيع أزواج قيم ( $\bar{س}$  ،  $\bar{ص}$ ) بيانياً على الرسم كما يلي:



العلاقة بين معامل الارتباط ومعامل الانحدار :

يمكن إيجاد العلاقة بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط من خلال العلاقات الرياضية التالية:

(1) حاصل ضرب معامل انحدار ص على س في معامل انحدار س على ص يساوي مربع معامل الارتباط .

فإذا فرضنا أن معامل انحدار ص على س هو (ب) ومعامل انحدار س على ص هو (ب) ومعامل الارتباط هو (ر) فإن

$$ر^2 = ب \times ب$$

$$\therefore ر = \sqrt{ب \times ب}$$

(2) حاصل ضرب (ب) معامل انحدار في ع / ع يساوي معامل الارتباط حيث (ع) الانحراف المعياري لقيم (س) ، (ع) الانحراف المعياري لقيم (ص)



$$r = \frac{عص}{عص} \times ب = ب \quad \text{ومنها}$$

$$ب = \frac{عص}{عص} \times ر = ر$$

مثال : إذا علمت أن معادلة انحدار (ص) على (س) هي

$$ص = 0.75 + 3س$$

ومعادلة انحدار (س) على (ص) هي

$$س = 0.06 + 4ص$$

فأوجد معامل الارتباط

$$\text{الحل : } ب = 0.75 , \quad \bar{ب} = 0.06$$

$$ر = \sqrt{\bar{ب} \times ب}$$

$$= \sqrt{0.06 \times 0.75} = 0.21$$

وهي نتيجة صحيحة لأنها ضمن الفترة التي تقع فيها قيمة معامل الارتباط حيث

$$-1 \leq ر \leq 1$$

مثال : إذا علمت أن معادلة انحدار (ص) على (س) هي :

$$ص = 0.94س + 6.2$$

ومعادلة انحدار (س) على (ص) هي

$$س = 1.5ص - 3.2$$

فبين أنه يوجد خطأ فى أحد هاتين المعادلتين .

$$\text{الحل : } \bar{b} = 0.94 \quad \bar{b} = 1.5$$

$$r = \sqrt{\bar{b} \times b}$$

$$= \sqrt{1.5 \times 0.94} = \sqrt{1.41} = 1.19 \text{ تقريباً}$$

∴ يوجد خطأ فى إحدى المعادلتين لأن قيمة معامل الارتباط أكبر من

الواحد الصحيح وهى لا يمكن أن تزيد عن الواحد الصحيح .

مثال : إذا علمت أن الوسط الحسابى والانحراف المعياري للمتغير (س)

هما 1 ، 0.45 على الترتيب، وأن الوسط الحسابى والانحراف

المعياري للمتغير (ص) هما 5 ، 1.43 على الترتيب فأوجد معادلة

خط انحدار (ص) على (س) علماً بأن معامل الارتباط بين قيم

(س) ، (ص) هو 0.67 ثم تنبأ بقيمة (ص) عندما (س) = 10 .

$$\text{الحل:} \quad b = r \times \frac{ص}{س}$$

$$2.13 = \frac{1.43}{0.45} \times 0.67 =$$

$$\dots \bar{ص} - \bar{ب} \bar{س}$$

$$2.87 = 1 \times 2.13 - 5 =$$

∴ معادلة خط انحدار (ص) على (س) هى

$$\hat{ص} = 2.13 + 2.87 \bar{س}$$

قيمة (ص<sup>^</sup>) عندما س<sub>د</sub> = 10 هي

$$ص<sup>^</sup> = 2.87 + 2.13 \times 10$$

$$24.17 = 2.87 + 21.30$$

طريقة العزوم لحساب معادلة خط الانحدار :

طريقة المربعات الصغرى السابقة لتقدير معادلة الانحدار تعطى نفس نتائج طريقة العزوم ، ولكن لطريقة العزوم أهمية خاصة عند الحديث عن الانحدار المتعدد ، وهذه الطريقة تساعد على معرفة المعنوية الإحصائية للعلاقة القياسية المقدرة وغير ذلك من المعايير الإحصائية الأخرى .

خطوات حساب معادلة الانحدار بطريقة العزوم :

$$1- \text{ نحصل على عزوم س على ص} = \frac{\text{مجس ص}}{\text{ن}} - \frac{\text{مجس} \times \text{مجص}}{\text{ن}^2}$$

$$\text{أو} = \text{مجس ص} - \frac{\text{مجس} \times \text{مجص}}{\text{ن}}$$

$$2- \text{ نحصل على عزوم س على س} = \frac{\text{مجس}^2}{\text{ن}} - \frac{(\text{مجس})^2}{\text{ن}^2}$$

$$\text{أو} = \text{مجس}^2 - \frac{(\text{مجس})^2}{\text{ن}}$$

$$3- \text{ نحصل على عزوم ص على ص} = \frac{\text{مج ص}^2}{\text{ن}} - \frac{(\text{مج ص})^2}{\text{ن}^2}$$

$$\text{أو} = \frac{(\text{مج ص})^2}{\text{ن}} - \text{مج ص}^2$$

$$4- \text{ قيمة معامل الانحدار ب}^{\wedge} = \frac{\text{عزوم ص على ص}}{\text{ع س ص}} = \frac{\text{عزوم ص على ص}}{\text{ع س ص}}$$

$$5- \text{ قيمة أ}^{\wedge} = \bar{\text{ص}} - \bar{\text{ب}} \text{ س}$$

اختبار معنوية معامل الانحدار:

ولمعرفة المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار (ب) يلزمنا الحصول

على قيمة (ت) المحسوبة ويكون ذلك من خلال الخطوات التالية:

$$1- \text{ نحصل على تباين البواقي} = \text{ع س ص} - \text{ب} \times \text{ع س ص}$$

حيث  $\text{ع س ص}$  عزوم ص على ص ،  $\text{ع س ص}$  عزوم ص على ص .

$$2- \text{ تباين الخطأ} = \text{تباين البواقي} \times \text{ن} / (\text{ن} - 2)$$

حيث ن هي عدد المشاهدات

تباين الخطأ

$$3- \text{ تباين (ب)} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{\text{ن} \times \text{ع س ص}}$$

ن × ع س ص

$$4- \text{ الخطأ القياس لمعدل التغير الحدى (ب)} = \sqrt{\text{تباين (ب)}}$$

ب

5- قيمة (ت) المحسوبة =  $\frac{\text{الخطأ القياسى لمعدل التغير الحدى}}{\text{ب}}$

6- نقارن (ت) المحسوبة بقيمة (ت) الجدولية التى يتم استخراجها من جدول (ت) الإحصائى عند درجة حرية (ن - 2) أو درجة حرية الخطأ، فإذا كانت (ت) المحسوبة أكبر من أو يساوى قيمة (ت) الجدولية فإن ذلك يدل على أن معدل التغير الحدى أو معامل الانحدار (ب) معنوى .

مثال : قدر العلاقة القياسية بين قيم المتغير (ص) وقيم المتغير (س) بطريقة العزوم ثم اكشف عن المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار .  
إذا عمت أن :

س	3	2	1	3	1
ص	9	8	5	10	8

الحل : نكون جدول الحل التالى وهو نفس الجدول السابق مع إضافة عمود جديد هو عمود ص<sup>2</sup> .

س	ص	س ص	ص <sup>2</sup>	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>
3	9	27	9	9	81
2	8	16	8	4	64
1	5	5	5	1	25
3	10	30	10	9	100
1	8	8	8	1	64
المجموع	10	40	86	24	334

$$\frac{\text{مجد ص ص} - (\text{مجد ص}) (\text{مجد ص})}{\text{ن} - \text{ن}^2} = \text{ع ص ص}$$

$$= \frac{\text{مجد ص ص} - (\text{ص}) (\text{ص})}{\text{ن}}$$

$$1.2 = 16 - 17.2 = \frac{40 \times 10}{2(5)} - \frac{86}{5} =$$

$$\frac{\text{مجد ص}^2}{\text{ن}^2} - \frac{\text{مجد ص}^2}{\text{ن}} = \text{ع ص ص}$$

$$0.8 = 4 - 4.8 = \frac{10 \times 10}{2(5)} - \frac{24}{5} =$$

$$\frac{\text{مجد ص}^2}{\text{ن}^2} - \frac{\text{مجد ص}^2}{\text{ن}} = \text{ع ص ص}$$

$$2.8 = 64 - 66.8 = \frac{40 \times 40}{2(5)} - \frac{334}{5} =$$

$$1.5 = \frac{1.2}{0.8} = \frac{\text{ع ص ص}}{\text{ع ص ص}} = \text{ب}$$

$$أ \quad \bar{ص} - \bar{ب س} =$$

$$5 = 2 \times 1.5 - 8 =$$

∴ معادلة الانحدار هي

$$\hat{ص} = 1.5 + 5 س$$

ولمعرفة المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار (ب) نسترشد بخطوات الحل السابق ذكرها لتحديد المعنوية الإحصائية .

$$\text{تباين البواقي} = ع م - ب \times ع س$$

$$1 = 1.2 \times 1.5 - 2.8 =$$

ن

$$\text{تباين الخطأ} = \text{تباين البواقي} \times \frac{ن - 2}{ن}$$

ن - 2

$$1.67 \approx \frac{5}{3} \times 1 =$$

$$\text{تباين (ب)} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{n \times \text{ع.س.س}} = \frac{1.67}{0.8 \times 5} = 0.42 \text{ تقريباً}$$

الخطأ القياسي =  $\sqrt{\text{تباين (ب)}}$

$$= \sqrt{0.42} = 0.65 \text{ تقريباً}$$

(ت) المحسوبة =  $\frac{\text{ب}}{\text{الخطأ القياسي}}$

$$= \frac{1.5}{0.65} = 2.31 \text{ تقريباً}$$

وبالكشف فى جدول (ت) الإحصائى عن قيمة (ت) الجدولية بدرجة حرية (ن - 2) عند مستوى المعنوية 01. يتضح إنها تساوى 5.84 أى أن (ت) المحسوبة أقل من (ت) الجدولية وهذا يعنى أن قيمة (ب) غير معنوية إحصائياً .

الصورة القياسية لمعادلة الانحدار المقدرة هى :

$$\hat{ص} = 1.5 + 5 س$$

(2.31)

حيث الرقم بين القوسين يشير إلى قيمة (ت) المحسوبة .

مثال : أوجد معادلة خط انحدار ص على س بطريقة العزوم ثم اختبر المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار من واقع بيانات الجدول التالى :



7	5	2	5	3	س
15	10	5	7	4	ص

الحل : نكون جدول الحل التالي :

ص <sup>2</sup>	س <sup>2</sup>	س ص	ص	س	
16	9	12	4	3	
49	25	35	7	5	
25	4	10	5	2	
100	25	50	10	5	
225	35	105	15	7	
415	112	212	41	22	المجموع

$$\frac{\text{مج س} \times \text{مج ص}}{\text{ن}} - \text{مج س ص} = \text{ع س ص}$$

$$31.6 = \frac{41 \times 22}{5} - 212 =$$

$$\frac{(\text{مج س})^2}{\text{ن}} - \text{مج س}^2 = \text{ع س س}$$

$$15.2 = \frac{22 \times 22}{5} - 112 =$$

$$\frac{(\text{مجد ص})^2}{\text{ن}} - \text{مجد ص}^2 = \text{ع ص}$$

$$78.8 = \frac{41 \times 41}{5} - 145 =$$

$$2.07 = \frac{31.6}{15.2} = \frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \text{ب}$$

$$\bar{\text{ص}} - \bar{\text{ب س}} = \text{أ}$$

$$\frac{\text{مجد ص}}{\text{ن}} \times \text{ب} = \frac{\text{مجد س}}{\text{ن}} =$$

$$0.908 = \frac{22}{5} \times 2.07 - \frac{41}{5} =$$

∴ معادلة الانحدار (ص) على (س) هي :

$$\hat{\text{ص}} = 2.07 + 0.907 \text{ س}$$

وللكشف عن معنوية معامل الانحدار (ب) فيجب الحصول على قيمة (ت) المحسوبة باتباع الخطوات السابق ذكرها كما يلي :

$$\text{تباين البواقي} = \text{ع ص} - \text{ب} \times \text{ع س}$$

$$31.6 \times 2.07 - 78.8 =$$

$$13.39 =$$

$$\frac{n}{n-2} \times \text{تباين البواقي} = \text{تباين الخطأ}$$

$$22.3 = \frac{5}{2-5} \times 13.39 =$$

$$0.29 = \frac{22.3}{15.2 \times 5} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{n \times \text{ع.س}}$$

$$\sqrt{0.29} = \text{الخطأ القياسي} = \sqrt{\text{تباين (ب)}}$$

$$0.54 = \sqrt{0.29} =$$

$$\frac{b}{\text{الخطأ القياسي}} = \text{المحسوبة (ت)}$$

$$3.8 = \frac{2.07}{0.54} =$$

$$0.54$$

وبمقارنة (ت) المحسوبة بقيمة (ت) الجدولية عند مستوى المعنوية (0.01) ودرجة حرية (ن = 2) نجد أنها تساوى 5.84 أى أن قيمة (ت) المحسوبة أقل من قيمة (ت) الجدولية .

∴ معامل الانحدار غير معنوى .

وتكون الصيغة القياسية لمعادلة الانحدار هي :

$$\hat{v} = -2.07 + 0.907 \text{ س}$$

$$(3.8)$$

## خطأ التقدير :

يتبين من الأمثلة السابقة أن خط الانحدار قد لا يمر بجميع نقاط الظاهرة موضوع الدراسة ، ولذلك تكون هناك بعض النقاط لـ (س ، ص) مشتتة حول خط الانحدار ويقاس ذلك التشتت بالجذر التربيعي لمتوسط مربعات أبعاد النقاط الرأسية عن الخط (في حالة انحدار ص على س) ويسمى ذلك المقياس بخطأ التقدير ويرمز له بالرمز  $\sigma_{\text{ع/ص}}$  في حالة انحدار ص على س وبالرمز  $\sigma_{\text{ص/س}}$  في حالة انحدار س على ص .

ويكون خطأ التقدير مساوياً للصفر عندما تقع جميع نقاط (س ، ص) على خط الانحدار أى أنه يمكن اعتباره كمقياس لكمية الأخطاء التي تم الوقوع فيها .

ويأخذ هذا المقياس الصورة الرياضية التالية :

$$\sqrt{\frac{1}{2-n} \times \text{مج (المشاهد - المقدر)}^2} = \sigma_{\text{ع/ص}}$$

$$\sqrt{\frac{\text{مج (ص - \hat{ص})}^2}{2-n}} =$$

أو باستخدام العلاقة

$$\sqrt{\frac{\text{مج ص}^2 - \text{ب مج س ص} - \text{أ مج ص}}{2-n}} = \sigma_{\text{ع/ص}}$$

$$\frac{\text{مجس}^2 - \text{ب مجس ص} - \text{أ مجس}}{\text{ن} - 2} = \text{وبالمثل فإن ع/ص}$$

وهي تمثل مقياس خطأ التقدير في حالة انحدار ص على ص .

مثال : أوجد معادلة انحدار ص على ص ثم احسب خطأ التقدير للبيانات التالية :

9	6	5	3	2	س
4	3	2	5	1	ص

الحل :

$(\text{ص} - \text{ص}^{\wedge})^2$	$\text{ص} - \text{ص}^{\wedge}$	$\text{ص}^{\wedge}$	$\text{س}^2$	$\text{س ص}$	ص	س
3.88	1.97-	2.97	4	2	1	2
4.08	2.02	2.98	9	15	5	3
1	1-	3.00	25	10	2	5
.00002	.004-	3.004	36	18	3	6
.96	.978	3.032	81	36	4	9
9.92			155	81	15	25
						المجموع

$$\frac{\text{مجس ص}}{\text{ن}} - \frac{\text{س ص}}{\text{ن}}$$

$$= \text{ب} - \frac{\text{مجس}^2}{\text{ن}}$$

$$3 \times 5 - \frac{81}{5}$$

$$\frac{\quad}{\quad} = \bar{ب}$$

$$^2 \left[ \frac{25}{5} \right] - 155$$

$$0.009 = \frac{1.2}{130} =$$

$$\bar{ا} = \bar{ص} - \bar{ب}$$

$$2.95 = 5 \times 0.009 - 3 =$$

∴ معادلة انحدار ص على س هي :

$$\hat{ص} = 0.009 + 2.95$$

وبالتعويض عن قيم س المختلفة في معادلة الانحدار المتحصل

عليها نحصل على قيم  $\hat{ص}$  كالتالي :

$$2.97 = 2 \times 0.009 + 2.95 = \hat{ص}_{س=2}$$

$$2.98 = 3 \times 0.009 + 2.95 = \hat{ص}_{س=3}$$

$$3.00 = 5 \times 0.009 + 2.95 = \hat{ص}_{س=5}$$

$$3.004 = 6 \times 0.009 + 2.95 = \hat{ص}_{س=6}$$

$$3.032 = 9 \times 0.009 + 2.95 = \hat{ص}_{س=9}$$

$$\frac{\text{مج (ص - } \hat{ص})^2}{\text{ن - 2}} = \text{خطأ التقدير}$$

$$1.8 = \frac{\sqrt{9.92}}{3} =$$

وهذا يعنى أنه لتقدير قيمة (ص) بمعلومية قيمة (س) فإن الخطأ المعيارى لهذا التقدير هو 1.8 .

مثال : إذا توفرت لديك البيانات التالية عن المتغيرين (س ، ص)

$$\bar{س} = 53 ، \bar{ص} = 45 ، \text{مجس}^2 = 29982 ،$$

$$\text{مجص}^2 = 21144 ، \text{مجسص} = 24924 ، ن = 10$$

أوجد :

أ - معادلة انحدار ص على س

ب- خطأ التقدير لخط انحدار ص على س

الحل :

$$\dots \bar{س} = 53 ، ن = 10 ، \bar{ص} = 45$$

$$\therefore \text{مجس} = 530 ، \text{مجص} = 450$$

$$\text{ن مجسص} - \text{مجس مجص}$$

$$= \frac{\text{ن مجس}^2 - (\text{مجس})^2}{\dots}$$

$$= \frac{10 \times 530 - 29982}{10 \times 530 - 29982}$$

$$0.57 = \frac{450 \times 530 - 24924 \times 10}{10 \times 530 - 29982} =$$

$$\bar{ص} - \bar{ب س} = \bar{أ}$$

$$14.9 = 53 \times 0.57 - 45 =$$

∴ معادلة الانحدار هي :

$$\hat{ص} = 0.57 + 14.9 س$$

$$\sqrt{\frac{\text{مج ص}^2 - 1 \text{ مج ص} - \text{ب مج س ص}}{2 - \text{ن}}} = \text{خطأ التقدير}$$

$$\sqrt{\frac{24984 \times 0.57 - 450 \times 14.9 - 21144}{2 - 10}} =$$

$$5.94 =$$

وهذا يعنى أنه لتقدير قيمة (ص) بمعلومية قيمة (س) فإن الخطأ المعياري لهذا التقدير هو 5.94 .

ملحوظة : يلاحظ أن معادلة الخطأ المعياري قريبة من معادلة الانحراف المعياري العادية حيث أن كلاً منهما يعتبر مقياساً للتشتت ، ولكن الاختلاف الوحيد بينهما أن الانحراف المعياري يقيس التشتت حول نقطة معينة هي الوسط الحسابي ، بينما الخطأ المعياري يقيس التشتت حول خط الانحدار .



## معادلة الاتجاه العام الزمني General Trend Function

تعتبر معادلة الاتجاه العام الزمني من الدرجة الأولى صورة من معادلة خط الانحدار البسيط بينما إذا كانت معادلة الاتجاه العام الزمني من الدرجة الثانية أو الثالثة فهي صورة من صور الانحدار المتعدد .  
والصورة الرياضية لمعادلة الاتجاه العام الزمني هي :

$$ص = \hat{ا} \pm ب س هـ$$

حيث :

ص : القيمة المقدرة للمتغير التابع المراد معرفة الاتجاه العام له .

س : متغير أو عامل الزمن ، هـ : عدد السنوات

ونستخرج قيمة أ ، ب بنفس الطريقة السابقة في معادلة الانحدار البسيط مع ملاحظة أن متغير الزمن (س) يجب أن يبدأ من الرقم (1) إلى نهاية الفترة الزمنية الأمر الذي يعنى ضرورة تحويل الفترة الزمنية إلى أرقام خام تبدأ من (1) حتى نهاية الفترة .

فمثلاً إذا كان المتغير س يمثل الفترة من سنة 1995 إلى سنة

2000 فإن البيانات الخام لهذا المتغير تأخذ الأرقام كالاتى :

البيانات	السنة
1	1995
2	1996
3	1997
4	1998
5	1999
6	2000

فتكون القيم الممثلة ل(س) عند دراسة الاتجاه العام لهذه الفترة هي  
 1,2,.....,6 ويمكن استخدام معادلة الاتجاه العام في التنبؤ  
 بالمستقبل خلال سنة مستقبلية كما يتضح من المثال التالي :

مثال : الجدول التالي يوضح تطور إنتاج سلعة ما خلال الفترة 1995 -  
 1999 والمطلوب .

1- إيجاد معادلة الاتجاه العام التي تمثل هذا التطور في الإنتاج .

2- التنبؤ بقيمة إنتاج السلعة في عام 2005 .

السنوات (س)	1995	1996	1997	1998	1999
الإنتاج (ص)	3	4	2	5	4

الحل : نحول السنوات إلى أرقام كما يتضح من جدول الحل .

س	ص	ص	ص	ص <sup>2</sup>
1	3	3	1	1
2	4	4	2	4
3	2	2	3	9
4	5	5	4	16
5	4	4	5	25
المجموع	15	18	57	55

$$\text{حيث } \bar{س} = \frac{15}{5} = 3 \text{ ، } \bar{ص} = \frac{18}{5} = 3.6$$

$$\frac{\text{مجموع ص} - \text{ن} \cdot \bar{\text{ص}}}{\text{ن}} = \text{ب} \quad \therefore$$

$$\frac{\text{مجموع ص}^2 - \text{ن} \left( \frac{\text{مجموع ص}}{\text{ن}} \right)^2}{\text{ن}} =$$

$$\frac{3.6 \times 3 - \frac{57}{5}}{5} =$$

$$\frac{2 \left[ \frac{15}{5} \right] - 55}{5} =$$

$$\frac{0.8}{46} = 0.02 \text{ تقريباً} =$$

$$\bar{\text{ص}} - \text{ب} = \text{أ}$$

$$3.54 = 3 \times 0.02 - 3.6 =$$

∴ معادلة الاتجاه العام الزمني من الدرجة الأولى هي

$$\hat{\text{ص}} = 0.02 + 3.54$$

وتوضح هذه المعادلة أن كمية الإنتاج من هذه السلعة متزايدة خلال الفترة 1995-1999) وذلك لأن إشارة معلمة (ب) موجبة وأن مقدار التغير السنوي يقدر بحوالي 0.02 سنوياً وبقسمة مقدار التغير السنوي على متوسط الإنتاج السنوي (ص) أي 3.6/0.02 وهو يساوي 0.005 ، وأن نسبة الزيادة السنوية من المتوسط السنوي تقدر بحوالي 0.55%

$$\text{ب} \\ \text{أى أن معدل الزيادة السنوى} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}} \times 100\%$$

**التنبؤ بكمية الإنتاج عام 2005 :**

أى تحويل سنة 2005 إلى رقم وبالتعويض عنه فى معادلة الاتجاه العام الزمنى (التعويض عن قيمة س بهذا الرقم) نحصل على قيمة ص التى تعنى كمية الإنتاج المتوقعة عام 2005 .

ولتحويل سنة 2005 إلى رقم نبدأ الترقيم من أول الفترة الزمنية وهى عام 1995 حتى نصل إلى سنة 2005 من المعادلة الآتية :

$$\text{الرقم المطلوب} = 2005 - 1995 + 1 = 11$$

وجمعنا 1 لأن سنة 1995 تدخل فى الاعتبار مع سنة 2005

∴ كمية الإنتاج عام 2005 هى :

$$\text{ص}^{\wedge} = 3.54 + 0.02 \times 11 = 3.76$$

**التطبيق على السلاسل الزمنية:**

إذا كان المتغير (س) هو الزمن فإن البيانات تظهر قيم س عند أوقات مختلفة . وتسمى البيانات المرتبة وفقاً للزمن باسم السلاسل الزمنية ، ويعنى خط انحدار ص على س فى هذه الحالة بخط الاتجاه العام ويستخدم غالباً لأهداف التوقع أو التنبؤ Forecasting .

ووفقاً لهذه الطريقة يجب جعل عدد السنوات مساوياً للصفر وذلك يجعل السنة الوسطى فى السلسلة الزمنية يأخذ قيمة صفر ، والسنوات التى قبلها تأخذ أرقام سالبة من -1 إلى ... الخ بالترتيب ،

والسنوات التي بعدها تأخذ أرقام موجبة من +1 إلى ... الخ بالترتيب .  
وتأخذ معادلة الانحدار الصيغة التالية عندما يكون  $مجس = صفر$  .

$$مجس = ن أ + ب مجس$$

$$مجس = ن أ - صفر$$

$$مجس$$

$$\text{---} = أ \therefore$$

$$ن$$

$$مجس ص = أ مجس + ب مجس^2$$

$$مجس ص = صفر + ب مجس^2$$

$$مجس ص$$

$$\text{---} = ب \therefore$$

$$مجس^2$$

والمثال التالي تطبيق على استخدام السلاسل الزمنية

مثال : الجدول التالي يبين إنتاج سلعة ما بالطن خلال الفترة 84-  
1994

والمطلوب :

1- إيجاد معادلة خط انحدار ص على س

2- تقدير الإنتاج في عامي 2000 ، 2005

السنوات	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
الإنتاج	2	3	4	2	6	5	3	2	4	6	3

الحل :

س <sup>2</sup>	س ص	ص	س	السنوات	
25	10-	2	5-	1984	
16	12-	3	4-	1985	
9	12-	4	3-	1986	
4	4-	2	2-	1987	
1	6-	6	1-	1988	السنة
صفر	صفر	5	صفر	1989	الوسطى
1	3	3	1+	1990	
4	4	2	2+	1991	
9	12	4	3+	1992	
16	24	6	4+	1993	
25	15	3	5+	1994	
110	14	40	صفر		المجموع

حيث أن عدد السنوات في هذا التمرين فردي فإنه تم وضع

س = صفر للسنة الوسطى وهي 1998 بحيث يكون عدد السنوات التي

قبلها مساوياً لعدد السنوات التي بعدها وبذلك يكون مجس = صفر

$$3.64 = \frac{40}{11} = \frac{\text{مجس ص}}{\text{ن}} = \text{أ}$$

$$0.13 = \frac{14}{110} = \frac{\text{مجس ص}}{\text{مجس ص}^2} = \text{ب}$$

∴ معادلة الانحدار هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = 0.13 + 3.64 \text{ س}$$

## لحساب التنبؤ بكمية الإنتاج عام 2000 ، 2005

حيث أن السنة 1989 تناظر س = صفر

فإن السنوات 2000 ، 2005 تناظر س = 11 ، س = 16 على الترتيب

وبالتعويض في معادلة الانحدار عن س = 11 ثم س = 16 نحصل على

$$\text{ص}^{\wedge}_1 = 11 \times 0.13 + 3.64 = 5.07$$

$$\text{ص}^{\wedge}_2 = 16 \times 0.13 + 3.64 = 5.72$$

مثال: الجدول التالي يبين قيمة الإنتاج المحلى من سلعة ما خلال

الفترة 1985-1994

السنوات	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
الإنتاج	1	4	2	3	4	2	1	6	8	9

المطلوب:

1- توفيق معادلة الخط المستقيم الممثل لهذه البيانات

2- التنبؤ بقيمة الإنتاج المحلى عام 2005 .

الحل :

فى حالة عندما يكون عدد سنوات السلسلة الزمنية زوجى نأخذ

منتصف السنة الوسطى كأساس (منتصف 89 - 90) .

السنوات	س	س <sup>2</sup> (*)	ص	س ص	س <sup>2</sup>
1985	4.5-	9-	1	9-	81
1986	3.5-	7-	4	28-	49
1987	2.5-	5-	2	10-	25
1988	1.5-	3-	3	9-	9
1989	.5-	1-	4	4-	1
90/89	صفر	صفر			
1990	.5+	1	2	2	1
1991	1.5+	3	1	3	9
1992	2.5+	5	6	30	25
1993	3.5+	7	8	56	49
1994	4.5+	9	9	81	81
المجموع	صفر	صفر	40	112	330

(\*) ضربنا في 2 للتخلص من الكسور

$$4 = \frac{40}{10} = \frac{\text{مجموع ص}}{\text{ن}} = \bar{a}$$

$$0.34 = \frac{112}{330} = \frac{\text{مجموع س ص}}{\text{مجموع س}^2} = \bar{b}$$

معادلة الخط المستقيم هي :

$$\text{ص}^{\wedge} = 0.34 + 4 \text{ س}$$



للتنبؤ بقيمة الإنتاج المحلي عام 2005

سنأخذ س عند سنة 2005 وهى س = 21

$$\text{ص}^{\wedge} = 4 + 0.34 \times 21 = 11.14$$

أمثلة عامة :

(1) الجدول التالى يوضح العلاقة بين قيمة الانفاق الاستهلاكى

(ص) بالدينار ومقدار الدخل الممكن التصرف فيه (س)

والمطلوب :

- تقدير معادلة انحدار ص/س بطريقتى المربعات الصغرى والعزوم  
مفسراً النتيجة .

- اختبار معنوية معامل الانحدار .

- تقدير معامل الارتباط ومعامل التحديد مفسراً النتيجة .

- اختبار معنوية معامل الارتباط .

ص <sup>2</sup>	س <sup>2</sup>	ص س	ص	س	
10404	12996	11628	102	114	
11236	13924	12508	106	118	
11664	15876	13608	108	126	
12100	16900	14300	110	130	
14884	18496	16592	122	136	
15376	19600	17360	124	140	
16384	21904	18944	128	148	
16900	24336	20280	130	156	
20164	25600	22720	142	160	
21904	26896	24272	148	164	
22500	28900	25500	150	170	
23716	31684	27412	154	178	
197232	257112	225124	1524	1740	المجموع
			127	145	المتوسط

الحل :

أولاً : بطريقة المربعات الصغرى

$$\hat{ب} = \frac{ن \text{ مج س ص} - \text{مج س مج ص}}{ن \text{ مج س}^2 - (\text{مج س})^2}$$

$$0.86 = \frac{(1524)(1740) - (225124) 12}{(1740)^2 - (257112) 12}$$

$$\hat{ا} = \bar{ص} - \hat{ب} \text{ س} = 127 - 0.86(145) = 2.30$$

وتكون معادلة خط الانحدار المقدر للاستهلاك هي :

$$\hat{ص} = 0.86 + 2.30 \text{ س}$$

تفسير النتيجة :

معامل انحدار هذه الدالة هو ( $\hat{ب} = 0.86$ ) وهو ميل خط الانحدار المقدر الذى يقيس الميل الحدى للاستهلاك أو التغير الذى طرأ على الاستهلاك نتيجة لتغير الدخل بمقدار وحدة واحدة، بمعنى أن زيادة الدخل بمقدار وحدة واحدة يتبعه زيادة الأنفاق الاستهلاكي بمقدار 0.86 وحدة .

ثانياً : تقدير معامل الانحدار بطريقة العزوم :

$$\hat{ع س ص} = \frac{\text{مج س} (\text{مج ص})}{ن}$$

$$4144 = \frac{1524 \times 1740}{12} - 225124 =$$

$$4812 = \frac{2(1740)}{12} - 2557112 = \frac{2(\text{مجس})}{\text{ن}} - 2 \text{مجس} = \text{عس}$$

$$3684 = \frac{2(1524)}{12} - 197232 = \frac{2(\text{مجص})}{\text{ن}} - 2 \text{مجص} = \text{عص}$$

$$0.86 = \frac{4144}{4812} = \frac{\text{عس}}{\text{عص}} = \hat{ب}$$

$$2.30 = \bar{ص} - \bar{ب} \text{ س} = \hat{ا}$$

وتكون معادلة خط الانحدار المقدرة للاستهلاك هي

$$\bar{ص} = 0.86 + 2.30 \text{ س}$$

وللكشف عن معنوية معامل الانحدار ( $\hat{ب}$ ) فيجب الحصول

على قيمة (ت) المحسوبة بإتباع الخطوات السابق ذكرها كما يلي:

$$\text{تباين البواقي} = \text{عصص} - \hat{ب} \times \text{عسس}$$

$$120.16 = (4144)(0.86) - 3684 =$$

ن

$$\frac{\text{تباين الخطأ}}{\text{ن} - 2} = \text{تباين البواقي} \times$$

ن - 2

$$144.19 = \frac{12}{10} \times 120.16 =$$

$$0.002 = \frac{144.19}{4812 \times 12} = \frac{\text{تباين الخطأ}}{ن \times ع \times س} = \text{تباين معامل الانحدار (ب)^{\wedge}}$$

$$0.045 = \sqrt{0.002} = \sqrt{\text{تباين (ب)}} = \text{الخطأ القياسي}$$

$$19.11 = \frac{0.86}{0.045} = \frac{\text{ب}}{\text{الخطأ القياسي}} = \text{ت المحسوبة}$$

وبمقارنة (ت) المحسوبة بقيمة (ت) الجدولية عند مستوى المعنوية (0.05) ودرجة حرية (ن = 10) نجد إنها تساوى (2.228) أى أن قيمة ت المحسوبة أكبر من قيمة ت الجدولية أى أن معامل الانحدار معنوى وتكون الصيغة القياسية لمعادلة الانحدار هى :  $\hat{ص} = 2.30 + 0.086 س$

(19.11)

تقدير معامل الارتباط :

$$r = \frac{\frac{\sum \text{مج س ص}}{ن} - \left( \frac{\sum \text{مج ص}}{ن} \right) \left( \frac{\sum \text{مج س}}{ن} \right)}{\sqrt{\left( \frac{\sum \text{مج ص}^2}{ن} - \left( \frac{\sum \text{مج ص}}{ن} \right)^2 \right) \left( \frac{\sum \text{مج س}^2}{ن} - \left( \frac{\sum \text{مج س}}{ن} \right)^2 \right)}}$$

$$0.98 = \frac{127 \times 145 - \frac{22512}{12}}{\sqrt{\frac{2(127) - \frac{197232}{12}}{12}} \sqrt{\frac{2(145) - \frac{57112}{12}}{12}}} = r$$

وهذه النتيجة تعنى وجود ارتباط قوى بين قيمة الأنفاق الاستهلاكي ومقدار الدخل ويلاحظ أن قيمة معامل الارتباط موجبة لأن قيمة معامل الانحدار موجبة .  
إيجاد معامل التحديد ( $r^2$ ) :

معامل التحديد ( $r^2$ ) = مربع معامل الارتباط =  $(0.98)^2 = 0.96$   
وهذه النتيجة تعنى أن 96% من التغير في الأنفاق الاستهلاكي يفسرها التغير في الدخل بينما الباقي وهو 4% يعود إلى عوامل أخرى لم يتضمنها نموذج الانحدار البسيط .  
اختبار معنوية معامل الارتباط :

لاختبار معنوية معامل الارتباط يجب استخدام اختبارات ذو الذيلين بدرجات حرية ( $n - 2$ ) حيث  $n = 12$  وعلى ذلك فإن النظرية الفرضية (الصفريية) والنظرية البديلة يمكن صياغتها كما يلي:

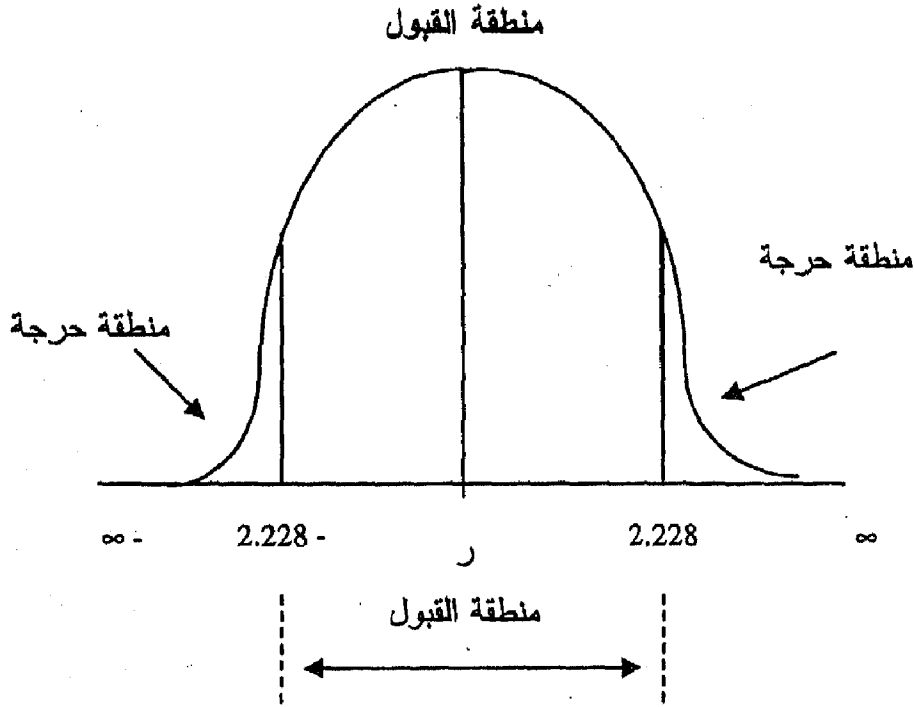
$H_0$  :  $r =$  صفر      النظرية الفرضية

$H_1$  :  $r \neq$  صفر      النظرية البديلة .

وبحساب قيمة (ت) كما يلي :

$$15.50 = \frac{\sqrt{2 - 12} \cdot 0.98}{\sqrt{0.96 - 1}} = \frac{r \sqrt{2 - n}}{\sqrt{r^2 - 1}} = t_r$$

أما قيمة (ت) الجدولية عند مستوى 0.05 ودرجة حرية 10  
 فيهما تساوى 2.228 وعلى ذلك فإن قيمة (ت) المحسوبة لمعامل الارتباط  
 أكبر من قيمتها الجدولية فإن معامل الارتباط يكون معنوى ويمكن  
 توضيح هذا الاختبار فى الشكل التالى :



ومن الشكل يلاحظ أن قيمة (ت) المحسوبة وهى 15.5 تبعد  
 عن منطقة قبول الفرض البديل وتجعله يقع فى المنطقة الحرجة .

## تمارين

(1) أوجد معادلتى انحدار ص على س ، س على ص من واقع بيانات

الجدول التالى :

4	3	6	8	5	س
1	5	3	7	2	ص

(2) من بيانات الجدول التالى :

9	8	7	6	5	4	3	2	1	س
1	2	3	4	5	6	7	8	9	ص

أوجد : أ - معادلة انحدار ص على س

ب- التنبؤ بقيمة ص عندما س = 12

(3) أوجد معادلة انحدار س على ص وتنبأ بقيمة ص عندما س = 15 من

البيانات التالية :

11	9	7	5	3	1	س
2	4	6	8	10	12	ص

(4) إذا كانت قيمة الإنتاج الكلى لإحدى الشركات خلال الفترة من

94- 2000 بالآلاف دينار موضحة بالجدول التالى :

2000	99	98	97	96	95	94	السنوات
86	83	81	77	74	72	68	قيمة الإنتاج

المطلوب: توفيق خط انحدار لقيمة الإنتاج على الزمن ثم قدر قيمة الإنتاج

عام 2005

(5) الجدول التالي يوضح العلاقة بين قيمة الإنفاق على الإعلان لسلعة ما خلال التليفزيون وبين قيمة المبيعات من هذه السلعة بالألف دينار .

8	14	16	18	12	10	قيمة الإنفاق
90	130	190	240	160	120	قيمة المبيعات

المطلوب : توفيق معادلة انحدار قيمة المبيعات على قيمة الإنفاق من الإعلان بطريقة العزوم . ثم تنبأ بقيمة المبيعات عندما يكون المنفق على الإعلان 50 .

(6) من بيانات الجدول التالي :

16	6	12	5	22	10	17	9	23	14	س
93	45	72	31	95	81	79	40	15	68	ص

المطلوب :

- 1- رسم خط الانتشار
  - 2- أوجد معادلة الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى
  - 3- احسب خطأ التقدير ع/ص
- (7) من واقع البيانات التالية :

$$\text{مج ص} = 7.9$$

$$\text{مج س} = 1.23$$

$$\text{مج س}^2 = 17.32$$

$$\text{مج س ص} = 1.61$$

$$\text{ن} = 10$$

$$\text{مج ص}^2 = 29.3$$



أوجد :

أ - معادلة انحدار ص على س ، س على ص

ب- احسب خطأ التقدير ع/ص ، ع/ص

(8) إذا كانت  $6س + 4ص = 36$  أوجد

أ - قيمة س عندما  $ص = 6$

ب- قيمة ص عندما  $س = 4$

ج- الجزء المقطوع من محور ص

د - الجزء المقطوع من محور س

(9) أمكن التوصل إلى البيانات التالية عن المتغيرين س ، ص

مجس = 48 ، مجس<sup>2</sup> = 536 ، مجس ص = 720 ،

مجص = 78 ، مجص<sup>2</sup> = 1108 ، ن = 6

والمطلوب : (1) إيجاد معادلة انحدار ص على س بطريقة العزوم

(2) احسب خطأ التقدير ع/ص

(10) إذا علمت أن الانحراف المعياري لقيم س هو 0.39 والانحراف

المعياري لقيم ص هو 1.24 ومعامل الارتباط هو 0.8 فأحسب معامل

انحدار ص/س.

(11) إذا علمت أن معادلتى انحدار ص على س ، س على ص هما

$$ص = 2.3 + 0.78س$$

$$س = 1.56 + 4.2ص$$

فبين أنه يوجد خطأ فى أحد هاتين المعادلتين .

(12) إذا علمت أن معادلتى انحدار ص على س ، س على ص هما

$$\text{ص} = 5.6 - 0.40 \text{ س}$$

$$\text{س} = 8.6 + 0.80 \text{ ص}$$

فبين أنه يوجد خطأ فى أحد هاتين المعادلتين

(13) الجدول التالى يوضح تطور الإنتاج من ساعة ما خلال

الفترة 92 - 98

السنوات	92	93	94	95	96	97	98
الإنتاج	10	12	16	17	19	18	15

المطلوب :

1- أوجد معادلة الاتجاه العام الزمنى .

2- تتبأ بنتيجة الإنتاج عام 2005 .

(14) إذا علمت أن

$$\text{مج س} = 28 ، \text{مج ص} = 35 ، \text{مج س ص} = 164 ،$$

$$\text{مج س}^2 = 80 ، \text{مج ص}^2 = 125 ، \text{س} = 4 ، \text{ص} = 5$$

المطلوب :

(1) قدر معادلة انحدار ص على س بطريقة العزوم .

(2) قدر المعنوية الإحصائية لمعامل الانحدار .

(3) تتبأ بقيمة ص عندما س = 100 .

الفصل السابع

مبادئ الاحتمالات



## تمهيد:

تمثل نظرية الاحتمالات شأنًا كبيراً بين الدراسات الرياضية والإحصائية نظراً لما لها من استخدامات تطبيقية في كافة نواحي حياتنا اليومية خاصة في مجال إتخاذ القرارات في النواحي الإدارية والاقتصادية وبعض العلوم الأخرى مثل علم الإحصاء وعلم الوراثة، هذا بالإضافة إلى أن أسلوب التنبؤ وتحديد الاتجاهات المستقبلية للعديد من الظواهر إنما يعتمد كثيراً على الأسس النظرية والإحصائية لتحديد التوقع.

وقبل الدخول في نظرية الاحتمالات يجب الإشارة إلى بعض التعاريف الخاصة بالتباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين وهي أحد الوسائل المستخدمة في شرح نظرية الاحتمالات.

### التباديل :

إذا تم ترتيب عناصر مجموعة ما وفقاً لنظام معين فإنه يطلق على مثل هذا النظام اسم تبديل ويمكن معرفة عدد التباديل التي يمكن الحصول عليها عند اختيار (ر) عنصر من مجموعة مكونه من (ن) عنصر باستخدام القانون الآتي :

ن!

$$\text{عدد التباديل} = n!$$

(ن - ر)!

### ملخص لقوانين التباديل

(1) إذا كان لدينا عدة عمليات الأولى تحدث بعدد من الطرق بمقدار (أ) والثانية تحدث بعدد من الطرق مقداره (ب) والثالثة تحدث بعدد من الطرق مقداره (ج) فإن عدد الطرق أو عدد الترتيبات المختلفة التي يمكن أن تحدث بها هذه العمليات مع بعضها = أ × ب × ج .

(2) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر فإن هذه العناصر يمكن ترتيبها بجانب بعضها (أى فى صف) بعدد من الترتيبات مقداره .

$$= \text{ن} ( \text{ن} - 1 ) ( \text{ن} - 2 ) \dots = \text{ن}!$$

(3) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر والمراد ترتيبها فى صورة دائرية فإن عدد هذه الترتيبات = (ن - 1)!

(4) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر والمراد ترتيبها فى مجموعات وكانت كل مجموعة تحتوى عدد (ر) من العناصر. أو بمعنى آخر إذا كان لدينا (ن) من العناصر وعدد (ر) من فرص الاختيار من هذه العناصر فإن عدد طرق ترتيب هذه المجموعات =

$$\frac{\text{ن}!}{( \text{ن} - \text{ر} )!} = \text{ن} \text{ر}$$

(5) إذا كان لدينا عدد مقداره (ن) من العناصر وهذه العناصر منها عدد مقداره (ر) من العناصر المتشابهة تماماً وعدد مقداره (ج) من العناصر المتشابهة تماماً مع بعضها فإن عدد طرق ترتيب العدد (ن) من العناصر السابقة

$$= \frac{\text{ن}!}{\text{ر}! \text{ج}!}$$

ملحوظة : لاحظ أن

$$\text{ن}! = \frac{\text{ن}!}{( \text{ن} - \text{ن} )!} = \text{ن} \text{صفر}$$

$$n! = \frac{n!}{\text{صفراً!}} =$$

مثال : (1)

إذا كان لدينا 5 حروف (أ ، ب ، ج ، د ، هـ) فما هو عدد التباديل اللازمة لأخذ 3 حروف منهم .

الحل :

$$\frac{!5}{!2} = \frac{!5}{!(3-5)} = \text{عدد التباديل} = 5^3$$

$$60 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2} = \text{تبادل}$$

ملحوظة :

$$n! = n(1-n)(2-n)(3-n) \dots$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

مثال : (2)

بكم طريقة يمكن اجلاس 7 أشخاص على مائدة مستديرة ؟

الحل :

فى حالة الدائرة يمكن اجلاس فرد واحد فى أى مكان ثم

ترتيب بقية الأشخاص أى أن :

$$\text{عدد الطرق} = (n-1)! = (1-7)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \text{ طريقة .}$$

مثال : (3)

ما هو عدد الطرق التي يمكن بها غرس 10 شجرات مختلفة  
الأنواع دائرياً حول منزل ؟

الحل :

$$\text{عدد الطرق} = (n-1)! = (1-10)! = 9! = 362880 \text{ طريقة .}$$

التوافيق :

عدد الطرق التي يمكن اختيار (r) تحديث مجموع مختلفة من  
مجموعة بها (n) عنصر هي

$$\frac{n!}{(n-r)! r!} =$$

وتكتب في الصورة  $\binom{n}{r}$  أو  $\binom{n}{r}$  وتنطق (ن) فوق (ر)

$$\frac{n!}{(n-r)! r!} = \binom{n}{r} \text{ حيث}$$

لاحظ أن :

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \text{ حيث : (1)}$$



$$1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{(n-0)! \text{ صفراً!}} = \binom{n}{0}$$

$$1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!(n-0)!} = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad (2)$$

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$$

أى أن :

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{1} \quad (3)$$

$$\frac{n!}{n! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 0!} = \binom{n}{3, 2, 1, 0} \quad (4) \text{ أى أن :}$$

$$107 = \frac{5040}{32} = \frac{7!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \binom{7}{4, 3, 2}$$

مثال : (4)

أوجد عدد الطرق المختلفة التى نحصل بها على 3 وجوه و 5 ظهور عند إلقاء 8 عملات معدنية متزنة .

الحل :

المطلوب معرفة ما هو عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ثلاث رميات نحصل منها على وجه من 8 عملات .

$$\frac{!8}{!3!5} = \frac{!8}{!3!(3-8)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \text{عدد الطرق}$$

$$56 \text{ طريقة} = \frac{!5 \times 6 \times 7 \times 8}{2 \times 3 \times !5} =$$

مثال : (5)

يجرى انتخاب شخصين من بين 12 مرشح ما هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار شخصين مختلفين .

الحل :

في هذه الحالة لا نهتم بترتيب الشخصين المنتخبين أيهما يكون الأول وأيها الثاني وبذلك فأنا أما حالة توافق .

$$\frac{!10 \times 11 \times 12}{!2!(2-12)} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \text{.: عدد الطرق}$$

$$66 \text{ طريقة} = \frac{!10 \times 11 \times 12}{!2!10} =$$

## ملحوظة :

يلاحظ أنه بينما نهتم بالترتيب عند إجراء التباديل لا نهتم به عند إجراء التوافيق فالمجموعة أ ب ، ب أ هما تبدلين مختلفين حيث يهمنا ترتيبهما ولكنهما توفيقاً واحداً حيث لا يهمنا ترتيبهما.

مثال: (6)

بكم طريقة يمكن انتخاب 10 مرشحين من بين 12 مرشحاً .

الحل : هنا كالمثال السابق نفس العدد من المرشحين (ن) ولكن اختلف العدد الذي يجب اختياره .

$$\frac{! 12}{! 10 ! (10 - 12)} = \binom{12}{10} = \text{عدد الطرق}$$

$$66 = \frac{! 10 \times ! 11 \times ! 12}{! 10 \times ! 2}$$

$$66 = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} \quad \text{استنتاج : يلاحظ أن}$$

مثال : (7)

امتحان مكون من أربعة أسئلة ما هي عدد الاحتمالات الممكنة لإجابات الطلبة لهذا الامتحان .

الحل :

إن الاحتمالات الرئيسية أن الطالب قد يجيب على أربعة أسئلة أو على ثلاثة أو على سؤالين أو سؤال واحد أو لا يجيب على الأسئلة كلها ولذلك فإن الحل هو مجموعة الاحتمالات السابقة .

$$16 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

## تمارين

- (1) بكم طريقة يمكن زرع 8 أشجار مختلفة الأنواع دائرياً حول منزل ؟
- (2) ما هو عدد الطرق اللازمة لجلوس 6 أشخاص فى صف مستقيم ؟
- (3) تم ترشيح تسعة أفراد لتعيينهم فى وظائف مدرس مساعد ومعيد ، ما هى الطرق الممكنة التى يمكن اختيار ثلاثة أفراد لتعيينهم فى هذه المناصب ؟
- (4) بكم طريقة يمكن إعادة ترتيب حروف كلمة جنت ، بروكسل ، بلجيكا ، إسكندرية ، إيطاليا ، مراکش ، القسطنطينية .
- (5) ما هى النتائج الممكن حدوثها لإحدى فرق كرة القدم لعب 6 مباريات مع العلم بأن نتيجة المباراة الفوز أو التعادل أو الهزيمة ؟
- (6) يراد انتخابات مجلس إدارة جمعية تعاونية زراعية من 6 أفراد من صغار المزارعين و 4 أفراد من كبار المزارعين وكان المرشحون من صغار الزراع 10 أفراد ومن كبار الزراع 9 أفراد . بكم طريقة يمكن أن يتم هذا الانتخاب .

## نظرية ذات الحدين

مفكوك ذات الحدين لأس صحيح موجب :

يقصد بالحددين هما مقدار جبرى مكون من حدين مثل (أ + ب) أو (س + ص) أو غيرهما .

منطوق النظرية :

إذا كانت (ن) عدد صحيح موجب فإن

$$(س+ص)^ن = س^ن + \binom{ن}{1} ص س^{ن-1} + \binom{ن}{2} ص^2 س^{ن-2} + \dots + ص^ن$$

يلاحظ أن عدد الحدود = (ن + 1) دائماً فإذا كان لدينا المقدار (س+ص)<sup>4</sup> فإن مفكوك هذا المقدار يحتوى على 5 حدود أى (4 + 1) .

ويمكن ترتيب المعاملات المختلفة لمفكوك ذات الحدين وفقاً للمثلث التالى والذى يسمى مثلث بسكال لمعاملات مفكوك ذات الحدين

المعاملات					الأس
				1	1
			1	2	1
		1	3	3	1
	1	4	6	4	1
1	5	10	10	5	1

ولتكوين هذا المثلث ما علينا إلا أن نكتب المعاملين للأس 1 وهما (1، 1) ثم كتابة المعاملات التالية فكل معامل منها هو نتيجة جمع المعامل العلوى له والمعامل الذى على يمين هذا العلوى فمثلاً للحصول على المعامل الثالث للأس الخامس فهو حاصل جمع العلوى له وهو 6 والذى على يمينه وهو 4 مع العلم بأن المعامل الأول والأخير كلاهما يساوى 1 دائماً بالنسبة لأي أس .

كما يلاحظ أن المعامل الأول = المعامل الأخير والمعامل الثانى = المعامل قبل الأخير والمعامل الثالث = المعامل قبل قبل الأخير وهكذا .  
ولذلك فإذا كان عدد المعاملات زوجى أن كل اثنين من المعاملات متساويين مثل حالة الأس الثالث أو الخاص من المثلث السابق . أما إذا كان عدد المعاملات فردى فإن كل معامل يكون له نظير فيما عدا معامل الحد الأوسط ما فى حالة الأس الثانى أو الرابع .

إيجاد حد من حدود ذات الحدين :

من المعروف أن الحد الأول فى مفكوك ذات الحدين

$$ص^0 س^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$ص^1 س^{n-1} = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \text{والحد الثانى}$$

$$ص^2 س^{n-2} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \text{والحد الثانى}$$

$$\text{الحد رقم } (r) = \binom{n}{r} s^r (1+s)^{n-r}$$

$$s^n = \binom{n}{0} s^0 (1+s)^n = \binom{n}{0} = 1$$

∴ لإيجاد الحد رقم 7 من مفكوك (س + ص)<sup>12</sup> يكون على الصورة

$$s^6 (1+s)^6 = \binom{6}{r} s^r (1+s)^{6-r}$$

مثال : (8)

أكتب مفكوك المقدار (س + ص)<sup>4</sup>

الحل :

$$s^4 (1+s)^4 = \binom{4}{0} s^0 (1+s)^4 + \binom{4}{1} s^1 (1+s)^3 + \binom{4}{2} s^2 (1+s)^2 + \binom{4}{3} s^3 (1+s) + \binom{4}{4} s^4$$

$$s^4 \binom{4}{4} +$$

$$= s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

مثال : (9) أكتب مفكوك (س + 5)<sup>4</sup>



الحل:

$${}^2(5\text{ ص})^2(4\text{ س}) \binom{4}{2} + {}^3(5\text{ ص})^3(4\text{ س}) \binom{4}{1} + {}^4(4\text{ س}) \binom{4}{0} = {}^4(5\text{ ص} + 4\text{ س})$$

$${}^4(5\text{ ص}) \binom{4}{4} + {}^3(5\text{ ص}) (4\text{ س}) \binom{4}{3} +$$

$${}^4 256 \text{ س} + {}^3 128 \text{ س} + {}^2 2400 \text{ س} + {}^2 2000 \text{ س} + {}^4 625 \text{ ص} =$$

مثال: (10)

أوجد الحد الخامس من مفكوك  $(2 + \text{ب})^8$

الحل:

$${}^4 \text{ب} \cdot {}^4 1120 = {}^4(\text{ب}) \cdot {}^4(2) \frac{!8}{!4!4} = \binom{8}{1+4} = 5\text{ح}$$

مثال: (11)

باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد جملة مبلغ 100 ألف دينار  
استثمر لمدة 5 سنوات بفائدة مركبة 4% سنوياً .

الحل:

إيجاد جملة المبلغ بفائدة مركبة مقدارها 4% لمدة 5 سنوات هي

$${}^3(0.04) \binom{5}{1} + {}^2(0.40) \binom{5}{1} + 0.40 \binom{5}{1} + 1 = {}^5(40 + 1)$$
$${}^5(0.04) + {}^4(0.04) \binom{5}{1} +$$

$$100000 \times 1.2167 = 0.0000128 + 0.00064 + 0.016 + 0.2 + 1 =$$

$$121670 = \text{دينار} .$$

مثال : (12)

أوجد الحد الأوسط من مفكوك  $(3 + 2)^9$

الحل :

حيث أن أس المقدار عدد فردي يكون هناك حدان أوسطان

ترتيبهما

$$\frac{3+9}{2} , \frac{1+9}{2}$$

أى الحد الخامس والحد السادس

$$489888 = {}^4(2) {}^5(3) \binom{9}{4} = \binom{9}{1+4} = 5\text{ح} = \text{الحد الخامس}$$

$${}^5(2) {}^4(3) \binom{9}{5} = \binom{9}{1+5} = 6\text{ح} = \text{الحد السادس}$$

مثال : (13)

أوجد الحد الأوسط من مفكوك  $(4 + 5)^4$

الحل :

حيث أن أس المقدار عدد زوجي فيوجد حد أوسط واحد فقط

ترتيبه

$$3 = \frac{1+4}{2}$$

أى الحد الثالث حيث أن هذا الحد يأتى بعده حدان وقبله حدان  
وبذلك يقع فى المنتصف تماماً

$${}^2(5\text{ ص}) {}^2(4\text{ س}) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 + 2\text{ ح}) = 3\text{ ح}$$
$${}^2\text{ ص} {}^3\text{ س} 2400 =$$

## تمارين

- (1) أوجد مفكوك (س + ص)<sup>6</sup>
  - (2) أوجد مفكوك (أ + ب)<sup>7</sup>
  - (3) أوجد مفكوك (2س + 3ص)<sup>6</sup>
  - (4) أوجد مفكوك (5س + 2ص)<sup>4</sup>
  - (5) أوجد الحد الثالث والخامس من مفكوك (5س + 10ص)<sup>8</sup>
  - (6) أوجد جملة مبلغ 50000 دينار استثمر لمدة 5 سنوات بفائدة مركبة قدرها 5% نصف سنوياً .
  - (7) أوجد : أ - الحد الذي يحتوى على س<sup>6</sup> فى مفكوك (س + ص)<sup>12</sup>  
ب - الحد السادس فى مفكوك (س + 3ص)<sup>9</sup>  
ج- معامل س<sup>11</sup> ص<sup>12</sup> فى مفكوك (س + ص)<sup>23</sup>
  - (8) أوجد الحد الأوسط فى مفكوك :
- (1) (3س + 4ص)<sup>11</sup> ، (2) (أ + 3ب)<sup>8</sup>

## الاحتمالات البسيطة

### Simple Probability

يمكن تعريف احتمال وقوع الحادث (أ) في تجربة ما بأنه النسبة بين عدد النتائج التي يتكون منها الحادث (أ) وبين عدد النتائج الكلية في التجربة فإذا رمزنا للاحتمال (أ) بالرمز ح (أ) فإن

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد النتائج التي يتكون منها الحادث (أ)}}{\text{عدد النتائج الكلية في التجربة}}$$

وإذا علمنا أن احتمالات أى تجربة هو النجاح أو الفشل فإن مجموع احتمال النجاح والفشل يجب أن يكون مساوياً (الواحد الصحيح) بمعنى آخر أن مجموع احتمالات أى تجربة يساوى الواحد الصحيح وعموماً سنجد أن الاحتمال يأخذ شكل نسبة تتراوح بين الواحد الصحيح One و الصفر Zero

مثال : (14)

إذا ألقيت زهرة من زهر النرد على سطح أملس فأوجد احتمال الحصول على : (1) العدد 4 ، (2) عدد زوجي

الحل : نعلم أن للزهرة ستة أوجه تحمل الأعداد (1,2,3,4,5,6) وعلى ذلك فعند إلقاء الزهرة نجد أن :

عدد النتائج الكلية الممكنة لهذه التجربة = 6

وعدد النتائج التي يتكون منها الحادث (الحصول على 4) هي نتيجة واحدة فقط لأنه لا توجد على الزهرة غير (4) واحدة وبالتالي فإن :

$$(1) \quad \frac{1}{6} = \text{ح (4)}$$

$$(2) \quad \frac{3}{6} = \text{ح (عدد زوجي)}$$

مثال : (15)

سكشن به 30 طالب وطالبة منهم 19 من الذكور والبقية من الإناث فإذا اخترنا طالباً بطريقة عشوائية فما هو احتمال أن يكون فتاه .

الحل :

$$\text{عدد الإناث في السكشن} = 30 - 19 = 11 \text{ فتاه}$$

$$\frac{11}{30} = \text{ح (اختيار فتاه)}$$

مثال : (16)

سحب كارت بطريقة عشوائية من مجموعة كاملة من ورق اللعب تحتوى على 52 كارت منها 26 كارت أسود ، 26 كارت أحمر ، 13 كارت سباتى وأربع آسات ..... فأوجد :

(1) احتمال سحب كارت أحمر

(2) احتمال سحب كارت سباتى

(3) احتمال سحب كارت آس

$$\frac{1}{2} = \frac{26}{52} = \text{ح (سحب كارت أحمر)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{13}{52} = \text{ح (سحب كارت سبائي)}$$

$$\frac{1}{13} = \frac{4}{52} = \text{ح (سحب كارت آس)}$$

مثال : (17)

إذا ألقيت زهرتين من زهر النرد على سطح أملس فأوجد

احتمال:

(أ) الحصول على مجموع (2) (ج) الحصول على مجموع (4)

(ب) الحصول على مجموع (3) (د) الحصول على مجموع (11)

الحل :

كل زهرة لها 6 أوجه وبالتالي فإن الزهرتان يمكن أن يظهرأ  
معاً بعدد من الطرق قدرها  $6 \times 6 = 36$  طريقة والحادث الحصول على  
مجموع : (2) يمكن أن نحصل عليه بطريقة واحدة (1 ، 1) أى يظهر  
على الزهرة الأولى (1) ، ويظهر على الزهرة الثانية (1) .

$$\frac{1}{36} = \text{ح} = (\text{الحصول على مجموع 2})$$

$$\frac{2}{36} = \text{ح} = (\text{الحصول على مجموع 3})$$

لأن حادث الحصول على مجموع (3) هو (1 ، 2) ، (2 ، 1)

وبالمثل فإن

$$\frac{3}{36} = \text{ح} = (\text{الحصول على مجموع 4})$$

$$\frac{2}{36} = \text{ح} = (\text{الحصول على مجموع 1})$$

لأن حادث الحصول على مجموع 11 من الزهرتين هو (5 ، 6) ،

(6 ، 5)

مثال : (18)

ما هو احتمال أن تسحب ورقة لعب تحمل رقم 5 من مجموعة

كاملة من ورق اللعب .

الحل : عدد أوراق اللعب 52 ورقة .

عدد الأوراق التي تحمل رقم 5 = 4 ورقات .

$$\frac{4}{52} = \frac{1}{13} = \text{الاحتمال المطلوب}$$



$$\frac{12}{13} = \text{وا احتمال الأوراق التي لا تحمل رقم 5}$$

$$= 1 - \text{ح (تحمل الورقة رقم 5)}$$

### الاحتمالات المركبة Compound Probability

إذا تكونت تجربة من تجربتين بسيطتين أو أكثر فإنها تسمى تجربة مركبة والاحتمالات المتعلقة بها تسمى احتمالات مركبة . مثل إلقاء قطعتين من النقود معاً فهي تجربة مركبة وتتكون من التجريبتين البسيطتين (رمى قطعة النقود الأولى ورمى القطعة الثانية) . وللتجربة الأولى نتيجتان صورة وكتابة ، وللتجربة الثانية نتيجتان صورة وكتابة أيضاً . فإذا رمزنا للصورة (ص) والكتابة بالرمز (ك) نجد أن التجربة المركبة تتكون من عدد من النتائج عددها  $2 \times 2 = 4$  نتائج وهي (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك).

• وإذا حاولنا إلقاء ثلاث قطع نقود فإن التجربة المركبة هنا

$$\text{تتكون من نتائج عددها } 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

$$= \text{(نتائج التجربة الواحدة) عدد التجارب}$$

وهذه النتائج هي (ص ص ص) ، (ص ص ك) ، (ص ك ص) ، (ص ك ك) ، (ك ص ص) ، (ك ص ك) ، (ك ك ص) ، (ك ك ك)

• وعلى ذلك إذا كان لدينا التجربة (أ<sub>1</sub>) التي لها نتائج عددها

(ن<sub>1</sub>) والتجربة (أ<sub>2</sub>) التي لها نتائج عددها (ن<sub>2</sub>) والتجربة (أ<sub>3</sub>)

التي لها نتائج عددها (ن<sub>3</sub>) .

فإن التجربة المركبة (أ<sub>1</sub> ، أ<sub>2</sub> ، أ<sub>3</sub>) لها نتائج عددها (ن<sub>1</sub> × ن<sub>2</sub> × ن<sub>3</sub>) .

فالتجربة المركبة من إلقاء زهرتين من زهرة النرد معاً يكون لها نتائج عددها  $6 \times 6 = 36$  والتجربة المركبة من إلقاء 3 زهرات معاً يكون لها نتائج عددها  $6 \times 6 \times 6 = 216$ .

مثال : (19)

إذا ألقيت زهرتين من زهر النرد معاً على سطح أملس فما هو احتمال الحصول على رقمين حاصل جمعهما 2 أو 8 أو 12 .

الحل : عدد النتائج الممكنة لإلقاء زهرتين نرد هي  $6 \times 6 = 36$

وعدد النتائج التي يتكون منها الحادث (المطلوب) يساوى 7 نتائج هي

6	6	5	4	3	2	1	الزهرة الأولى :
6	2	3	4	5	6	1	الزهرة الثانية :

$$\therefore \text{ح (المطلوب)} = \frac{7}{36}$$

### قانون جمع الاحتمالات Addition Law

#### الحوادث المتنافرة أو المانعة أو الطارئة :

يقال للحادثين 1 ، 2 انهما متنافران أو مانعان أو طاردان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر . فعند إلقاء قطعة نقود فإما أن تظهر الصورة أو الكتابة ولا يمكن أن تظهر الصورة والكتابة معاً ولذلك فإن الحادث ظهور الصورة أو الحادث ظهور الكتابة مانعان لأن حدوث أحدهما يمنع وقوع الآخر . فعند إلقاء زهرة نرد على سطح أملس فإن الحادث (الحصول على رقم زوجي) والحادث (الحصول على رقم يقبل القسمة على 2) غير مانعين لأن وقوع الحادث الأول (الذي يتكون

من النتائج 2، 4، 6) لا يمنع الحادث الذي يتكون من النتيجةين ( 3، 6) إذ قد نحصل على الرقم 6 وهو رقم زوجي وفي نفس الوقت يقبل القسمة على 3 .

### جمع الاحتمالات للحوادث المانعة :

إذا كان  $A_1$  ،  $A_2$  حادثين مانعين فإن احتمال حدوث  $A_1$  و  $A_2$  يساوي مجموعة احتمال حدوث كل منهما على حدة أي أن  $H(A_1 \text{ أو } A_2) = H(A_1) + H(A_2)$  أو تكتب  $H(A_1 \cup A_2) = H(A_1) + H(A_2)$  ومعنى أن  $A_1$  ،  $A_2$  حادثين مانعين أي لا يوجد عناصر مشتركة بينهما.

مثال : (20)

مجموعة من الكرات تتكون من 15 كرة تحمل أرقام من 1 إلى 15) فإذا سحبت منها كرة واحدة بطريقة عشوائية فما هو احتمال أن يكون الرقم المدون على الكرة يقبل القسمة على 4 أو يقبل القسمة على 7 .

الحل : الحادث (يقبل القسمة على 4) والحادث (يقبل القسمة على 7) مانعين لأن الأول يتكون من النتائج (4 ، 8 ، 12) والثاني يتكون من النتائج ( 7 ، 14 ) ولا توجد نتيجة مشتركة بينهما أي لا يوجد في المجموعة كلها رقم يقبل القسمة على 4 وفي نفس الوقت يقبل القسمة على 7 وبالتالي فإن  $H(A_1 \text{ أو } A_2) = H(A_1) + H(A_2)$  (يقبل القسمة على 4) +  $H(A_2)$  (يقبل القسمة على 7).

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} =$$

### جمع الاحتمالات للحوادث غير المانعة :

إذا كان  $A_1$  ،  $A_2$  حادثين غير مانعين فإن

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

مثال : (21)

في المثال السابق أوجد احتمال أن يكون الرقم المدون على

الكرة يقبل القسمة على 3 أو 5 .

الحل :

الحادث يقبل القسمة على 3 يتكون من النتائج ( 9 , 12 , 15

3 , 6 ) والحادث يقبل القسمة على 5 يتكون من النتائج ( 5 , 10 , 15

والحادث يقبل القسمة على ( 3 , 5 ) يتكون من نتيجة واحدة وهي ( 15 ) .

ومن الواضح أن الحادث ( يقبل القسمة على 3 ) والحادث ( يقبل

القسمة على 5 ) غير مانعين وذلك لوجود نتيجة مشتركة بينهما وهي

( 15 ) حيث تقبل القسمة على ( 3 ، 5 ) وبالتالي فإن  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2)$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

القسمة على ( 3 ، 5 )

$$\frac{7}{15} = \frac{1}{15} + \frac{3}{15} + \frac{5}{15} =$$

قانون ضرب الاحتمالات :

### الحوادث المستقلة :

يقال للحدثين  $A$  ،  $B$  أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر. فإذا ألقيت زهرة واحدة من زهر النرد على سطح أملس مرتين فإن حادث الحصول على رقم (5) في المرة الأولى وحادث الحصول على رقم (5) في المرة الثانية يعتبران حادثان مستقلان لأن الحصول على رقم (5) في المرة الأولى لا يؤثر ولا يتأثر بالحصول على الرقم (5) في المرة الثانية. وإذا سحبت ورقتان من أوراق الكوتشينية فإن الحادث الحصول على ولد بالكرات الأول والحادث الحصول على ولد بالكرات الثاني يعتبران حادثان غير مستقلان إذا كنا لا نعيد الكرات المسحوب إلى المجموعة قبل سحب الكرات الثاني لأن الحصول على ولد بالكرات الثاني سيتأثر بالحصول على ولد الكرات الأول لأن عدد الأولاد سيصبح 3 بدلاً من 4 وعدد أوراق اللعب سيصبح (51 بدلاً من 52) أما في حالة رجوع الكرات الأول وخلط الورق جيداً قبل سحب الكرات الثاني يكون الحادثين الحصول على ولد بالكرات الأول والحصول على ولد بالكرات الثاني مستقلين .

### ضرب الاحتمالات للحوادث المستقلة :

إذا كان  $A$  ،  $B$  حادثين مستقلين فإن احتمال وقوع كل من

$A$  ،  $B$  هو :

$$P(A, B) = P(A) \times P(B)$$

مثال : (22)

ألقيت زهرة واحدة من زهر النرد على سطح أملس مرتين أوجد احتمال الحصول على العدد (5) فى المرتين .

الحل :

$$\text{احتمال الحصول على العدد (5) فى المرة الأولى} = 6/1 = \text{ح (أ1)}$$

$$\text{احتمال الحصول على العدد (5) فى المرة الثانية} = 6/1 = \text{ح (أ2)}$$

$$\therefore \text{ح (أ1 ، أ2)} = \text{ح (أ1)} \times \text{ح (أ2)} = 6/1 \times 6/1 = 36/1$$

مثال : (23) سحب كارتان من مجموعة كاملة لورق اللعب تحتوى على 52 كارت وتحتوى على 4 اولاد و 13 كارت من النوع السباتى فإذا كنا نعيد الكارت الأول ونخلط الورق جيداً قبل سحب الكارت الثانى فأوجد :

(1) احتمال أن يكون كل من الكارتين المسحوبين ولد.

(2) احتمال أن يكون كل من الكارتين المسحوبين سباتى.

الحل :

$$\text{ح (سحب ولد)} = 52/4 ، \text{ح (سحب سباتى)} = 52/13$$

$$\text{ح (أ1 ، أ2)} = \text{ح (أ1)} \times \text{ح (أ2)}$$

$$\text{ح (سحب ولدين)} = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

$$\text{ح (سحب ورقتين سباتى)} = \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{169}$$

## ضرب الاحتمالات للحوادث غير المستقلة :

إذا سحبنا كارتاً واحداً بطريقة عشوائية من مجموعة كاملة لورق اللعب وتبيناه ولم نرجعه إلى المجموعة وسحبنا كارتاً آخر فإن احتمال أن يكون الكارت الثانى من النوع السباتى =  $51/12$  إذا كان الكارت الأول من النوع السباتى، ويساوى  $15/13$  إذا كان الكارت الأول ليس من النوع السباتى ومن ذلك نتبين أن معرفتنا لنوع الكارت الأول تؤثر على حساب الاحتمال للكارت الثانى. وعموماً إذا كان لدينا حادثين غير مستقلين  $A_1$  ،  $A_2$  فإن احتمال وقوعهما معاً يحتوى على احتمال شرطى Conditional Probability حسب العلاقة :

$$P(A_1, A_2) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1)$$

حيث  $P(A_2 / A_1)$  تسمى بالاحتمال الشرطى وتعنى احتمال وقوع  $A_2$  مع العلم بأن  $A_1$  قد وقع .

مثال : (24) احسب المطلوب فى المثال السابق بفرض عدم إعادة الكارت الأول قبل سحب الكارت الثانى.

الحل :  $P(A_1) = 52/52 = 1$  (سحب ولد) فى المرة الأولى =  $52/52$

$P(A_2) = 51/51 = 1$  (سحب ولد) فى المرة الثانية =  $51/51$

$P(A_1, A_2) = 52/52 \times 51/51 = 51/52$  (سحب سباتى) فى المرة الأولى =  $52/52$

$P(A_1, A_2) = 51/52 \times 51/51 = 51/52$  (سحب سباتى) فى المرة الثانية =  $51/52$

$$P(A_1, A_2) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1)$$

$$\frac{1}{221} = \frac{3}{51} \times \frac{4}{52} = \text{ح (سحب ولدين)}$$

$$\frac{1}{17} = \frac{12}{51} \times \frac{13}{52} = \text{ح (سحب كارتين سيأتي)}$$



## تمارين

- 1) يحتوى صندوق على 20 كرة حمراء ، 30 كرة بيضاء ، 20 كرة زرقاء ، 15 كرة سوداء ، احسب الاحتمالات الآتية:
- أ - احتمال أن تسحب كرة واحدة سوداء أو حمراء .
- ب - احتمال تكون الكرة المسحوبة حمراء أو زرقاء .
- ج - احتمال أن لا تكون الكرة المسحوبة حمراء أو زرقاء .
- د - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء .
- هـ - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو زرقاء .
- 2) احسب احتمال سحب ثلاثة أوراق بها صورة بنت من مجموعة كاملة من ورق اللعب (السحب بإرجاع مرة وبدون إرجاع مرة أخرى)
- 3) مخزن (أ) به 60 وحدة جيدة ، 40 وحدة رديئة ، ومخزن (ب) به 80 وحدة جيدة، 20 وحدة رديئة ومخزن (ج) به 50 وحدة جيدة و50 وحدة رديئة فإذا سحبنا وحدة واحدة من كل مخزن . احسب الآتى :
- (أ) احتمال أن تكون الثلاث وحدات جيدة .
- (ب) احتمال أن تكون الثلاث وحدات رديئة .
- (ج) احتمال أن تكون الأولى جيدة والثانية والثالثة رديئة .
- (د) احتمال أن تكون الأولى والثالثة جيده والثانية رديئة .

4) إذا كان احتمال الحياة للزوج مدة عشر سنوات بعد اليوم =  $7/1$  واحتمال حياة الزوجة مدة عشر سنوات بعد اليوم =  $9/1$  احسب الاحتمالات الآتية :

1- احتمال أن يعيشا سوياً مدة عشر سنوات .

2- احتمال أن يتوفيا سوياً خلال هذه المدة .

3- احتمال أن يعيش الزوج وتتوفى الزوجة .

4- احتمال أن يتوفى الزوج وتعيش الزوجة .

5) إذا كان احتمال نجاح الطالب فى مادة الاقتصاد هو 0.5، واحتمال نجاحه فى مادتى الاقتصاد والرياضة سوياً 0.45 وإذا كان نجاحه فى مادة واحدة على الأقل فى هاتين المادتين هو 0.80 احسب احتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة .

6) إذا كان احتمال توزيع مذكرة الرياضة هو 0.8 واحتمال توزيع مذكرة الاقتصاد هو 0.9 احسب احتمال توزيع أحدهما على الأقل .

7) عند إلقاء ثلاث قطع نقود متزنة مرة واحدة أوجد احتمال أن تكون الأوجه الثلاثة متشابهة أو أن تظهر الصورة على وجهين على الأقل ، ثم أوجد احتمال أن تكون الأوجه الثلاثة متشابهة أو أن تظهر الصورة على وجهين فقط.

8) صندوق به 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10 إذا سحبنا كرة عشوائياً من هذه الكرات من هذا الصندوق فأوجد ما يلى :

1- احتمال أن يكون على الكرة رقماً زوجياً أو أقل من أو يساوى 5 .

2- احتمال أن يكون على الكرة رقماً 3 أو أكبر من 6 .

(9) كيس به 20 كرة منها 7 حمراء ، 8 بيضاء ، 5 صفراء سحبت 3 كرات عشوائياً من هذا الكيس أوجد احتمال أن تكون الأولى صفراء والثانية حمراء والثالثة بيضاء إذا كان :

أولاً: السحب بإرجاع .

ثانياً : السحب بدون إرجاع .

(10) من التمرين السابق أوجد احتمال أن تكون الكرات الثلاثة حمراء إذا كان السحب بإرجاع مرة وبدون إرجاع مرة أخرى .

## التوزيعات الاحتمالية

أولاً : توزيع ذو الحدين :

إذا كان ل1 تمثل احتمال حدوث حدث معين في محاولة واحدة فيقال إنه احتمال النجاح وبالتالي يكون  $2 = 1 - 1$  هو احتمال الفشل . فإذا فرض أن احتمال حدوث حدث معين (س) مرة في عدد من المحاولات مقداره (ن) محولة فإن هناك (س) محاولة تمثل عنصر النجاح ، (ن - س) تمثل الفشل وتعطى بالمعادلة التالية :

$$ح(س) = \binom{ن}{س} (1)^س (2)^{ن-س}$$

$$= \frac{ن!}{(ن-س)! س!} (1)^س (2)^{ن-س}$$

فمثلاً احتمال الحصول على الصورة في رمى قطعة نقود من الممكن التعبير عنه بالرموز (ص) وبالتالي فإن احتمال الحصول على الكتابة =  $1 - ص = ك$  أو  $1 - ح(ص) = ح(ك)$  .

فعند رمى ثلاث قطع نقود مرة واحدة فإنه من الممكن الحصول على أى من التوافيق الممكنة لكل من الصورة والكتابة كما يلي :

الاحتمال	الحالة
$8/1$ (ص <sup>3</sup> )	ص ص ص
$8/1$ (ص <sup>2</sup> ك)	ص ص ك
$8/1$ (ص <sup>2</sup> ك)	ص ك ص
$8/1$ (ص <sup>2</sup> ك)	ك ص ص
$8/1$ (ص ك <sup>2</sup> )	ص ك ك
$8/1$ (ص ك <sup>2</sup> )	ك ص ك
$8/1$ (ص ك <sup>2</sup> )	ك ك ص
$8/1$ (ك <sup>3</sup> )	ك ك ك

وهكذا يكون لدينا مجموعة من الأحداث مستبعدة لحدوثها البعض وحيث أن مجموع الاحتمالات الكلية لأي تجربة يساوى الواحد الصحيح فإن :

$$1 = 3(ص^3) + 3(ص^2ك) + 3(صك^2) + (ك^3)$$

والجزء الأيمن من المعادلة هو عبارة عن مفكوك ذات الحدين (ص + ك)<sup>3</sup> وتوزيع النتائج يطلق عليه توزيع ذو حدين وهو عبارة عن توزيع احتمال متقطع .

مثال : (25)

إذا كانت فرصة فوز المنافس لمباراة ما هي (0.6) إذا تم اللعب 4 مباريات فما هو احتمال أن يكسب صفر ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، من المباريات على الترتيب.

الحل :

احتمال الفوز هو (0.6) وبالتالي فإن احتمال الخسارة يكون  
-1  $0.4 = 0.6$  وبالتالي نحصل على كل الاحتمالات الممكنة  
بمفكوك ذات الحدين .

$$(0.6) \binom{4}{3} + {}^2(0.4) {}^2(0.6) \binom{4}{2} + (0.4) {}^3(0.6) \binom{4}{1} + {}^4(0.6) = {}^4(0.4 + 0.6)$$
$${}^4(0.4) + {}^3(0.4)$$

$${}^4(0.4) + {}^3(0.4) (0.6) 4 + {}^2(0.4) {}^2(0.6) 6 + (0.4) {}^3(0.6) 4 + {}^4(0.6) =$$

مما سبق يتضح أن توزيع ذو الحدين يستعمل أساساً كتوزيع  
للمتغيرات المتقطعة والتي تحدث في صورتين فقط مثل الحصول على وجه  
أو ظهر من رمى قطعة نقود معدنية أو إنجاب ذكر أو أنثى أو وصول  
البيض سليم أو فاسد أو نباتات مصابة أو سليمة ونجد أن كل من ل1 ،  
ل2 هما الاحتمال البسيط للنجاح والفشل وكل منها كسر موجب  
ومجموعها يساوي الواحد الصحيح .

توزيع ذو الحدين عندما يكون ل1 = ل2 = 2/1 :

مثال : (26)

في عائلة مكونة من 6 أطفال ما هي الاحتمالات المختلفة لجنس  
هؤلاء الأطفال .

الحل :

في الواقع أن هناك عديد من الاحتمالات الممكنة لهؤلاء الستة  
أطفال يمكن توضيحها في التالي :

أنثى	ذكر	احتمال
-	6	احتمال
1	5	احتمال
2	4	احتمال
3	3	احتمال
4	2	احتمال
5	1	احتمال
6	-	احتمال

ومن هنا نجد أن عدد الاحتمالات الكلية الممكنة يزيد واحد عن عدد الأفراد وحيث أن عدد الأطفال 6 وعدد الاحتمالات 7 ومقابل لكل توفيق من القوانين السابقة احتمال نظري أو رياضي من الممكن الحصول عليه من مفكوك المعادلة  $(l+1)2^l$  حيث أن  $l$  هو احتمال الحصول على ذكر ويساوي  $1/2$  ،  $l$  هو احتمال الحصول على أنثى ويساوي  $1/2$  وبذلك تصبح المعادلة العامة هي  $6(1/2 + 1/2)$  ومفكوكها يعطى جميع الاحتمالات للسبعة أحداث السابقة .

$$3(1/2)^3 + 20(1/2)^2 + 15(1/2)^4 + 6(1/2)^5 + 6(1/2)^6 = (1/2 + 1/2)^6$$

$$+ 15(1/2)^2 + 6(1/2) + 6(1/2)^5 + 6(1/2)^6$$

ولاستخراج قيمة الاحتمال الخاصة بالحصول على ستة أطفال ذكور هو مفكوك الحد الأول من مفكوك ذات الحدين  $(1/2 + 1/2)^6$  .

ولتوضيح ذلك نضع جميع الاحتمالات في الشكل التالي :

$$0.015625 = \text{ح (ستة أطفال ذكور)} \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$0.093750 = \text{ح (خمسة أطفال ذكور وأنثى واحدة)} 6 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$0.234375 =$$

$$0.234375 = \text{ح (أربعة ذكور وأنثتان)} 15 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$0.312500 = \text{ح (ثلاثة أطفال ذكور وثلاثة إناث)} 20 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$0.234375 = \text{ح (طفلان ذكور وأربعة إناث)} 15 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$0.093750 = \text{ح (طفل ذكر وخمسة إناث)} 6 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$0.015625 = \text{ح (الأطفال الستة إناث)} \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$1.000000 = \text{مجموع الاحتمالات}$$

توزيع ذو الحدين عندما  $l \neq 1$  و  $2 \neq 1$  ولكن مجموعهما يساوى الواحد الصحيح:

مثال : (27)

فى أحد حقول القطن وجد أن معدل الإصابة بمرض الذبول الفيوزارى للبادرات هو 30% فإذا فحصت 6 بادرات فما هى الاحتمالات المختلفة للإصابة من عدمها بالنسبة لهذه البادرات الستة .



الحل :

من الممكن التعبير رياضياً عن قيمة الاحتمالات المختلفة للأحداث على أساس مفكوك ذات الحدين حيث يكون احتمال الإصابة 30% واحتمال عدم الإصابة 70% ويعبر بمفكوك المعادلة :

$${}^6(0.3) = {}^6(0.7) + {}^5(0.7) {}^1(0.3) + {}^4(0.7) {}^2(0.3) + {}^3(0.7) {}^3(0.3) + {}^2(0.7) {}^4(0.3) + {}^1(0.7) {}^5(0.3) + {}^6(0.3)$$

ويعبر عن جميع الاحتمالات فى صورة الجدول التالى :

الاحتمال

1- احتمال أن تكون الستة نباتات مصابة  ${}^6(0.3) = 0.0008$

2- احتمال أن تكون خمسة مصابة وواحدة سليمة  ${}^5(0.7) {}^1(0.3) = 0.0105$

3- احتمال أن تكون أربعة مصابة و2 سليمة  ${}^4(0.7) {}^2(0.3) = 0.05094$

4- احتمال أن تكون 3 مصابة و 3 سليمة  ${}^3(0.7) {}^3(0.3) = 0.1852$

5- احتمال أن تكون 2 مصابة و 4 سليمة  ${}^2(0.7) {}^4(0.3) = 0.3241$

6- احتمال أن تكون واحدة مصابة وخمسة سليمة  ${}^1(0.7) {}^5(0.3) = 0.3025$

7- احتمال أن تكون 6 نباتات سليمة  ${}^6(0.7) = 0.1175$

مجموع الاحتمالات  $1.0000 =$

مثال : (28)

من المثال السابق ما هو احتمال الحصول على ثلاث نباتات مصابة وثلاثة سليمة .

الحل : فى هذه الحالة يجب معرفة ترتيب الحد الذى يحتوى على 3 مصابة و 3 سليمة فنجد الحد الرابع أى إذا كان المطلوب هو إيجاد مفكوك الحد الرابع من مفكوك  $(0.7 + 0.3)^6$

$$0.1852 = {}^3(0.7) {}^3(0.3) \binom{6}{3} = {}_{1+3}C$$

مثال : (29)

من المثال قبل السابق أوجد احتمال الحصول على 3 نباتات مصابة على الأقل .

الحل : فى هذه الطريقة قد تكون 3 مصابة أو 4 مصابة أو 5 مصابة أو 6 مصابة أى الاحتمال المطلوب يكون على صورة الحدود .

$${}^6(0.3) + (0.7) {}^5(0.3) \binom{6}{1} + {}^2(0.7) {}^4(0.3) \binom{6}{2} + {}^3(0.7) {}^3(0.3) \binom{6}{3} \\ = 0.2559 = 0.0008 + 0.0105 + 0.0594 + 0.1852 =$$

حيث الأس الذى يعلو الرقم  $(0.3)$  يدل على عدد النباتات المصابة من إجمالى عدد البادرات وهو 6 وبالتالي إذا كان الأس هو 3 مثلاً فإن عدد النباتات السليمة المتممة للـ 6 هو 3 وكذلك إذا كان هو 4 فإن عدد النباتات السليمة يكون 2 وهكذا وحيث القانون يكون على الصورة :

$$\binom{n}{r} p^r q^{n-r} \text{ حيث } p+q=1$$

ن تدل على إجمالي عدد النباتات السليمة والمصابة معاً .

ن- ر تمثل عدد النباتات المصابة .

ر تمثل عدد النباتات السليمة .

مثال : (30)

من المثال السابق ما هو احتمال الحصول على 3 نباتات مصابة على الأكثر .

الحل : فى هذه الحالة قد تكون 3 مصابة (والباقى سليم) أو 2 مصابة (والباقى سليم) أو واحدة مصابة (والباقى سليم) أو الكل سليم .

$$\binom{6}{5} (0.7)^5 (0.3) + \binom{6}{4} (0.7)^4 (0.3)^2 + \binom{6}{3} (0.7)^3 (0.3)^3 = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$(0.7) + 5(0.7)(0.3)$$

$$0.9293 = 0.1175 + 0.3025 + 41.32 + 0.1852 =$$

خواص توزيع ذو الحدين :

$$(1) \text{ المتوسط } = \mu = n p$$

$$(2) \text{ التباين } = \sigma^2 = n p q$$

$$(3) \text{ انحراف المعياري } = \sigma = \sqrt{n p q}$$

$$(4) \text{ معامل العزوم للالتواء} = \frac{1ل - 2ل}{2ل 1ل ن}$$

$$(5) \text{ معامل العزوم للتفرطح} = 3 + \frac{2ل 6 - 2ل 1ل 1ل}{2ل 1ل ن}$$

حيث ن هو عدد التجارب أو عدد النتائج أو .....

1ل هو احتمال النجاح ، 2ل هو احتمال الفشل حيث 1ل + 2ل = 1

مثال : (31)

في عائلة مكونة من خمسة أطفال المطلوب استخراج المتوسط والتباين للمتغير (ذ) وهو عدد الذكور.

الحل :

$$\text{المتوسط } \mu = ن 1ل = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$$

$$\text{التباين } \sigma^2 = ن 1ل 2ل = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1.25$$

**ثانياً : توزيع بواسون Poisson Distribution**

هذا التوزيع عبارة عن حالة من حالات توزيع ذو الحدين ويستعمل عندما يكون احتمال واقعة ما صغيرة جداً وعدد أفراد المجموعة كبير جداً . ويفيد هذا التوزيع في الحالات التي لا يعرف فيها عدد الأفراد N والتوزيع تمثله العلاقة التالية :

$$P(x) = \frac{e^{-u} \frac{u^x}{x!}}{e^{-u} \frac{u^x}{x!}}$$

حيث  $U$  وهو عبارة عن ثابت إحصائي معين وهي قيمة نظرية تمثل متوسط  $X$ .

$$e \text{ رقم ثابت} = 2.718$$

$$x = 1, 2, 3, \dots \text{ حيث } X \text{ متغير متقطع}$$

مثال : (32)

إذا كان متوسط عدد الأيام غزيرة الأمطار خلال فصل الشتاء في أحد مدن الجماهيرية هو 4 أيام في السنة فما هو احتمال سقوط الأمطار الغزيرة في هذه المدينة لمدة 6 أيام خلال فصل الشتاء .

الحل :

باستعمال توزيع بواسون فإن قيمة  $U = 4$  ،  $X = 6$

$$-4 \quad 6$$

$$P(X) = \frac{e^{-4} 4^6}{6!} = 0.1040$$

وهناك جداول خاصة بهذا التوزيع عن الاحتمالات الممكنة لبعض القيم .

### ثالثاً : التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يعتبر من أكبر التوزيعات التي تمت دراستها في الإحصاء . كما أنه يعتبر من أهم التوزيعات التي تختص بالمتغيرات المستمرة . وهو يقابل توزيع ذو الحدين للمتغيرات المتقطعة وفي حالة  $l = 1$  ،  $2l = 0.5$  وتكون (ن) كبيرة .

## خصائص التوزيع الطبيعي :

(1) التوزيع الطبيعي عبارة عن توزيع مستمر يختلف عن كل من توزيع ذو الحدين وتوزيع بواسون حيث يختصان بالمتغيرات المتقطعة .

(2) يمكن التعبير عنه بالعلاقة الآتية :

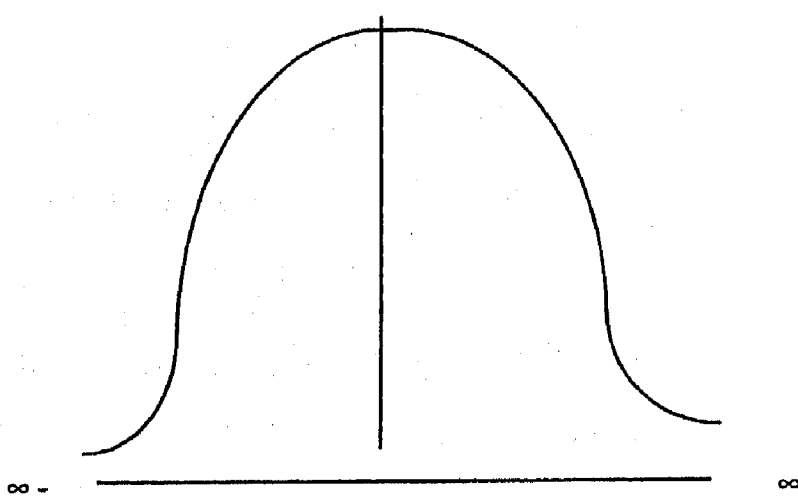
$$Y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} \dots\dots\dots(A)$$

$$\sigma = \text{الانحراف المعياري} = 2.718 \quad e$$

$$\mu = \text{المتوسط} = 3.14 \quad \pi$$

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

والمنحنى الممثل للمعادلة (A) يسمى منحنى التوزيع الطبيعي وهو ناقوس الشكل ومتماثل من الجانبين وهذا المنحنى يوضح العلاقة بين قيم X والتكرار Y



وهناك معادلات خاصة يمكن من خلالها إيجاد المساحات الجزئية المختلفة تحت أى منحنى طبيعى بقيمة كل من  $\mu$  و  $\sigma^2$  وفى هذه الحالة يتطلب الأمر تطبيق معادلات معقدة لاستخراج هذه المساحات. وللتسهيل فإن الإحصائيين استنبطوا ما يطلق عليه منحنى التوزيع الطبيعى القياسى والتي يمكن لأى قيم تتوزع طبيعياً أن تنطبق على هذا التوزيع.

### المنحنى الطبيعى القياسى Standard Normal Curve

استنبط الإحصائيون جداول إحصائية توضح المساحات تحت المنحنى لأجزاء تنحصر بين المتوسط الحسابى وقيمة  $X$  (قيمة  $Z$ ) فى صورة احتمال لعشيرة تتوزع طبيعياً بمتوسط حسابى قدره صفر وانحراف قياسى يساوى 1 . ويطلق على هذا المنحنى المعبر عن هذه العشيرة باسم المنحنى الطبيعى القياسى . ويتطلب منا ذلك تحويل جميع قيم ( $X$ ) إلى ما يقابلها من قيم ( $Z$ ) وهى قيم المتغير للمنحنى الطبيعى القياسى .

حيث  $X$  هى المفردات ،  $\mu$  هى المتوسط الحسابى ،  $\sigma$  هى الانحراف المعياري والمعادلة العامة للمنحنى الطبيعى القياسى هى :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

$$x - \mu$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\sigma$$

ومن خصائص التوزيع الطبيعي القياسى :

(1) وسطه الحسابى = صفر

(2) الانحراف المعياري = 1

(3) احتمال أن تقع Z بين  $\pm 1.96$  يساوى 0.95 أى

$$P(1.96 \geq z \geq -1.96) = 0.95$$

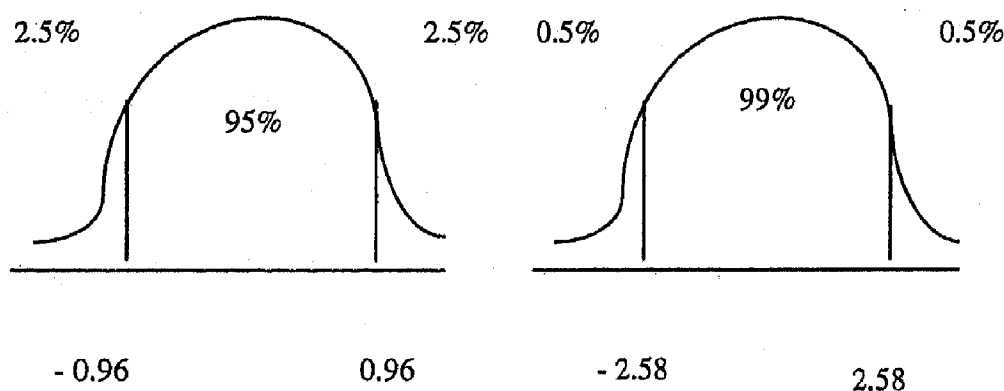
كذلك احتمال أن تقع Z بين  $\pm 2.58$  يساوى 0.99 أى

$$P(2.58 \geq z \geq -2.58) = 0.99$$

ومعنى ذلك أن 95% من المساحة تحت المنحنى تقع بين  $Z = 1.96$  ، =

$Z = -1.96$  وأن 99% من المساحة تحت المنحنى تقع بين  $Z = 2.58$  ، =

$Z = -2.58$  كما يتضح من الشكل :



(4) توجد جداول للمنحنى الطبيعي القياسى تعطى قيم  $\Phi(z)$  بالنسبة

لقيم Z الموجبة أما بالنسبة لقيم Z السالبة فتستخدم الخاصية رقم

(6) التالية :

(5) يمكن تحويل متغير عشوائى (X) له توزيع معتدل وسطه الحسابى  $\mu$

وانحرافه المعياري  $\sigma$  إلى متغير طبيعى قياسى وذلك بوضع



$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

(6) نظراً لتمائل منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المعتدل المعياري فإن

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

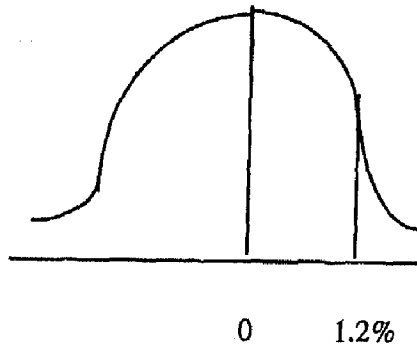
(7) المساحة تحت المنحنى لا تزيد عن الواحد الصحيح .

مثال : (33)

أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي القياسى فى كلا من الحالتين الآتية

$$\text{بين } Z = \text{صفر} , Z = 1.2$$

الحل :



من الجدول يتضح أن المساحة تساوى 0.3849

وحصلنا على هذا الرقم من خلال الكشف فى جدول Z

أمام 1.2 تحت الصفر فوجد أنها 0.8849

$$\therefore \text{المساحة المطلوبة} = 0.5000 - 0.8849 = 0.3849$$

مثال : (34)

متوسط أوزان 500 طالب فى أحد الكليات هو 151 كجم والانحراف القياسى 15 كجم وبفرض أن الأوزان تتوزع طبيعياً أوجد عدد الطلبة الذين ينحصر وزنهم بين :

$$(أ) \quad 119.5 - 155.5 \text{ كجم}$$

$$(ب) \quad \text{أكبر من } 185.5 \text{ كجم}$$

الحل :

لإيجاد عدد الأفراد الذين ينحصر وزنهم بين 119.5 - 155.5 كجم يتطلب ذلك تحويل هاتين القيمتين إلى ما يقابلهما من وحدات معيارية (Z)

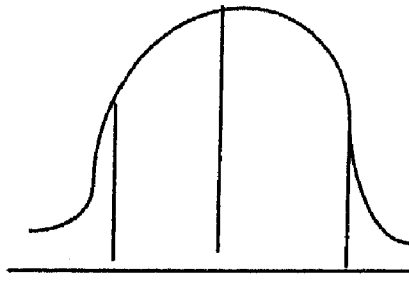
(أ) باستعمال المعادلة

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$Z_1 = \frac{119.5 - 151}{15} = -2.1$$

$$Z_2 = \frac{155.5 - 151}{15} = 0.3$$

نسبة الطلبة المطلوبة هى المساحة بين  $Z = -2.1$  ,  $Z = 0.3$



ويمكن التعبير عن ذلك بالمساحات

$$Z = -2.1 \text{ إلى الصفر}$$

$$Z = \text{صفر إلى } 0.3$$

$$-2.1\% \quad 0 \quad 0.3\%$$

ومن الجدول فإن المساحة الكلية هي  $0.6 = 0.1179 + 0.4821$

∴ عدد الطلبة الذين تقع أوزانهم بين  $119.5 - 155.2$  كجم

$$\text{هي } = 0.6 \times 500 = 300 \text{ طالب .}$$

(ب) عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن  $185.5$  كجم

$$185.5 - 151$$

$$Z = \frac{\quad}{15} = 2.3$$

$$15$$

ويمكن التعبير عن ذلك بالمساحة من  $Z = 2.3$  إلى الصفر ومن

الجدول فهي تساوي  $4892$ . بينما المطلوب هو عدد الطلبة الذين يزيد

وزنهم عن  $185.5$  كجم أى الذى يزيدون عن قيمة المساحة بين  $Z =$

$$\text{صفر إلى } Z = 2.3$$

$$\text{∴ المساحة} = 1 - 0.98928 = 0.01072$$

∴ عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن  $185.5$  كجم =

$$200 \times 0.01072 = 2 \text{ طالبا تقريبا}$$

ملحوظة : حيث أن عدد الطلبة الذين ينحصر وزنهم بين  $119.5$

–  $155.5$  يساوى  $300$  طالب وبالتالي فإن عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم

عن  $185.5$  كجم يكون بين الـ  $200$  طالب الباقين من المجموع الكلى

وهو  $500$  طالب .

## تمارين

1- إذا كان احتمال ولادة الذكر = 0.5 احسب جميع الاحتمالات الخاصة بأسرة لديها 4 أطفال ، ثم احسب احتمال 3 أطفال إناث على الأقل .

2- إذا كانت نسبة النجاح فى مادة الرياضة لطلبة الفرق الأولى بكلية الزراعة سبأ باشا هو 0.9 قدر احتمال أن خمسة من الطلبة يكونوا :

(أ) الكل ناجح (ب) على الأقل واحد ناجح

(ج) اثنان راسبان على الأكثر .

3- احتمال إنتاج وحدة معيبة فى إنتاج آلة معينة يساوى 0.02 فأوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع الوحدات المعيبة فى مجموعة من 100 وحدة من إنتاج هذه الآلة .

4- أحد المصانع ينتج مصابيح كهربائية نسبة العيوب فيها 30% احسب احتمال أن يكون بعبوة مكونة من 100 مصباح .

(أ) صفر أو واحد أو اثنان معيوبة (ب) أكثر من 5 معيوبة

5- إذا كان احتمال إنتاج وحدة معينة من إنتاج آلة معينة يساوى 0.02. فأوجد احتمال أن تشتمل عينة مكونة من 100 من إنتاج هذه الآلة على .

(أ) أربعة وحدات معيبة (ب) وحدة واحدة معيبة على الأقل .

(استخدم توزيع بواسون)

## أمثلة متنوعة على الاحتمالات

مثال : (1)

ما هو احتمال أن تسحب ورقة لعب من مجموعة كاملة من ورق اللعب تحمل رقم 8 وما هو احتمال الأوراق التي لا تحمل رقم 8 .

الحل :

عدد أوراق اللعب = 52 ورقة

عدد الأوراق التي تحمل رقم 8 = 4 ورقات

$$\therefore \text{احتمال أن تسحب ورقة لعب تحمل رقم 8} = \frac{4}{52}$$

احتمال أن الأوراق المسحوبة لا تحمل رقم 8 = 1 - ل (ورقة تحمل رقم 8)

$$= \frac{48}{52} = \frac{4}{52} - 1 =$$

مثال : (2)

أوجد عدد طرق سحب ورقتين من مجموعة كاملة من ورق اللعب

الحل:

عدد أوراق المجموعة الكاملة من ورق اللعب = 52

$$\therefore \text{عدد طرق اختيار ورقتان من 52 ورقة} = {}^{52}C_2 = \frac{52!}{52!2}$$

$$51 \times 52$$

$$1326 \text{ طريقة} = \frac{\quad}{1 \times 2}$$

مثال : (3)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة كازابلانكا

الحل

عدد الأحرف الكلية للكلمة = 10 أحرف

عدد الأحرف المتشابهة = 4 أحرف متشابهة لحرف أ

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} = \frac{10!}{4!} = \text{عدد الطرق المطلوبة}$$

$$= 151200 \text{ طريقة}$$

مثال : (4)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة زراعة

الحل :

يلاحظ أن عدد حروف هذه الكلمة هي 5 أحرف وليست بينها أحرف متشابهة .

$$\therefore \text{عدد الطرق المطلوبة} = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ طريقة}$$

مثال : (5)

بكم طريقة يمكن جلوس 4 فتيات فى صف مستقيم

الحل :

$$\text{عدد الطرق} = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \text{ طريقة}$$

مثال : (6)

بكم طريقة يمكن غرس 5 أشجار دائرياً حول منزل .

الحل :

$$\text{عدد الطرق} = (5 - 1)! = 4! = 24 \text{ طريقة .}$$

مثال : (7)

ألقيت ثلاث زهرات نرد احسب احتمال الحصول على مجموع 10.

الحل : المجموع 10 يمكن الحصول عليه من جمع الآتى :

الطريقة	المجموع	الزهرة الثالثة	الزهرة الثانية	الزهرة الأولى
(1)	10	1	3	6
(2)	10	2	2	6
(3)	10	1	4	5
(4)	10	2	3	5
(5)	10	3	3	4
(6)	10	2	4	4

الطريقة الأولى :

يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب  $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

(لأنه لا توجد أرقام متشابهة على الثلاث زهرات)

الطريقة الثانية :

$$!3$$

$$3 = \frac{3}{!2} = \text{يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب}$$

(لأنه يوجد رقمين متشابهين وهما 2 ، 2 ولذلك قسمنا على !2 )

الطريقة الثالثة :

$$6 = !3 = \text{يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب}$$

الطريقة الرابعة :

$$6 = !3 = \text{يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب}$$

الطريقة الخامسة :

$$!3$$

$$3 = \frac{3}{!2} = \text{يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب}$$

الطريقة السادسة :

$$!3$$

$$3 = \frac{3}{!2} = \text{يمكن الحصول عليها من الثلاث زهرات بترتيب}$$

ومن ذلك يتضح أن عدد الطرق التي يمكن الحصول بها على

مجموع = 10 هي :

$$27 = 3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 6 \text{ طريقة}$$



عدد الأحداث الكلية لتجربة إلقاء ثلاث زهرات

$$216 = 6 \times 6 \times 6 = \text{حدث}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{27}{216} = 10 \text{ احتمال الحصول على مجموع } 10$$

مثال : (8)

صندوق يحتوى على 20 كرة حمراء ، 60 كرة بيضاء ، 40 كرة زرقاء ، 30 كرة سوداء أوجد :

أ - احتمال أن تسحب كرة واحدة حمراء أو بيضاء

ب- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست حمراء أو بيضاء

ج- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء

د - احتمال أن لا تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء أو حمراء

هـ- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء أو حمراء

الحل : يلاحظ أن إجمالي عدد الكور التي بالصندوق = 150 كرة

$$\frac{20}{150} = \text{ل (سحب كرة حمراء)}$$

$$\frac{20}{150} = \text{ل (سحب كرة بيضاء)}$$

$$\frac{20}{150} = \text{ل (سحب كرة زرقاء)}$$

$$\frac{20}{150} = \text{ل (سحب كرة سوداء)}$$

أ - احتمال أن تسحب كرة واحدة حمراء أو بيضاء

$$\frac{80}{150} = \frac{60}{150} + \frac{20}{150} =$$

ب- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة غير حمراء أو بيضاء

$$\frac{70}{150} = \frac{80}{150} - 1 =$$

(لأن احتمال وقوع حدث معين + احتمال عدم وقوع هذا الحدث

المعين = 1)

ج- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة غير زرقاء

$$\frac{110}{150} = \frac{40}{150} - 1 =$$

هـ- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء أو حمراء

$$\frac{120}{150} = \frac{20}{150} + \frac{60}{150} + \frac{40}{150} =$$

مثال : (9)

من المثال السابق أوجد :

أ - احتمال سحب 4 كرات الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة زرقاء

والرابعة سوداء (السحب بإرجاع).

ب- نفس المطلوب (أ) ولكن السحب بدون إرجاع.

ج- احتمال سحب 4 كرات الأولى سوداء والثانية زرقاء والثالثة بيضاء والرابعة حمراء (السحب بإرجاع) .

د - نفس المطلوب (ج) ولكن السحب بدون إرجاع

الحل :

أ - الاحتمال المطلوب = ل (حمراء) × ل (بيضاء) × ل (زرقاء) × ل (سوداء)

$$\frac{30}{150} \times \frac{40}{150} \times \frac{60}{150} \times \frac{20}{150} =$$

ب- الاحتمال المطلوب =  $\frac{30}{147} \times \frac{40}{148} \times \frac{60}{149} \times \frac{20}{150}$

(يلاحظ أن السحب بدون إرجاع أى عندما نسحب الكرة الأولى وتكون حمراء ثم لا نرجعها وبالتالي فإن الكرة البيضاء سوف تتأثر بسحب الكرة الأولى الحمراء وهكذا) .

ج - الاحتمال المطلوب =  $\frac{20}{150} \times \frac{60}{150} \times \frac{40}{150} \times \frac{30}{150}$

ب- الاحتمال المطلوب =  $\frac{20}{147} \times \frac{60}{148} \times \frac{40}{149} \times \frac{30}{150}$

مثال : (10) مجموعة كاملة من ورق اللعب أوجد :

أ - احتمال سحب ورقتان آس (السحب بإرجاع وبدون إرجاع)

ب- احتمال سحب ولدين (السحب بإرجاع وبدون إرجاع)

الحل : يلاحظ أن عدد أوراق اللعب = 52 ورقة

عدد أوراق الآس = 13 ورقه

عدد الأولاد في الكوتشينة = 4 أولاد

13

— = ل (سحب آس)

52

4

— = ل (سحب ولد)

52

$$\frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \text{احتمال المطلوب في حالة السحب بإرجاع (أ)}$$

$$\frac{12}{51} \times \frac{13}{52} = \text{في حالة السحب بدون إرجاع}$$

(يلاحظ أن السحبة الثانية سوف تتأثر بالسحبة الأولى)

$$\frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \text{الاحتمال المطلوب في حالة السحب بإرجاع (ب)}$$

$$\frac{3}{51} \times \frac{4}{52} = \text{في حالة السحب بدون إرجاع}$$

مثال : (11)

- إذا كان احتمال أن يعيش الزوج مدة 20 سنة بعد الزواج هو  $3/1$  واحتمال حياة الزوجة بعد 20 سنة من الزواج هو  $7/2$  أوجد :
- أ- احتمال أن يعيشا سوياً مدة 20 سنة .
- ب- احتمال أن يعيش الزوج وتتوفى الزوجة .
- ج- احتمال أن تعيش الزوجة ويتوفى الزوج .
- د- احتمال أن يتوفى الزوج والزوجة معاً .

الحل : يلاحظ أنه إذا كان احتمال الحياة للزوج هو  $3/1$  فإن احتمال الوفاة له هو  $3/2$  وكذلك إذا كان احتمال الحياة للزوجة هو  $7/2$  فإن احتمال الوفاة لها هو  $7/5$

$$(أ) \text{ احتمال أن يعيشا سوياً} = ل(\text{الحياة للزوج}) \times ل(\text{الحياة للزوجة}) = \frac{2}{21} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$$

(ب) احتمال أن يعيش الزوج وتتوفى الزوجة = ل(الحياة للزوج) × ل(الوفاة للزوجة)

$$= \frac{5}{21} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{3}$$

(ج) احتمال أن تعيش الزوجة ويتوفى الزوج = ل(الحياة للزوجة) × ل(الوفاة للزوج)

$$\frac{4}{21} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} =$$

(د) احتمال أن يتوفى الزوج والزوجة معاً = ل(الوفاة للزوج) × ل(الوفاة للزوجة)

$$\frac{10}{21} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3} =$$

وحيث أن هذه هي كل الاحتمالات الخاصة بهذين الحدثين أى يجب أن يكون مجموعها = 1 ويمكنك التحقق من ذلك .

مثال : (12)

يوجد ثلاث مزارع لإنتاج البطاطس المزرعة (أ) أنتجت 60 طن بطاطس جيدة و 40 طن مصابة ، ومزرعة (ب) أنتجت 80 طن بطاطس جيدة و 20 طن مصابة و مزرعة (ج) أنتجت 50 طن بطاطس جيدة و 50 طن مصابة. إذا أخذنا طن بطاطس من كل مزرعة أوجد :

أ - احتمال أن يكون الثلاثة طن بطاطس جيدة .

ب- احتمال أن يكون الثلاثة طن بطاطس مصابة .

ج- احتمال أن يكون الطن الأول جيد والثاني والثالث مصاب .

د - احتمال أن يكون الطن الأول والثاني جيد والثالث مصاب .

- هـ- احتمال أن يكون الطن الأول والثالث جيد والثاني مصاب .  
و- احتمال أن يكون الطن الثاني والثالث جيد والأول مصاب .  
ز- احتمال أن يكون الطن الثاني جيد و الأول والثالث مصاب .  
ح- احتمال أن يكون الطن الثالث جيد والأول والثاني مصاب .

الحل : يلاحظ أن

$$\text{الإنتاج الكلى للمزرعة (أ) = 60 + 40 = 100 \text{ طن}$$

$$\text{الإنتاج الكلى للمزرعة(ب) = 80 + 20 = 100 \text{ طن}$$

$$\text{الإنتاج الكلى للمزرعة(ج) = 50 + 50 = 100 \text{ طن}$$

$$\text{(أ) الاحتمال المطلوب} = \frac{60}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{50}{100} = 0.240$$

$$\text{(ب) الاحتمال المطلوب} = \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{50}{100} = 0.040$$

$$\text{(ج) الاحتمال المطلوب} = \frac{60}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{50}{100} = 0.060$$

$$\text{(د) الاحتمال المطلوب} = \frac{60}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{50}{100} = 0.240$$

$$0.060 = \frac{20}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{60}{100} = \text{الاحتمال المطلوب (هـ)}$$

$$0.160 = \frac{40}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{80}{100} = \text{الاحتمال المطلوب (و)}$$

$$0.160 = \frac{50}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{80}{100} = \text{الاحتمال المطلوب (ز)}$$

$$0.040 = \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{50}{100} = \text{الاحتمال المطلوب (ح)}$$

مثال : (13)

إذا كان احتمال فوز الأهلي في مباراة ما هو 0.9 واحتمال فوز الزمالك هو 0.5 احسب احتمال فوز أحدهما على الأقل .

الحل : ل (فوز أحدهما على الأقل) = ل (فوز الأهلي) + ل (فوز

الزمالك)

- ل (فوزهما سوياً)

$$0.95 = 0.45 - 1.40 = 0.45 + 0.5 + 0.9$$



حل آخر: ل (فوز أحدهما على الأقل) = 1 - ل (عدم فوز أى منهما)

$$0.95 = 0.05 - 1 = 0.5 \times 0.1 - 1 =$$

(يلاحظ أن ل (فوز النادي الأهلي) هو 0.9 ول (عدم فوزه) هو 0.1 وبالنسبة لنادى الزمالك فإن ل (الفوز) = ل (عدم الفوز) = 0.5

مثال : (14)

إذا كان احتمال نجاح طالب فى مادة الرياضة بكلية الزراعة هو 0.8 ما هى الاحتمالات المختلفة لنجاح 5 طلبة من عدمه .

الحل :

للإجابة على هذا التمرين سوف يستخدم توزيع ذو الحدين على اعتبار أن الحد الأول وهو يمثل احتمال النجاح وهو 0.8 والحد الثانى يمثل احتمال عدم النجاح وهو 0.2 وعدد الطلبة (ن) هو 5 .

$$\therefore {}^5(0.2) + {}^4(0.2) {}^1(0.8) \binom{5}{1} + {}^3(0.2) {}^2(0.8) \binom{5}{2} +$$

$$+ {}^2(0.2) {}^3(0.8) \binom{5}{3} + {}^1(0.2) {}^4(0.8) \binom{5}{4} + {}^5(0.8)$$

حيث  ${}^5(0.8)$  تشير إلى احتمال نجاح الخمس طلاب ،

$${}^1(0.2) {}^4(0.8) \binom{5}{1}$$

تشير إلى احتمال نجاح 4 طلبة ورسوب طالب واحد ،

$$(0.8)^3(0.2)^2 \text{ تشير إلى احتمال نجاح 3 ورسوب 2 ، } \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(0.8)^2(0.2)^3 \text{ تشير إلى احتمال نجاح 2 ورسوب 3 ، } \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(0.8)(0.2)^4 \text{ تشير إلى احتمال نجاح طالب واحد ورسوب 4 ، } \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$(0.2)^5$  تشير إلى عدم نجاح أحد وحيث أن هذه هي كل الاحتمالات الممكنة لهذا الحادث فإن مجموعها يجب أن يكون مساوياً الواحد الصحيح (تأكد من ذلك).

مثال : (15)

في عائلة مكونة من 4 أفراد أوجد :

أ - احتمال أن يكونوا ذكور

ب - احتمال وجود 2 ذكور

ج - احتمال وجود ذكر واحد على الأكثر

د - احتمال وجود ذكر واحد على الأقل

هـ - احتمال وجود ذكر وأنثى على الأقل

الحل : يلاحظ هنا أنه إذا رمزنا للذكر بالرمز (ذ) وللأنثى

بالرمز (ث) فإن

ل (ذ) = ل (ث) =  $2/1$  وأن توزيع ذو الحدين يكون على الصورة

$${}^4(ذ) + {}^4(ث) + {}^3(ذ) \binom{4}{1} + {}^3(ث) \binom{4}{2} + {}^2(ذ) \binom{4}{3} + {}^2(ث) \binom{4}{4}$$

وبالتعبير عن ذ = ث =  $2/1$

(أ) احتمال أن يكون 4 أفراد ذكور =  $(2/1)^4 = 16/1$

$$(ب) \text{ احتمال وجود 2 ذكور} = \binom{4}{2} (2/1)^2 (2/1)^2 = 6/16$$

(ج) احتمال وحول وجود ذكر واحد على الأكثر = ل (وجود ذكر واحد

و 3 إناث) + ل (عدم وجود ذكر أى الكل إناث)

$$= \binom{4}{1} (2/1)^1 (2/1)^3 + \binom{4}{0} (2/1)^0 (2/1)^4$$

$$= \binom{4}{1} (2/1)^4 + \binom{4}{0} (2/1)^4$$

$$= 16/1 + 16/1 = 32/1$$

(د) احتمال وجود ذكر واحد على الأقل = ل (وجود ذكر) + ل (وجود

ذكرين) + ل (وجود 3 ذكور) + ل (وجود 4 ذكور)

$$\begin{aligned}
& {}^4(\text{ذ}) + {}^3(\text{ث}) \binom{4}{3} + {}^2(\text{ث})^2(\text{ذ}) \binom{4}{2} + {}^3(\text{ث})^1(\text{ذ}) \binom{4}{1} = \\
& {}^4(2/1) + (2/1)^3(2/1) \binom{4}{3} + {}^3(2/1)^2(2/1) \binom{4}{2} + {}^2(2/1)(2/1) \binom{4}{1} = \\
& 16/15 = 16/1 + 16/1 \times 4 + 16/1 \times 6 + 16/1 \times 4 =
\end{aligned}$$

أو حل آخر:

ل (وجود ذكر واحد على الأقل) = 1 - ل (عدم وجود إناث)

$$\frac{15}{16} = \frac{1}{16} - 1 = {}^4(\text{ذ}) - 1 =$$

ملحوظة :

في حالة توزيع ذو الحدين وكان  $p = q = \frac{1}{2}$  فإن احتمال الحصول على 4 ذكور

في عائلة مكونة من 4 أفراد يساوي احتمال الحصول على 4 إناث في نفس العائلة لأن احتمال الذكر يساوي احتمال الأنثى .

مثال : (16)

أوجد مفكوك (س + 3 ص)<sup>4</sup>

الحل :

$${}^2(\text{س})^2(3\text{ص}) \binom{4}{2} + {}^1(\text{س})^3(3\text{ص}) \binom{4}{1} + {}^4\text{س} = (س + 3\text{ص})^4$$

$$108 = 3^3 + 3^4 = 27 + 81$$

مثال : (17)

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك (س + 3)<sup>4</sup>

الحل :

حيث أن ن عدد زوجى يساوى 4 فإن عدد الحدود = ن + 1 = 5

$$n = 4$$

$$3 = \left(1 + \frac{\quad}{2}\right) = \left(1 + \frac{\quad}{2}\right) = \text{وترتيب الحد الأوسط}$$

أى الحد الثالث ح = 1+2

وعليه فإن (ر = 2) ومن القانون الخاص

$$54 = 3^2 = \left(\frac{1}{2}\right) = 1+2$$

ملحوظة : لإيجاد الحد رقم كذا نطبق القانون

$$s^{-n} = \binom{r}{n} = 1+r$$

مثال : (18)

إذا كان احتمال إنتاج وحدة معيبة فى إنتاج آلة معينة يساوى

01. أوجد احتمال أن تشمل عينة من 1000 وحدة من إنتاج هذه الآلة

على :

(ب) وحدة واحدة معيبة على الأقل

(أ) 2 وحدة معيبة

الحل :

حيث أن  $u$  صغيرة جداً ،  $n$  كبيرة جداً فيحسن استخدام توزيع بواسون نظراً لسهولة المقارنة بتوزيع ذات الحدين .

$$P(x) = \frac{e^{-u} u^x}{x!} = \frac{e^{-u} u^x}{x!}$$

حيث ( $u$ ) عبارة عن ثابت إحصائي معين وهي قيمة نظرية تمثل متوسط ( $x$ ) ،  $e$  رقم ثابت يساوي 2.718 تقريباً

$x = 1, 2, 3, \dots$  متغير متقطع

يلزم إيجاد المتوسط  $\mu = n \lambda = 10 = 1000 \times 0.01$

$$P(2) = \frac{e^{-10} 10^2}{2!} = \frac{(2.817)^{-10} (10)^2}{2!} = 0.0016$$

$$\begin{aligned} P(1 \text{ at least}) &= 1 - P(0) \\ &= 1 - \frac{(2.718)^{-10} (10)^{\text{zero}}}{\text{zero}!} \\ &= 0.999968 \end{aligned}$$

مثال : (19)

إذا كان احتمال إنتاج وحدة معيبة من إنتاج آلة معينة تساوي 0.05 فأوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع الوحدات المعيبة في مجموعة من 1000 وحدة من إنتاج هذه الآلة .

الحل :

$$1000 = n \quad 0.05 = p_1 \quad 0.95 = p_2$$

الوسط الحسابي =  $n p_1 = 1000 \times 0.05 = 50$  وحدة

$$6.89 = \sqrt{0.95 \times 0.05 \times 1000} = \sqrt{47.75} = 6.89$$

مثال : (20)

في أحد مزارع البطاطس وجد أن معدل الإصابة بمرض العفن البنى هو 30% فإذا فحصت 6 طن بطاطس ما هي الاحتمالات المختلفة للإصابة من عدمه .

الحل :

من الممكن التعبير رياضياً عن قيمة الاحتمالات المختلفة للأحداث على أساس مفكوك ذات الحدين حيث يكون احتمال الإصابة 0.30 واحتمال عدم الإصابة 0.70 ويعبر عن ذلك بمفكوك المعادلة :

$$= (0.7 + 0.3)^6$$
$$= {}^3(0.3) \left[ \frac{6}{3} \right] + {}^2(0.7) {}^4(0.3) \left[ \frac{6}{2} \right] + (0.7) {}^5(0.3) \left[ \frac{6}{1} \right] + {}^6(0.3) =$$
$${}^6(0.7) + {}^5(0.7) {}^1(0.3) \left[ \frac{6}{5} \right] + {}^4(0.7) {}^2(0.3) \left[ \frac{6}{4} \right] + {}^3(0.7) {}^3(0.3) \left[ \frac{6}{3} \right] + {}^2(0.7) {}^4(0.3) \left[ \frac{6}{2} \right] + (0.7) {}^5(0.3) \left[ \frac{6}{1} \right] + {}^6(0.7)$$

ويعبر عن جميع الاحتمالات فى الجدول التالى

قيمة الاحتمال	الاحتمال
0.0008	-1 احتمال 6 طن مصابة = $(0.3)^6$
0.0105	-2 احتمال 5 طن مصابة وواحد غير مصاب = $(0.7)^5 (0.3) \left[ \frac{6}{1} \right]$
0.0594	-3 احتمال 4 طن مصابة و 2 طن غير مصابة = $(0.7)^4 (0.3) \left[ \frac{6}{2} \right]$
0.1852	-4 احتمال 3 طن مصابة و 3 طن غير مصابة = $(0.7)^3 (0.3) \left[ \frac{6}{3} \right]$
0.3241	-5 احتمال 2 طن مصابة و 4 غير مصابة = $(0.7)^2 (0.3) \left[ \frac{6}{1} \right]$
0.3025	-6 احتمال طن مصاب والباقي غير مصاب = $(0.7)^1 (0.3) \left[ \frac{6}{1} \right]$
0.1175	-7 احتمال عد الإصابة = $(0.7)^6$
1.000	مجموع الاحتمالات

مثال : (21)

عند رمى زهرتى نرد ما هو احتمال ظهور المجموع 7 أو المجموع 11

الحل : الحادث هنا يتكون من حادثين .



نفرض أن (أ<sub>1</sub>) هو ظهور المجموع 7 ويتكون من الأحداث (1) ،  
(6) ، (1 ، 6) ، (5 ، 2) ، (2 ، 5) ، (3 ، 4) ، (4 ، 3) ،

$$\therefore \text{ح (أ}_1\text{)} = \frac{6}{36}$$

وأن (ب) هو ظهور المجموع 11 ويتكون من الأحداث (5 ، 6) ،  
(6 ، 5)

$$\therefore \text{ح (ب)} = \frac{2}{36}$$

$$\therefore \text{ح (أ ، ب)} = \text{ح (أ)} + \text{ح (ب)}$$

$$= \frac{8}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36}$$

مثال : (22)

ما هو احتمال ظهور المجموع 10 على الأقل عند إلقاء زهرتين من  
زهرات النرد.

الحل :

نفترض أن أ ، ب ، ج عبارة عن حوادث الحصول على المجموع  
10 ، 11 ، 12 على الترتيب .

ح (أ) = احتمال ظهور المجموع 10

$$\frac{3}{36} = \frac{\text{عدد مرات ظهور المجموع 10}}{\text{عدد المرات جميعها}}$$

ح (ب) = احتمال ظهور المجموع 11

$$\frac{2}{36} = \frac{\text{عدد مرات ظهور المجموع 11}}{\text{عدد المرات جميعها}}$$

ح (ج) = احتمال ظهور المجموع 12

$$\frac{1}{36} = \frac{\text{عدد مرات ظهور المجموع 12}}{\text{عدد المرات جميعها}}$$

ح (أ أو ب أو ج) = ح (أ) + ح (ب) + ح (ج)

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$$

مثال: (23)

صندوق به 25 رقم منهم خمسة فقط لهم الحق فى الحصول على جوائز فما هو احتمال سحب رقمين لجائزتين فى المرتين المتتاليتين .

الحل :

نفرض أن حادث الحصول على جائزة فى السحب الأول هو ( أ )  
وحادث الحصول على جائزة فى السحب الثانى هو (ب) وبتطبيق قاعدة  
ضرب الاحتمالات وهى :

$$\begin{aligned} & \text{ح ( أ ، ب )} = \text{ح ( أ )} \times \text{ح ( ب / أ )} \\ & \frac{5}{24} = \text{ح ( ب )} , \quad \frac{1}{25} = \text{ح ( أ )} \\ & \therefore \text{ح ( أ ، ب )} = \frac{1}{25} \times \frac{5}{24} = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

واضح أن قيمة ح ( ب / أ ) =  $\frac{1}{24}$  حيث أنه فى السحبة الأولى ظهر رقم ما

لجائزة وبالتالي فإن عدد أرقام الجوائز أصبح 4 فقط والعدد الكلى 24

مثال : (24)

مجموعة كاملة من أوراق اللعب سحب منها ورقة على مرتين  
متتاليتين فما هو احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان ولد وذلك فى  
حالة :

(1) السحب بإحلال مرة

(2) السحب بدون إحلال مرة أخرى

الحل . (1) السحب بإحلال معناه أن الورقة المسحوبة هي المرة الأولى يتم إرجاعها إلى مجموعة ورق اللعب قبل السحبة الثانية فإذا رمزنا للسحبة الأولى بالرمز ( أ ) وللسحبة الثانية بالرمز (ب) فإن :

$$\frac{4}{52} = \frac{\text{عدد الأولاد}}{\text{مجموعة ورق اللعب كلها}} = \text{ح (أ)}$$

$$\frac{4}{52} = \frac{\text{عدد الأولاد}}{\text{مجموعة ورق اللعب كلها}} = \text{ح (ب)}$$

$$\text{ح (أ ، ب)} = \text{ح (أ)} \times \text{ح (ب)}$$

$$1 \quad 16 \quad 4 \quad 4$$

$$\frac{1}{16} = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52}$$

$$169 \quad 2704 \quad 52 \quad 52$$

(2) السحب بدون إحلال معناه أن السحبة الأولى سوف لا يتم إرجاعها إلى مجموعة ورق اللعب وبالتالي فإن السحبة الثانية سوف تتأثر بنتيجة السحبة الأولى وأن عدد الأولاد سوف يصبح 3 بدلاً من 4 وعدد ورق اللعب سوف يصبح 51 بدلاً من 52 وعليه فإن :

$$\frac{3}{51} = \text{ح (ب/أ)} \quad \frac{4}{25} = \text{ح (أ)}$$

$$ح (أ ، ب) = ح (أ) \times ح (ب/أ)$$

$$\frac{1}{221} = \frac{12}{2652} = \frac{3}{51} \times \frac{4}{52} =$$

مثال : (25)

بفرض أن احتمال الحصول على مولود ذكر =  $\frac{1}{2}$  أوجد الاحتمال بالنسبة لعائلة مكونة من 6 أطفال إذا علمت :

(1) أن جميع الأطفال من نفس الجنس .

(2) أن خمسة أطفال ذكور وأنثى واحدة .

الحل :

(1) نفرض حادث الحصول على جميع الأطفال ذكور هو (أ<sub>1</sub>) والرمز

(أ<sub>2</sub>) لحادث الحصول على جميع الأطفال إناث .

وحيث أن (أ<sub>1</sub> ، أ<sub>2</sub>) من الحوادث المانعة فإن :

$$ح (أ_1 ، أ_2) = ح (أ_1) \times ح (أ_2)$$

وحيث أن المواليد الستة تعتبر حوادث مستقلة بالنسبة لجنس كل طفل ،

فإنه يمكن استخدام المعادلة :

$$ح (أ_1 ، أ_2) = ح (أ_1) \times ح (أ_2)$$

لأكثر من حادثين وعليه يكون :

$$ح (أ_1) = احتمال أن المواليد الستة ذكور =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{وبالمثل ح (أ2) = احتمال أن المواليد الستة إناث} = {}^6(1/2)$$

$$\frac{1}{32} = \frac{2}{64} = {}^6(1/2) + {}^6(1/2) = \text{ح (أ1 ، أ2)}$$

$$(2) \dots \text{احتمال الذكر} - \text{احتمال الأنثى} = (1/2)$$

$$\therefore \text{ح (5 ذكور وأنثى)} = \text{ح (5 إناث وذكور)} = \text{ح (6 ذكور)} = {}^6(1/2)$$

مثال : (26)

ما هو احتمال الحصول على خمسة أوراق تريل من مجموعة كاملة من ورق اللعب عددها 52 ورقة

الحل : عدد طرق سحب خمسة أوراق المجموعة كلها =  ${}^{52}C_5$

$$48 \times 49 \times 50 \times 51 \times 52$$

$$\frac{\quad}{\quad} =$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

عدد طرق سحب خمسة أوراق تريل =  ${}^{13}C_5$

$$9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13$$

$$\frac{\quad}{\quad} =$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

وحيث أن عدد الأوراق التريل في المجموعة الكاملة 13 ورقة

$${}^{13}C_5$$

$\therefore$  احتمال سحب خمسة أوراق تريل =

$$\frac{{}^{13}C_5}{{}^{52}C_5}$$

$$0.005 = \frac{9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}{48 \times 49 \times 50 \times 51 \times 52} =$$

مثال : (27)

قائمة بعدد 20 متطوعاً للتبرع بالدم منهم 15 فرداً دمهم من فصيلة B فإذا أخذنا عينة عشوائية من ثلاثة أشخاص فما هو احتمال :

(1) أن الثلاثة من فصيلة B .

(2) أن اثنين من فصيلة B وواحد من أى فصيلة أخرى .

(3) أن واحد على الأقل من فصيلة B .

الحل: العدد الكلى للنتائج الممكنة هو عبارة عن عدد طرق اختيار الثلاثة أفراد من المجموعة كلها والتي عددها 20 هو  ${}^3C_{20}$

وعدد الطرق المقابلة للحادث الثلاثة من فصيلة الدم B هو  ${}^3C_{15}$

$$13 \times 14 \times 15 \quad {}^3C_{15}$$

$$0.40 = \frac{13 \times 14 \times 15}{18 \times 19 \times 20} = \frac{{}^3C_{15}}{{}^3C_{20}} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

(2) عدد الطرق المقابلة للحادث المطلوب هو عدد طرق اختيار فردين من

فصيلة الدم B وفرد من أى فصيلة دم أخرى وذلك نحصل عليه من

$$\text{القانون } {}^3C_{15} \times {}^3C_5$$

$${}^3C_{15} \times {}^3C_5$$

$$\frac{{}^3C_{15} \times {}^3C_5}{{}^3C_{20}} = \text{ويكون الاحتمال المطلوب}$$

$$0.46 = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 13 \times 14 \times 15}{18 \times 19 \times 20} =$$

(ج) احتمال أن فرداً واحداً على الأقل من فصيلة الدم B يعنى أن فرداً واحداً من فصيلة دم B وفردان من فصيلة دم أخرى ، أو فردين من فصيلة دم B وفرد واحد من فصيلة دم أخرى أو ثلاثة أفراد من فصيلة دم B ، أى أن الحادث الوحيد غير المطلوب هو ظهور 3 أفراد من فصيلة ليست فصيلة الدم B أى :

الاحتمال المطلوب = 1 - احتمال أن الثلاثة من فصيلة دم ليست B

$$= 1 - \frac{3^5}{3^{20}} - 1 = \frac{113}{114} = 0.99$$

مثال : (28)

إذا كان احتمال أن يتخرج طالب من كلية الزراعة هو 0.6 وإذا كان لدينا 7 طلاب أوجد :

- (1) احتمال أن يتخرج طالب واحد فقط
- (2) احتمال أن يتخرج طالب واحد على الأقل
- (3) احتمال أن يتخرج 5 طلاب على الأكثر
- (4) احتمال أن لا يتخرج أحد



الحل :

$$0.6 = \text{احتمال التخرج}$$

$$0.4 = 0.6 - 1 = \text{احتمال عدم التخرج (ل)}$$

$$7 = \text{عدد الطلاب (ن)}$$

يمكن الحصول على الاحتمالات المطلوبة من مفكوك ذات الحدين كالاتى :

$$+^3(0.4)^5(0.6)_2\text{ق}^7 + ^1(0.4)^6(0.6)_1\text{ق}^7 + ^7(0.6) = ^7(0.4 + 0.6) \\ ^4(0.6)_3\text{ق}^7$$

$$^1(0.6)_6\text{ق}^7 + ^5(0.4)^2(0.6)_5\text{ق}^7 + ^4(0.4)^3(0.6)_4\text{ق}^7 + ^3(0.4) \\ ^7(0.4) + ^6(0.4)$$

(1) احتمال أن يتخرج طالب واحد فقط =

$$0.107 = ^6(0.4)^1(0.6)_1\text{ق}^7$$

(2) احتمال أن يتخرج طالب واحد على الأقل =  $1 - \text{احتمال ألا يتخرج أحد}$

$$^7(0.4)^0(0.6)_0\text{ق}^7 - 1 =$$

$$0.9984 = 0.0016 - 1 =$$

(3) احتمال أن يتخرج 5 طلبة على الأكثر عبارة عن

$$^3\text{ق}^7 + ^5(0.4)^2(0.6)_2\text{ق}^7 + ^6(0.4)(0.6)_1\text{ق}^7 + ^7(0.4)(0.6)_0\text{ق}^7 \\ ^4(0.4)^3(0.6)$$

$$0.261 = ^5(0.4)^2(0.6)_5\text{ق}^7 + ^5(0.4)^2(0.6)_4\text{ق}^7 +$$



الفصل الثامن

الأرقام القياسية

*Index Numbers*



## تمهيد :

تعتبر الأرقام القياسية وسيلة من الوسائل الإحصائية الهامة لقياس التغيرات النسبية التي تحدث لكثير من الظواهر الاقتصادية أو التجارية أو الإدارية أو الاجتماعية مثل التغيرات فى أسعار السلع والخدمات المنتجة والصادرات والواردات والأجور وغير ذلك من الظواهر، بالنسبة إلى فترتين زمنيتين مختلفتين أو مكانين مختلفين . ويعتبر قياس التغير فى هذه الظواهر من الأمور الهامة للتعرف على الظروف الاقتصادية للدولة ، وبالتالي رسم الخطط والسياسات الملائمة للتغير فى هذه الظواهر حتى لا يتأثر اقتصاد الدولة بهذه التغيرات .

ويعرف الرقم القياسى بأنه مقياس نسبى يقيس التغير فى ظاهرة ما خلال فترتين زمنيتين أو مكانين مختلفين وتسمى الفترة الزمنية الأولى السابقة للفترة الزمنية الثانية بأسم فترة الأساس فى حين تسمى الفترة الزمنية الثانية بأسم فترة المقارنة ، وكذلك الحال بالنسبة للمكان .

ويجب أن تتميز فترة الأساس التى تم اختيارها بالاستقرار الاقتصادى وخالية من الظروف أو العوامل غير الملائمة مثل الحروب والأزمات الاقتصادية والتى قد تؤثر على الظاهرة موضع البحث والدراسة . ونفس الحال بالنسبة لمكان الأساس فيجب أن يكون له أهمية خاصة بالنسبة للظاهرة .

وتأخذ الأرقام القياسية صوراً متعددة منها الرقم القياسى لنفقة المعيشة (أسعار المستهلكين) والرقم القياسى لأسعار الجملة والرقم القياسى للإنتاج الصناعى والزراعى وللحاصلات الزراعية وغير ذلك من الأرقام القياسية . وتعتبر الأرقام القياسية للأسعار والكميات من أكثر

الأرقام القياسية استخداماً في الحياة وهي التي سوف تقتصر دراستنا عليها .

ويلاحظ أن الأسس والقواعد التي تراعى عند تركيب الرقم القياسى للأسعار هي نفس الأسس والقواعد التي تستخدم فى تركيب الأرقام القياسية الأخرى .

### أنواع الأرقام القياسية :

يتم تركيب الرقم القياسى للأسعار باستخدام إحدى الصور الآتية :

### أولاً : الرقم القياسى البسيط :

1- الرقم القياسى البسيط للأسعار (منسوب السعر) :

#### Simple Index Number

وهو أبسط أنواع الأرقام القياسية ويحسب من خلال قسمة سعر السلعة فى سنة المقارنة (1ع) على سعرها فى سنة الأساس (0ع) كالتالى :

$$\text{الرقم القياسى البسيط للأسعار} = \frac{1ع}{0ع} \times 100$$

مثال : إذا كان سعر السلعة فى سنة 1995 هو 30 جنيهاً وسعرها فى سنة 1998 هو 35 جنيهاً احسب الرقم القياسى البسيط للأسعار (منسوب السعر) فى سنة 1998 بالنسبة لسنة 1995 .

الحل : الرقم القياسى البسيط للأسعار أو منسوب السعر

$$100 \times \frac{\text{سعر السلعة فى سنة المقارنة (1998)}}{\text{سعر نفس السلعة فى سنة الأساس (1995)}} =$$

$$100 \times \frac{35}{30} = 116.67\%$$

أى أن سعر السلعة فى سنة 1998 زاد بنسبة 16.76% عن سعرها فى سنة 1995.

2- الرقم القياسى البسيط للكميات :

ويمكن الحصول عليه من الصيغة التالية :

$$100 \times \frac{\text{الكمية فى سنة المقارنة}}{\text{الكمية فى سنة الأساس}} =$$

$$100 \times \frac{ك_1}{ك_0} =$$

3- الرقم القياسى البسيط للقيمة :

ويمكن الحصول عليه من الصيغة التالية :

$$100 \times \frac{\text{القيمة فى سنة المقارنة}}{\text{القيمة فى سنة الأساس}} =$$

$$100 \times \frac{ق1}{ق0} =$$

وحيث أن القيمة = السعر × الكمية أي ق1 = ع1 ك1

$$ق0 = ع0 ك0$$

$$\therefore \text{الرقم القياسي للقيمة} = 100 \times \frac{ع1 ك1}{ع0 ك0}$$

مثال : البيانات التالية تمثل الأسعار والكميات من أحد السلع خلال الفترة 1996 – 2000 .

الكمية	السعر	السنوات
100	10	1996
120	12	1997
140	14	1998
160	15	1999
180	17	2000

والمطلوب حساب الأرقام القياسية البسيطة للأسعار والكميات والقيمة لهذه السلعة باعتبار أن سنة 1996 سنة أساس .



الحل :

السنوات	منسوب السعر (%)	منسوب الكمية (%)	القيمة	منسوب القيمة (%)
1996	100	100	1000	100
1997	120	120	1560	156
1998	140	140	1960	196
1999	150	160	2400	240
2000	170	180	3060	306

من الجدول السابق يلاحظ أن سعر السلعة في سنة 2000 زاد بنسبة 70% عما كانت عليه في سنة 1996 ، بينما كمية السلعة في سنة 2000 زادت بنسبة 80% عما كانت عليه في سنة 1996 . أما قيمة السلعة في سنة 2000 فقد زادت بنسبة 206% عما كانت عليه في سنة 1996 .

### ثانياً : الأرقام القياسية التجميعية البسيطة

#### Simple Aggregative Index Numbers

تتيح لنا هذه الطريقة لحساب الرقم القياسي المقارنة بين أسعار مجموعة من السلع في سنة المقارنة مع سنة الأساس ، ونفس الحال بالنسبة للكميات وللقيم .

( أ ) الرقم القياسي التجميعي للأسعار :

مجموع أسعار سنة المقارنة

$$\text{الرقم التجميعي البسيط للأسعار} = 100 \times \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس}}$$

مجموع أسعار سنة الأساس

$$100 \times \frac{\text{مجموع 1ع}}{\text{مجموع 0ع}} =$$

(ب) الرقم القياسي التجميعي المرجح

## Weighted Aggregative Index Numbers

تستخدم الأرقام القياسية التجميعية المرجحة للتغلب على عيب الرقم القياسي التجميعي البسيط وهو تجاهل الأهمية النسبية للسلع المختلفة ، ولذلك فإننا نرجح أسعار كل سلعة بالكمية المباعة منها . وقد يتم ترجيح الأسعار بكميات سنة الأساس (ك0) أو بكميات سنة المقارنة (ك1) كالتالي :

1- الرقم القياسي المرجح بكميات سنة الأساس :

يرجع اشتقاق هذا الرقم إلى لاسبير Laspeyres والمعادلة الرياضية الخاصة برقم لاسبير هي :

$$\text{رقم لاسبير} = 100 \times \frac{\text{مجموع 1ك}}{\text{مجموع 0ك}}$$

2- الرقم القياسي المرجح بكميات سنة المقارنة :

يرجع اشتقاق هذا الرقم إلى باش Paasche والمعادلة الرياضية الخاصة به هي :

$$\text{رقم باش} = 100 \times \frac{\text{مجموع 1ك}}{\text{مجموع 0ك}}$$

### 3- رقم دروبش وبالي القياسى Drobish Index

وهو يعبر عن الوسط الحسابى لكل من رقم لاسبير ورقم باش

$$\text{رقم دروبش وبالي} = 100 \times \frac{\frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك}0}{\text{مجموع } 0 \text{ ك}0} + \frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك}1}{\text{مجموع } 0 \text{ ك}1}}{2}$$

### 4- رقم فيشر القياسى Fisher Index

وهو يعبر عن الوسط الهندسى لكل من رقم لاسبير ورقم باش

$$\text{الرقم القياسى لفيشر} = 100 \times \sqrt{\frac{\frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك}0}{\text{مجموع } 0 \text{ ك}0} \times \frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك}1}{\text{مجموع } 0 \text{ ك}1}}{}}$$

### 5- رقم مارشال- إدجورث المثالى Edgeworth Index

ويعبر عنه بالصورة الرياضية التالية :

$$\text{رقم مارشال- إدجورث} = 100 \times \frac{\text{مجموع } (1 \text{ ك}0 + 0 \text{ ك}1)}{\text{مجموع } (0 \text{ ك}0 + 0 \text{ ك}1)}$$

مثال : من بيانات الجدول التالى :

سنة 2000		سنة 1995		السلعة
الكمية	السعر	الكمية	السعر	
25	10	17	5	أ
30	14	21	11	ب
35	12	29	9	ج
50	6	41	4	د

والمطلوب حساب الرقم القياسي للأسعار وذلك باستخدام

- 1- رقم لاسبير، 2- رقم باش، 3- رقم فيشر،
  - 4- رقم درويش وبالي، 5- رقم مارشال وأدجورث
- إذا علمت أن سنة 1995 سنة أساس.

الحل : نكون الجدول التالي :

نوع السلعة	ع 0	ك 0	ع 1	ك 1	ع 0	ك 0	ع 1	ك 1
أ	5	17	10	25	85	125	170	250
ب	11	21	14	30	231	330	294	420
ج	9	29	12	35	261	315	348	420
د	4	41	6	50	164	200	246	300
					741	970	1058	1390

مجموع 1 ك 0

$$1 - \text{رقم لاسبير} = 100 \times \frac{\text{مجموع 1 ك 0}}{\text{مجموع 0 ك 0}}$$

مجموع 0 ك 0

$$= 100 \times \frac{1058}{741} = 142.8\%$$

مجموع 1 ك 1

$$2 - \text{رقم باش} = 100 \times \frac{\text{مجموع 1 ك 1}}{\text{مجموع 0 ك 1}}$$

مجموع 0 ك 1

$$= 100 \times \frac{1390}{970} = 143.3\%$$

$$100 \times \frac{\text{مجمع 1 ك0} \quad \text{مجمع 1 ك1}}{\text{مجمع 0 ك0} \quad \text{مجمع 0 ك1}} = \text{رقم فيشر المثالي} \quad -3$$

$$\%143.15 = 100 \times \frac{1.433 \times 1.408}{2} =$$

$$100 \times \frac{\text{مجمع 1 ك0} \quad \text{مجمع 1 ك1}}{\text{مجمع 0 ك0} \quad \text{مجمع 0 ك1}} = \text{رقم دروبش وبالي} \quad -4$$

$$\%143.06 = 100 \times \frac{1.433 + 1.428}{2} =$$

$$100 \times \frac{\text{مجمع (ع 1 ك0 + ع 1 ك1)}}{\text{مجمع (ع 0 ك0 + ع 0 ك1)}} = \text{رقم مارشال - إدجورث} \quad -5$$

$$100 \times \frac{\text{مجمع 1 ك0} + \text{مجمع 1 ك1}}{\text{مجمع 0 ك0} + \text{مجمع 0 ك1}} =$$

$$100 \times \frac{1390 + 1058}{970 + 741} =$$

$$2448$$

$$\%143.07 = 100 \times \frac{\quad}{1711} =$$

مثال : من بيانات المثال السابق احسب الأرقام القياسية التجميعية السابقة للكميات مرجحاً بالأسعار كما يلي :

الحل : من بيانات جدول حل المثال السابق يمكن حساب الأرقام القياسية التجميعية للكميات المرجحة بالأسعار سنة الأساس 1995 كما يلي :

$$1 - \text{رقم لاسبير للكميات} = 100 \times \frac{\text{مجك 1ع0}}{\text{مجك 0ع0}}$$

$$970$$

$$\%130.9 = 100 \times \frac{\quad}{741} =$$

$$2 - \text{رقم باش للكميات} = 100 \times \frac{\text{مجك 1ع1}}{\text{مجك 0ع1}}$$

$$1390$$

$$\%131.38 = 100 \times \frac{\quad}{1058} =$$

$$3 - \text{رقم فيشر للكميات} = 100 \times \frac{\text{مجك 1ع1} \times \text{مجك 0ع1}}{\text{مجك 0ع0} \times \text{مجك 1ع0}}$$

$$\%131.09 = 100 \times 1.313 \times 1.309 \sqrt{\quad} =$$

$$100 \times \frac{\begin{array}{c} \text{مج ك 1ع 0} \\ \text{مج ك 1ع 1} \end{array} + \frac{\begin{array}{c} \text{مج ك 0ع 1} \\ \text{مج ك 0ع 0} \end{array}}{2} = \text{رقم دروبش وبنالى للكميات} \quad -4$$

$$\%131.1 = 100 \times \frac{1.313 + 1.309}{2} =$$

$$100 \times \frac{\text{مج (ك 1ع 0 + ك 1ع 1)}}{\text{مج (ك 0ع 0 + ك 0ع 1)}} = \text{رقم مارشال - إيجورث للكميات} \quad -5$$

$$100 \times \frac{\begin{array}{c} \text{مج ك 1ع 0} + \text{مج ك 1ع 1} \\ \text{مج ك 0ع 0} + \text{مج ك 0ع 1} \end{array}}{2} =$$

$$\%131.18 = 100 \times \frac{1390 + 970}{1058 + 741} =$$

ثالثاً : المتوسطات البسيطة للمناسيب

### Simple Average of Relative Indices

بدلاً من حساب الأرقام القياسية بطريقة التجميع لأسعار وكميات السلع المختلفة الداخلة في تركيب الرقم القياسى فإن استخدام مناسيب الأسعار على حدة يمكن أن يكون أسلوباً مناسباً لمعرفة التغيرات في أسعار سلعة معينة بين سنة الأساس وسنة المقارنة ويعرف منسوب السعر كما ذكر سابقاً بأنه النسبة بين سعر السلعة في سنة المقارنة وسنة الأساس (1ع : 0ع) وأيضاً (ك1 : ك0) تعرف بمنسوب الكمية .

ووفقاً لهذه الحالة يكون لدينا عدداً من مناسيب الأسعار وعدد من مناسيب الكميات ويمكن استخراج المتوسط لكل منها كالاتى :

#### 1- الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار

مجموع مناسيب الأسعار  
الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار =  $100 \times \frac{\text{عددها}}{\text{عددها}}$

$$100 \times \frac{\text{مجموع (1ع / 0ع)}}{\text{ن}} =$$

ن

حيث 1ع أسعار سنة المقارنة ، 0ع أسعار سنة الأساس ، ن هى عدد السلع .



2- الوسط الهندسي البسيط لمناسيب الأسعار :

الوسط الهندسي البسيط للمناسيب =  $\sqrt[n]{\text{حاصل ضرب المناسيب}}$

ولتسهيل إيجاد الوسط الهندسي البسيط للمناسيب فإنه غالباً ما تستخدم اللوغاريتمات لتبسيط العمليات الحسابية على الوجه الأكمل كالآتي :

$$\text{لو (الوسط الهندسي البسيط للمناسيب)} = \frac{\text{لوس}1 + \text{لوس}2 + \dots + \text{لوس}ن}{ن}$$

$$= \frac{\left[ \text{مج لو (ع / 100)} \times 100 \right]}{ن}$$

ن

ويكون الوسط الهندسي للمناسيب هو العدد المقابل لناتج اللوغاريتم السابق .

مثال : احسب الوسط الحسابي لمناسيب الأسعار والوسط

الهندسي البسيط للمناسيب من بيانات الجدول التالي باعتبار سنة 1995 سنة أساس .

الأسعار		السلعة
2000	1995	
170	70	أ
80	42	ب
26	14	ج
47	24	د

الحل : نكون الجدول التالي والذي يوضح حساب مناسب الأسعار

السلعة	1995	2000	المنسوب = $100 \times \frac{1ع}{0ع}$
	0ع	1ع	
أ	70	170	$242.9 = 100 \times 70 / 170$
ب	42	80	$190.5 = 100 \times 42 / 80$
ج	14	26	$185.7 = 100 \times 14 / 26$
د	24	47	$200.0 = 100 \times 24 / 47$

1- الوسط الحسابى البسيط للمناسيب :

$$100 \times \frac{1ع}{0ع} =$$

ن

$$\frac{200 + 185.7 + 190.5 + 242.9}{4} =$$

819.1

$$\%204.8 = \frac{819.1}{4} =$$

∴ الأسعار زادت بنسبة 104.8% فى سنة المقارنة عنها فى سنة الأساس .

2- الوسط الهندسى البسيط للمناسيب :

$$= \frac{1}{4} (200 + 185.7 + 190.5 + 242.9)$$

$$(2.30 + 2.26 + 2.27 + 2.38) \frac{1}{4} =$$

$$9.23$$

$$2.31 = \frac{\quad}{4} =$$

$$4$$

وبالبحث فى جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات فإن الوسط الهندسى البسيط للمناسيب = 203.6 % .

∴ الأسعار زادت بنسبة 103.6% فى سنة المقارنة عنها فى سنة الأساس .

3- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة :

أ- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس :

وتحسب من العلاقة الآتية :

الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس

مجم و 0

$$100 \times \frac{\quad}{\quad} =$$

مجم و 0

1ع

حيث م = المنسوب =

0ع

$$و = 0ع \times ك0$$

ب- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة :

ويحسب من العلاقة الآتية :

الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة

$$100 \times \frac{\text{مجم م} \times \text{ون}}{\text{مجم ون}} =$$

$$\frac{1ع}{0ع} = \text{م} = \text{المنسوب} =$$

$$\text{ون} = 1ع \times 1ك$$

مثال : من بيانات الجدول التالي :

2000		1995		السلعة
السعر <sup>1</sup>	الكمية ك <sup>1</sup>	السعر <sup>0</sup>	الكمية ك <sup>0</sup>	
12	120	10	100	أ
20	150	15	200	ب
10	400	8	300	ج

أحسب :

- 1- الوسط الحسابي البسيط للمناسيب .
- 2- الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس
- 3- الوسط الحسابي للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة

الحل : نكون الجدول التالي :

السلعة	0ع	1ع	ك1	النسوب 0ع/1ع=م	أوزان الأساس 0ع=ك0	م * و	أوزان المقارنة 0ع=ع1ك1	م * و
أ	10	12	120	1.20	1000	1200	1440	1827
ب	15	20	150	1.33	3000	3990	3000	3990
ج	8	10	400	1.25	2400	3000	4000	5000
المجموع				3.78	6400	8190	8440	10718

1- الوسط الحسابى البسيط للمناسيب

$$100 \times \frac{\text{مج (ع / 0ع)}}{\text{ن}} =$$

ن

$$100 \times 3.78 = \frac{100 \times 3.78}{3} = 126\%$$

وهذه النتيجة تعنى أن متوسط أسعار السلع فى سنة 2000 زادت

بنسبة 26% عن متوسط أسعارها فى سنة 1995 .

2- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة الأساس :

$$100 \times \frac{\text{مج م و 0}}{\text{مج و 0}} =$$

مج و 0

$$100 \times \frac{819}{3} = 127.97\%$$

3

وهذه النتيجة تعنى أن متوسط الأسعار المرجحة بأوزان سنة الأساس فى سنة 2000 زادت بنسبة 27.97% عنها فى سنة 1995 .

3- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة بأوزان سنة المقارنة :

$$\text{مجم}^* \times \frac{\text{ون}}{100} =$$

$$\frac{10718}{8440} = 127\%$$

وهذه النتيجة تعنى أن متوسط الأسعار المرجحة بأوزان سنة المقارنة فى سنة 2000 زادت بنسبة 27% عنها فى سنة 1995 .

### اختبارات الأرقام القياسية Tests of Index Numbers

اقترح فيشر اختبارين لاختبار الأرقام القياسية وذكر أن أى رقم قياسى لا يحقق هذين الاختبارين لا يعتبر رقماً قياسياً أمثل من وجهة نظره ، وهذين الاختبارين هما :

#### أولاً: اختبار الانعكاس فى الزمن Time Reversal

يكون الرقم قابلاً للانعكاس فى الزمن إذا حقق الشرط الآتى:

$$\text{الرقم القياسى} \times \text{البديل الزمنى} = 1$$

مثال : الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار

$$1 = \frac{\text{مجم}^0}{\text{مجم}^1} \times \frac{\text{مجم}^1}{\text{مجم}^0}$$

∴ الرقم يقبل الانعكاس فى الزمن

مثال : رقم إدجورث القياسى للأسعار

$$1 = \frac{\text{مجموع } 0 \text{ (ك} + 1 \text{ ك)}}{\text{مجموع } 1 \text{ (ك} + 0 \text{ ك)}} \times \frac{\text{مجموع } 0 \text{ (ك} + 1 \text{ ك)}}{\text{مجموع } 1 \text{ (ك} + 0 \text{ ك)}} =$$

∴ الرقم يقبل الانعكاس فى الزمن

### ثانياً : اختبار الانعكاس فى المعامل Test of Factor Reversal

يكون الرقم القياسى قابلاً للانعكاس فى المعامل إذا حقق

الشرط الآتى :

الرقم القياسى × بديله المعامل = الرقم القياسى للقيمة

أمثلة لاختبار بعض الأرقام القياسية :

$$-1 \text{ رقم لاسبير} = \frac{\text{مجموع } 1 \text{ ك}}{\text{مجموع } 0 \text{ ك}} \times 100$$

البديل الزمنى لرقم لاسبير

$$\frac{\text{مجموع } 0 \text{ ك}}{\text{مجموع } 1 \text{ ك}} =$$

(لاحظ أننا لإيجاد البديل الزمنى جعلنا أسعار الأساس هى أسعار

المقارنة وأسعار المقارنة هى أسعار الأساس ونفس الحال بالنسبة

للقيمة).

البديل المعامل لرقم لاسبير :

مج ك 1 ع 0

=

مج ك 0 ع 0

(لاحظ أننا لإيجاد البديل المعامل لاسبير بدلنا ك مكان ع مع

الاحتفاظ بالأرقام (1 ، 0) الممثلة للمقارنة والأساس كما هي).

(أ) اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$1 \neq \frac{\text{مج ع 0 ك 1}}{\text{مج ع 1 ك 0}} \times \frac{\text{مج ع 1 ك 0}}{\text{مج ع 0 ك 0}}$$

∴ رقم لاسبير لا يقبل الانعكاس فى الزمن .

(ب) اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$\neq \frac{\text{مج ك 1 ع 0}}{\text{مج ك 0 ع 0}} \times \frac{\text{مج ع 1 ك 0}}{\text{مج ع 0 ك 0}}$$

∴ رقم لاسبير لا يقبل الانعكاس فى المعامل .

$$-2 \text{ رقم باش} = 100 \times \frac{\text{مج ع 1 ك 1}}{\text{مج ع 0 ك 1}}$$

البديل الزمنى لرقم باش

$$= \frac{\text{مج ع 0 ك 1}}{\text{مج ع 1 ك 0}}$$

مج ع 1 ك 0



البديل المعامل لرقم باش :

$$\frac{\text{مج ك 1 ع 1}}{\text{مج ك 0 ع 0}} =$$

$$\text{مج ك 0 ع 0}$$

(أ) اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$1 \neq \frac{\text{مج ع 0 ك 0}}{\text{مج ع 1 ك 1}} \times \frac{\text{مج ع 1 ك 1}}{\text{مج ع 0 ك 0}}$$

(ب) اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$\frac{\text{رقم القياسى للقيمة}}{\text{رقم القياسى للقيمة}} \neq \frac{\text{مج ك 1 ع 1}}{\text{مج ك 0 ع 0}} \times \frac{\text{مج ع 0 ك 0}}{\text{مج ع 1 ك 1}}$$

∴ رقم باش لا يقبل اختبارى الانعكاس فى الزمن والمعامل .

$$-3 \text{ رقم مارشال وأدجورث} = \frac{\text{مج (ع 1 ك 0 + ع 0 ك 1)}}{\text{مج (ع 0 ك 0 + ع 0 ك 1)}} \times 100$$

البديل الزمنى :

$$\frac{\text{مج (ع 0 ك 0 + ع 1 ك 0)}}{\text{مج (ع 1 ك 0 + ع 0 ك 0)}} =$$

اختبار الانعكاس فى الزمن :

$$1 = \frac{\text{مج } (ع 0 ك + 1 ع 0 ك)}{\text{مج } (ع 1 ك + 0 ع 1 ك)} \times \frac{\text{مج } (ع 1 ك + 0 ع 1 ك)}{\text{مج } (ع 0 ك + 0 ع 0 ك)}$$

∴ رقم مارشال وإدجورث يقبل الانعكاس فى الزمن .

البديل المعاملى :

$$\frac{\text{مج } (ك 1 ع + 0 ع 1 ك)}{\text{مج } (ك 0 ع + 0 ع 0 ك)}$$

اختبار الانعكاس فى المعامل :

$$\frac{\text{مج } (ع 1 ك + 0 ع 1 ك)}{\text{مج } (ع 0 ك + 0 ع 0 ك)} \times \frac{\text{مج } (ك 1 ع + 0 ع 1 ك)}{\text{مج } (ك 0 ع + 0 ع 0 ك)} \neq \frac{\text{مج } (ع 1 ك + 0 ع 1 ك)}{\text{مج } (ع 0 ك + 0 ع 0 ك)}$$

∴ رقم مارشال وإدجورث لا ينعكس فى المعامل .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{مج } (ع 1 ك + 0 ع 1 ك)}{\text{مج } (ع 0 ك + 0 ع 0 ك)} \times \frac{\text{مج } (ك 1 ع + 0 ع 1 ك)}{\text{مج } (ك 0 ع + 0 ع 0 ك)} \\ \text{رقم فيشر المثالى} \end{array} \right\} = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{مج } (ع 0 ك + 1 ع 0 ك)}{\text{مج } (ع 1 ك + 0 ع 1 ك)} \times \frac{\text{مج } (ك 0 ع + 0 ع 0 ك)}{\text{مج } (ك 1 ع + 0 ع 0 ك)} \\ \text{البديل الزمنى} \end{array} \right\} =$$

اختبار الانعكاس في الزمن :

$$1 = \frac{\text{مج ع 0 ك 0}}{\text{مج ع 1 ك 1}} \times \frac{\text{مج ع 1 ك 0}}{\text{مج ع 0 ك 0}} = \frac{\text{مج ع 1 ك 0}}{\text{مج ع 0 ك 0}} \times \frac{\text{مج ع 0 ك 0}}{\text{مج ع 1 ك 1}}$$

∴ رقم فيشر يقبل الانعكاس في الزمن .

$$\frac{\text{مج ك 1 ع 1}}{\text{مج ك 0 ع 0}} \times \frac{\text{مج ك 1 ع 0}}{\text{مج ك 0 ع 0}} = \text{البديل المعامل}$$

اختبار الانعكاس في المعامل :

$$\frac{\text{مج ك 1 ع 1}}{\text{مج ك 0 ع 0}} \times \frac{\text{مج ك 1 ع 0}}{\text{مج ك 0 ع 0}} \times \frac{\text{مج ع 1 ك 0}}{\text{مج ع 0 ك 0}} \times \frac{\text{مج ع 1 ك 1}}{\text{مج ع 0 ك 0}} =$$

$$\frac{\text{مج ع 1 ك 1}}{\text{مج ع 0 ك 0}} = 2 \left[ \frac{\text{مج ع 1 ك 1}}{\text{مج ع 0 ك 0}} \right]$$

∴ رقم فيشر ينعكس في المعامل .

ملحوظة : يلاحظ ما سبق أن الرقم القياسى لفيشر هو الرقم القياسى الوحيد الذى يقبل الانعكاس فى كل من الزمن والمعامل وهذه أحد الأسباب التى جعلت رقم فيشر يسمى برقم فيشر المثالى .  
تغيير فترة الأساس :

فى بعض الأحيان نلجأ إلى تعديل فترة الأساس فى حالة إذا كانت فترة الأساس قديمة وأراد الباحث أن يجددها . ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال التالى :

مثال : البيانات التالية توضح الرقم القياسى للأسعار (1965 = 100) خلال الفترة (1990 - 1995) .

الأرقام القياسية للأسعار (1965 = 100)

السنة	1965	1990	1991	1992	1993	1994	1995
الرقم القياسى	100	90	113	135	145	158	176

المطلوب تعديل سنة الأساس إلى سنة 1994 .

الحل : لتغيير سنة الأساس إلى 1994 يتم قسمة كل رقم فى السلسلة على قيمة الرقم القياسى لسنة 1994 وضرب الناتج  $\times 100$  كالتالى :

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1990} = 100 \times \frac{90}{158} = 57$$

$$\text{الرقم القياسى لسنة 1991} = 100 \times \frac{113}{158} = 71.5$$

$$85.4 = 100 \times \frac{135}{158} = \text{الرقم القياسي لسنة 1992}$$

$$91.8 = 100 \times \frac{145}{158} = \text{الرقم القياسي لسنة 1993}$$

$$100 = 100 \times \frac{158}{158} = \text{الرقم القياسي لسنة 1994}$$

$$111.4 = 100 \times \frac{176}{158} = \text{الرقم القياسي لسنة 1995}$$

ومن ثم نحصل على سلسلة جديدة من الأرقام القياسية (1994 = 100) كما هو موضح في الجدول التالي :

الأرقام القياسية للأسعار (1994 = 100)

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995
الرقم القياسي	57	71.5	85.4	91.8	100	111.4

مثال : الجدول التالي يوضح سلسلة من الأرقام القياسية خلال الفترة (1987-1998) سنة الأساس (1988 = 100)

السنة	الرقم القياسي (1988 = 100)
1987	99.2
1988	100.0
1989	104.5
1990	106.7
1991	109.8
1992	112.4
1993	116.7
1994	120.8
1995	125.6
1996	130.5
1997	148.6
1998	150.2

المطلوب : تغيير سنة الأساس إلى (1992 = 100)

الحل : لتغيير سنة الأساس إلى (1992 = 100) نقسم كل رقم في سلسلة الأرقام القياسية المعطاة في الجدول السابق على قيمة الرقم القياسي لسنة 1992 وضرب الناتج  $\times 100$  .

السنة	الرقم القياسي (1992 = 100)
1987	88.3
1988	89.0
1989	93.0
1990	94.9
1991	97.7
1992	100.0
1993	103.8
1994	107.5
1995	111.7
1996	116.1
1997	132.2
1998	133.6

تغيير الأرقام القياسية فى حالة وجود رقمين قياسيين يختلفان فى فترة الأساس :

فى بعض الأحيان يكون المطلوب تغيير فترة الأساس فى حالة وجود رقمين قياسيين يختلفان فى فترة الأساس ويتم ذلك من خلال المفهوم الجبرى باستخدام عملية النسبة والتناسب والتى يوضحها المثال التالى :

مثال : يبين الجدول التالى سلسلتان من الأرقام القياسية ، الأولى أساسها عام (1980 = 100) والثانية أساسها عام (1984 = 100) والمطلوب تكملة بيانات السلسلتين .

السلسلة الثانية (1984 = 100)	السلسلة الأولى (1980 = 100)	السنة
	100	1980
	130	1981
	160	1982
100	189	1983
131	220	1984
148		1985
162		1986
188		1987
		1988

الحل : للحصول على سلسلة أرقام قياسية متصلة يجب تعديل أحد الرقمين القياسيين إما يجعل سنة 1980 هى سنة أساس وبالتالى تستكمل السلسلة الأولى أو يجعل سنة 1984 هى سنة الأساس ومن ثم تستكمل السلسلة الثانية .

فأستكمال السلسلة الأولى ، يلاحظ أن الرقم القياسى لعام 1984 فى السلسلة الأولى هو 220 وهذا الرقم يناظره فى السلسلة

الثانية الرقم 100 أى أن النسبة بينهما 220 : 100 وبالتالي يمكن تعديل أرقام السلسلة الثانية لجعلها تتبع أرقام السلسلة الأولى فى السنوات من 1985 إلى 1988 وذلك باستخدام عملية النسبة والتناسب التالية :

$$100 : 220$$

$$س : 131$$

حيث س ترمز إلى الرقم القياسى الجديد المطلوب لتكملة السلسلة الأولى

$$131 \times 220$$

$$\frac{289.51}{100} = \frac{131 \times 220}{100} = \text{الرقم القياسى لسنة 1985}$$

$$100 : 220$$

$$س : 148$$

$$148 \times 220$$

$$\frac{325.6}{100} = \frac{148 \times 220}{100} = \text{الرقم القياسى لسنة 1986}$$

وهكذا بالنسبة للأرقام القياسية لسنتى 1987 ، 1988 كما

سوف يتضح من الجدول التالى :

ولاستكمال أرقام السلسلة الثانية نستخدم نفس الطريقة السابقة فالرقم القياسى لسنة 1984 هو 100 وينظره فى السلسلة الأولى 220 أى أن النسبة بينهما 100 : 220 وبالتالي يمكن تعديل أرقام السلسلة الأولى لجعلها تتبع السلسلة الثانية فى السنوات من 1980 إلى 1983 وذلك باستخدام عملية النسبة والتناسب التالية :



220 : 100

س : 100

$$45.45 = \frac{100 \times 100}{220} = \text{الرقم القياسي لسنة 1980}$$

$$59.09 = \frac{130 \times 100}{220} = \text{الرقم القياسي لسنة 1981}$$

$$72.72 = \frac{160 \times 100}{220} = \text{الرقم القياسي لسنة 1982}$$

$$85.91 = \frac{189 \times 100}{220} = \text{الرقم القياسي لسنة 1983}$$

والجدول التالي يوضح الأرقام القياسية للسلسلتين بعد استكمالهما :

السلسلة الثانية (100 = 1984)	السلسلة الأولى (100 = 1980)	السنة
45.45	100	1980
59.09	130	1981
72.72	160	1982
85.91	189	1983
100	220	1984
131	289.51	1985
148	325.60	1986
162	356.40	1987
188	413.16	1988

## الأرقام القياسية للتجارة الخارجية :

إن إحصاءات التجارة الخارجية لأى دولة تعتبر من الأساسيات التى تبنى عليها سياسة الدولة الاقتصادية حيث توضح مدى اعتمادها على العالم الخارجى من خلال قياس التغيرات فى حجم وهيكل التجارة الخارجية وإحداث التنمية فى مختلف القطاعات المكونة للمقتصد القومى مثل القطاعات الإنتاجية والاستهلاكية والاستثمارية وغيرها . ويمكن الاستفادة من الأرقام القياسية للتجارة الخارجية فى توضيح التغيرات التى قد تطرأ على قيم وكميات وأسعار كل من الصادرات والواردات .

وتستخدم الأرقام القياسية لكمية وأسعار وقيم كل من الصادرات والواردات فى حساب المؤشرات الاقتصادية التالية :

الرقم القياسى لكمية الواردات

$$(1) \text{ معدل التبادل الدولى الاجمالى} = \frac{\text{الرقم القياسى لكمية الواردات}}{100} \times 100$$

الرقم القياسى لكمية الصادرات

وزيادة هذه النسبة عن الواحد الصحيح تعنى أنه فى مقابل كمية معينة من الصادرات أمكن الحصول على قدر أكبر من الواردات .

الرقم القياسى لأسعار الصادرات

$$(2) \text{ معدل التبادل الدولى الصافى} = \frac{\text{الرقم القياسى لأسعار الصادرات}}{100} \times 100$$

الرقم القياسى لأسعار الواردات

فإذا كان هذا المعدل يساوى 100 يدل ذلك على أن التغير الذى حدث فى أسعار الصادرات قابلة تغير مساوى له فى أسعار الواردات . أما إذا كان هذا المعدل أكبر من 100 فمعنى هذا أن أسعار الصادرات قد ارتفعت بالمقارنة بأسعار الواردات ويكون ذلك فى صالح الدولة .

$$\text{أو نسبة التبادل} = \frac{\text{الرقم القياسى لأسعار الصادرات}}{100 \times \text{الرقم القياسى لأسعار الواردات}}$$

ويرجع الاهتمام بهذه النسبة أنها تدلنا على مدى سيطرة صادرات الدولة على وارداتها . وأنها تدلنا على مقدار القوة الشرائية للدولة بالنسبة للخارج ، فإذا كانت هذه النسبة أقل من الواحد الصحيح دل ذلك على أنها فى غير صالح الدولة لأن ذلك يعنى أن أسعار الصادرات أقل من أسعار الواردات مما يؤثر سلباً على الميزان التجارى للدولة .

بينما إذا زادت هذه النسبة عن الواحد الصحيح دل ذلك على أنها فى صالح الدولة لأن ذلك يعنى أن أسعار الصادرات تكون أكبر من أسعار الواردات مما يكون له أثر إيجابى على الميزان التجارى للدولة .

ولتوضيح المفهوم السابق نفرض أن دولة مثل ليبيا تصدر النفط وتستورد القمح فإذا زاد الطلب على النفط الليبي ، فإن سعره يرتفع ، وعندئذ تستطيع ليبيا أن تشتري بهذا السعر من الخارج سلعاً أكثر عدداً من ذى قبل ، فى مقابل نفس الكمية المصدرة من النفط وعندئذ تعتبر نسبة التبادل فى صالح ليبيا :

السعر		وحدات مستوردة	=	السعر		وحدات مصدرة	الحالة
1	*	3600	=	4	*	900	قبل زيادة الطلب على النفط
1	*	7200	=	8	*	900	بعد زيادة الطلب على النفط

فقد تضاعفت أسعار صادرات النفط من 4 إلى 8 ، وأصبح رقمها القياسى 200% بينما ظلت أسعار الواردات كما هى ورقمها

القياسى 100 وارتفعت نسبة التبادل إلى 2 وذلك بافتراض توازن ميزان المدفوعات خلال فترتى المقارنة (1 ، 2) .

وإذا كان المطلوب قياس أثر التجارة الخارجية على الدخل القومى الحقيقى وعلى الرفاهية الاقتصادية فإن المقياس المناسب هو معدل التبادل الداخلى والذى يأخذ فى الاعتبار كل من سعر وكمية الصادرات والواردات حيث :

$$(3) \text{ معدل التبادل الداخلى} = \frac{\text{الرقم القياسى لقيمة الصادرات}}{\text{الرقم القياسى لقيمة الواردات}} \times 100$$

أو = معدل التبادل التجارى × الرقم القياسى لكمية الصادرات  
ويعبر هذا المعدل عن كمية الواردات التى أمكن الحصول عليها مقابل العائد من الصادرات ، ويكون هذا المعدل فى صالح الدولة إذا كان أكبر من الواحد الصحيح والعكس صحيح .

## تمارين

(1) الجدول الآتى يوضح أسعار بعض السلع الغذائية أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، هـ عن عامى 1980 ، 1990 بالجنيه لكل كيلو جرام .

السلعة	1980	1990
أ	35	45
ب	40	60
ج	55	80
د	60	90
هـ	80	110

المطلوب :

1- حساب الرقم التجميعى البسيط للأسعار باستخدام سنة 1980 أساس .

2- الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار باستخدام سنة 1980 أساس .

(2) فيما يلى جدول يوضح أسعار وكميات ثلاثة سلع أ ، ب ، ج فى عامى 1990 ، 1995 بالجنيه لكل كيلو جرام .

السلعة	الأسعار		الكميات	
	1995	1990	1995	1990
أ	10	50	28	16
ب	20	90	15	14
ج	30	140	20	10

المطلوب : حساب الأرقام القياسية التالية مع تفسير النتائج  
المتحصل عليها باعتبار سنة 1990 أساس

1- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار .

2- الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات .

3- الرقم القياسى التجميعى البسيط للقيمة .

(3) احسب الأرقام القياسية التالية من بيانات جدول تمرين (2)

أ- الرقم القياسى التجميعى المرجح بكميات فترة الأساس (الاسبير) .

ب- رقم باش .

ج- رقم مارشال- إدجورث .

ء- رقم فيشر المثالى .

(4) فيما يلى أسعار وكميات ثلاث سلع لعامى 1995 ، 2000

الكميات		الأسعار		السلعة
2000	1995	2000	1995	
60	40	160	120	أ
80	30	220	180	ب
54	50	300	240	ج

وباعتبار سنة 1995 أساس أحسب الآتى :

أ- الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار .

ب- الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار .

(5) باستخدام نتائج تمرين (3) المطلوب اختبار الانعكاس فى الزمن والانعكاس فى المعامل .

(6) الجدول الآتى يمثل متوسط الأجر الشهرى لبعض الصناعات الاستثمارية فى مصر فى عامى 1996 ، 1998 .

السنة	صناعة 1	صناعة 2	صناعة 3	صناعة 4
1996	420	480	520	550
1998	600	700	900	1200

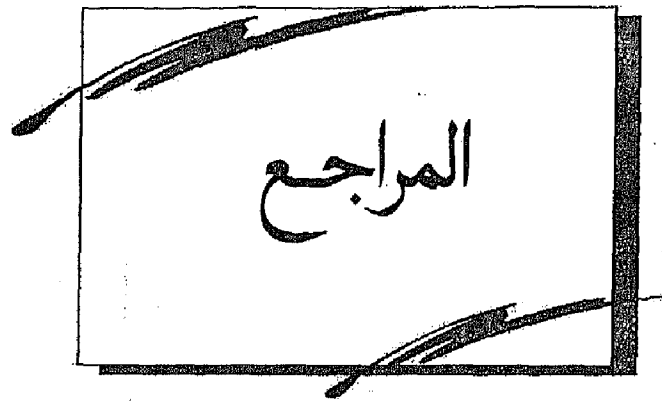
والمطلوب تركيب رقم قياسى بسيط للأجور باعتبار سنة 1996 أساس .

(7) المطلوب تكملة بيانات الجدول التالى :

السنة	100 = 1965	100 = 1975
1964	94	
1965	100	
1966	103	
1967	106	
1968	108	
1969	109	
1970	112	
1971	120	
1972	125	
1973	130	
1974	140	
1975	170	100
1976		129
1977		135
1978		145
1979		160
1980		175









## أولاً : مراجع باللغة العربية :

- 1- أحمد عبادة سرحان ، العينات ، مكتبة النهضة المصرية ، 1975 .
- 2- أحمد عبادة سرحان ، صلاح الدين طلبية ، أسس الإحصاء ، دار الكتب الجامعية ، الإسكندرية ، 1986 .
- 3- السيد محمد خيرى ، الإحصاء فى البحوث النفسية والتربوية والاجتماعية ، دار النهضة العربية ، 1970 .
- 4- جابر أحمد بسيونى (دكتور) ، المبادئ الأساسية للمحددات والمصفوفات والاحتمالات وتطبيقاتها فى العلوم الزراعية ، كلية الزراعة (سابقا باشا) ، جامعة الإسكندرية ، 1999 .
- 5- محمد صلاح الدين صدقى ، مبادئ النظرية الإحصائية ، دار النهضة العربية ، 1967 .
- 6- فاروق عبد العظيم (دكتور) وآخرون ، مقدمة فى الإحصاء ، دار المطبوعات الجامعية ، الإسكندرية 1983 .

## ثانياً : مراجع باللغة الأجنبية :

- 1- Alder, H.L. and Roessler, E.B., **Introduction to Probability and Statistics**, W.H. Freeman Company, San Fran Cisco, U.S.A., 1986.
- 2- Anderson, R.L. and Bancroft, T.A., **Statistical Theory in Research**, McGraw-Hill, New York, 1952.
- 3- Anderson, O.D., **Time Series Analysis and Forecasting, The Box-Jenkins Approach**, Butterworth, London, 1977.

- 4- Bails, Sale G., and Larry C., **Business Fluctuations: Forecasting Techniques and Applications**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
- 5- Barry R. and Ralph M., **Quantitative Analysis for Management**, 3<sup>rd</sup> Edition, Allyn Baron Inc., U.S.A., 1988.
- 6- Blalock, H.M., **Social Statistics**, McGraw-Hill, N.Y., 1972.
- 7- Bowerman, Bruce L., and Richard T., **Time Series Analysis and Forecasting**, 2<sup>nd</sup> Ed. Duxburry, North Scituate.
- 8- Brillinger, David R., **Time Series Data Analysis and Theory**, Holt, Rinehart and Winstor, N.Y., 1963.
- 9- Broen, Robert Boodel, **Smoothing, Forecasting and Predection of Discrete Time Series**, Printice. Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- 10- Cochran, W.G., **Sampling Techniques**, Johnwiley Sons, N.Y., 1953.
- 11- Cramer, Harald, **The Elements of Probability Theory**, Wiely, New York, 1955.
- 12- Croxton, F.E. and Cowden, D.J., **Applied General Statisticis**, Printice-Hall, Inc., Englewood Cliffes, N.J., 1955.
- 13- Draper, N.R. and H. Smith, **Applied Regression Analysis**, Wiley, New York, 1977.

- 14-Feller, Williams. **An Introduction to probability Theory and Its Application**, Vol 1, Wiely, New York, 1950.
- 15-Freund, John F. **Mathematical Statistics**, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J., 1980..
- 16-Hogg, Robert V., and Allen T. Craig, **Introduction to Mathematical Statistics**, 4<sup>th</sup> Edition, Macmillan, New York, 1978.
- 17-Johnston, J., **Econometric Methods**, McGraw-Hill Book Co., New York, 1963.
- 18-Larsen, Richard J., and Morris L. Marx, **An Introduction to Mathematical Statistics and Its Application**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.
- 19-Mc Call, Chester H., **Sampling and Statistical Handbook for Research**. Iowa State University Press, Ames, 1982.
- 20- Montgomery, Douglas C., and Lynwood A. Johnson, **Forecasting and Time Series Analysis**, McGraw-Hill, New York, 1976.
- 21-Warwich, Donald P., and Charles A. Lininger, **The Sample Survey: Theory and Practice**, McGraw-Hill, New York, 1975.
- 22-Wayne W. Daniel and James C. Terrel, **Business Statistics for Management and Economics**, 5<sup>th</sup> ed., Houghton Mifflin Co., U.S.A., 1989.



الملاحق

## الجداول الإحصائية



الجدول الإحصائية

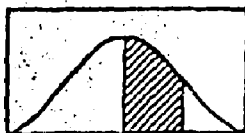


Table I. Table of Areas of the Normal Curve

$(Y - \mu)/\sigma = Z$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4758	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4986	.4987	.4987	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990	.4990



Table II, Distribution of *F*

Degrees of freedom	Probability												
	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.158	0.323	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.610
2	0.142	0.289	0.443	0.617	0.816	1.061	1.336	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.778	3.747	4.604	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.577	3.365	4.032	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.719	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.950
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.731
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.189	4.557
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.315
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.231
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.593	2.921	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.875	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.689
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.671
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.654
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.636
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.399	2.680	3.480
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.846	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.320	2.578	3.291

Source: Table II is reprinted from Table III of Ronald A. Fisher and Frank Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural, and Medical Research*, 4th ed., 1953, published by Oliver & Boyd, Ltd., Edinburgh, by permission of the authors and publishers.



Table III. Table of Chi Square

Degree of freedom	Probability that chi-square value will be exceeded									
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.00393	0.0157	0.0482	0.10393	0.3158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.58	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.88	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.57	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.26	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.98	14.57	16.16	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.71	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.45	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	15.20	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.80	55.76	59.34	63.69	68.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.16	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.93
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.23	96.58	101.9	106.6	112.3	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.38	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
$Z_{\alpha}$	-2.58	-2.33	-1.96	-1.64	-1.23	+1.23	+1.64	+1.96	+2.33	+2.58

NOTE: For  $r > 100$  (i.e., for more than 100 degrees of freedom) take

$$\chi^2 = r \left[ 1 - \frac{2}{9r} + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{2}{9r}} \right]^3 \quad \text{or} \quad \chi^2 = \{ Z_{\alpha} + \sqrt{(2r-1)} \}^2$$

according to the degree of accuracy required.  $Z_{\alpha}$  is the standardized normal deviate corresponding to the  $\alpha$  level of significance, and is shown in the bottom line of the table.

SOURCE: By permission of Prof. E. S. Pearson, from Catherine M. Thompson, "Tables of the Percentage Points of the Incomplete Beta Function and of the  $\chi^2$  Distribution," *Biometrika*, vol. 32, pp. 188-181, 188-189, 1941.



Table IV. F Distribution

Degrees of freedom for the numerator

df for denominator	Upper 10 percent points																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$	
1	39.86	19.59	14.79	12.59	11.71	11.16	10.75	10.42	10.15	9.92	9.71	9.53	9.37	9.23	9.10	8.98	8.87	8.77	8.68	8.60
2	19.00	9.00	6.59	5.59	5.13	4.81	4.57	4.38	4.23	4.11	4.00	3.90	3.81	3.73	3.65	3.58	3.51	3.45	3.39	3.33
3	16.68	7.16	5.00	4.25	3.93	3.67	3.46	3.28	3.14	3.02	2.92	2.83	2.75	2.68	2.61	2.54	2.48	2.43	2.38	2.33
4	15.99	6.46	4.53	3.84	3.58	3.38	3.20	3.04	2.90	2.78	2.69	2.60	2.52	2.45	2.38	2.32	2.26	2.21	2.16	2.11
5	15.52	6.14	4.33	3.69	3.48	3.25	3.07	2.91	2.77	2.65	2.56	2.47	2.39	2.32	2.26	2.20	2.14	2.09	2.04	1.99
6	15.18	5.88	4.10	3.50	3.33	3.16	2.98	2.82	2.68	2.56	2.47	2.38	2.30	2.23	2.17	2.11	2.05	1.99	1.94	1.89
7	14.92	5.66	3.90	3.34	3.21	3.08	2.90	2.74	2.60	2.48	2.39	2.30	2.22	2.15	2.09	2.03	1.97	1.91	1.86	1.81
8	14.71	5.48	3.74	3.21	3.11	2.99	2.80	2.64	2.50	2.38	2.29	2.20	2.12	2.05	1.99	1.93	1.87	1.81	1.76	1.71
9	14.54	5.33	3.60	3.09	3.01	2.90	2.70	2.54	2.40	2.28	2.19	2.10	2.02	1.95	1.89	1.83	1.77	1.71	1.66	1.61
10	14.40	5.20	3.48	2.99	2.92	2.82	2.61	2.45	2.31	2.19	2.10	2.01	1.93	1.86	1.80	1.74	1.68	1.62	1.57	1.52
11	14.28	5.09	3.38	2.91	2.84	2.75	2.53	2.37	2.23	2.11	2.02	1.93	1.85	1.78	1.72	1.66	1.60	1.54	1.49	1.44
12	14.17	4.99	3.29	2.83	2.77	2.68	2.46	2.30	2.16	2.04	1.95	1.86	1.78	1.71	1.65	1.59	1.53	1.47	1.42	1.37
13	14.07	4.90	3.21	2.76	2.70	2.61	2.39	2.23	2.10	1.98	1.89	1.80	1.72	1.65	1.59	1.53	1.47	1.41	1.36	1.31
14	14.00	4.82	3.14	2.70	2.64	2.55	2.33	2.17	2.04	1.92	1.83	1.74	1.66	1.59	1.53	1.47	1.41	1.35	1.30	1.25
15	13.93	4.75	3.08	2.65	2.59	2.50	2.28	2.12	1.99	1.87	1.78	1.69	1.61	1.54	1.48	1.42	1.36	1.30	1.25	1.20
16	13.87	4.69	3.03	2.60	2.54	2.45	2.23	2.07	1.94	1.82	1.73	1.64	1.56	1.49	1.43	1.37	1.31	1.25	1.20	1.15
17	13.81	4.64	2.98	2.56	2.50	2.41	2.19	2.03	1.90	1.78	1.69	1.60	1.52	1.45	1.39	1.33	1.27	1.21	1.16	1.11
18	13.76	4.59	2.94	2.52	2.46	2.37	2.15	1.99	1.86	1.74	1.65	1.56	1.48	1.41	1.35	1.29	1.23	1.17	1.12	1.07
19	13.71	4.55	2.90	2.48	2.42	2.33	2.11	1.95	1.82	1.70	1.61	1.52	1.44	1.37	1.31	1.25	1.19	1.13	1.08	1.03
20	13.67	4.51	2.86	2.45	2.39	2.30	2.08	1.92	1.79	1.67	1.58	1.49	1.41	1.34	1.28	1.22	1.16	1.10	1.05	1.00
21	13.63	4.47	2.83	2.42	2.36	2.27	2.05	1.89	1.76	1.64	1.55	1.46	1.38	1.31	1.25	1.19	1.13	1.07	1.02	0.97
22	13.59	4.44	2.80	2.39	2.33	2.24	2.02	1.86	1.73	1.61	1.52	1.43	1.35	1.28	1.22	1.16	1.10	1.04	0.99	0.94
23	13.56	4.41	2.77	2.36	2.30	2.21	1.99	1.83	1.70	1.58	1.49	1.40	1.32	1.25	1.19	1.13	1.07	1.01	0.96	0.91
24	13.53	4.38	2.75	2.34	2.28	2.19	1.97	1.81	1.68	1.56	1.47	1.38	1.30	1.23	1.17	1.11	1.05	0.99	0.94	0.89

35	12.92	2.53	2.12	2.18	1.68	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.63	1.66	1.6
36	12.91	2.53	2.31	2.17	1.68	2.01	1.96	1.92	1.83	1.86	1.81	1.76	1.72	1.69	1.63	1.61	1.58
37	2.90	2.51	2.30	2.17	1.67	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.61	1.58
38	2.89	2.50	2.29	2.16	1.66	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.60	1.58
39	2.89	2.50	2.28	2.15	1.66	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.60	1.58
40	2.88	2.49	2.28	2.14	1.66	1.98	1.93	1.89	1.86	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.60	1.58
41	2.84	2.44	2.23	2.09	1.65	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.58	1.54	1.53	1.5
42	2.79	2.39	2.18	2.04	1.66	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.4
43	2.75	2.35	2.13	1.99	1.60	1.82	1.77	1.73	1.68	1.65	1.60	1.54	1.48	1.44	1.37	1.32	1.3
44	2.71	2.30	2.08	1.94	1.65	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.28
45																	1.0

Upper 5 percent points

1	18.6	19.0	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5
2	18.6	18.65	18.7	18.75	18.8	18.85	18.9	18.95	19.0	19.05	19.1	19.15	19.2	19.25	19.3	19.35	19.4
3	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11	10.11
4	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71	7.71
5	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01
6	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
7	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
8	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
9	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
10	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84
11	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84	4.84
12	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76	4.76
13	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67	4.67
14	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60	4.60
15	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54	4.54
16	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49	4.49
17	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45	4.45
18	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41	4.41
19	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38	4.38

Table IV. F Distribution (Continued)

df numerator	Degrees of freedom for the denominator																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
20	4.33	3.48	3.16	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.97	1.91	1.85	1.80	1.76
21	4.31	3.47	3.15	2.86	2.70	2.59	2.50	2.44	2.37	2.32	2.25	2.17	2.09	2.01	1.94	1.87	1.81	1.76	1.72
22	4.29	3.45	3.13	2.84	2.68	2.57	2.48	2.42	2.35	2.30	2.23	2.15	2.07	1.99	1.92	1.85	1.79	1.74	1.70
23	4.28	3.43	3.11	2.83	2.67	2.56	2.47	2.41	2.34	2.29	2.22	2.14	2.06	1.98	1.91	1.84	1.78	1.73	1.69
24	4.27	3.42	3.10	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.33	2.28	2.21	2.13	2.05	1.97	1.90	1.83	1.77	1.72	1.68
25	4.26	3.41	3.09	2.81	2.65	2.54	2.45	2.39	2.32	2.27	2.20	2.12	2.04	1.96	1.89	1.82	1.76	1.71	1.67
26	4.25	3.40	3.08	2.80	2.64	2.53	2.44	2.38	2.31	2.26	2.19	2.11	2.03	1.95	1.88	1.81	1.75	1.70	1.66
27	4.24	3.39	3.07	2.79	2.63	2.52	2.43	2.37	2.30	2.25	2.18	2.10	2.02	1.94	1.87	1.80	1.74	1.69	1.65
28	4.23	3.38	3.06	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.29	2.24	2.17	2.09	2.01	1.93	1.86	1.79	1.73	1.68	1.64
29	4.22	3.37	3.05	2.77	2.61	2.50	2.41	2.35	2.28	2.23	2.16	2.08	2.00	1.92	1.85	1.78	1.72	1.67	1.63
30	4.21	3.36	3.04	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.91	1.84	1.77	1.71	1.66	1.62
40	4.17	3.32	3.01	2.72	2.56	2.45	2.36	2.30	2.23	2.18	2.11	2.03	1.95	1.87	1.80	1.73	1.67	1.62	1.58
60	4.08	3.23	2.92	2.63	2.47	2.36	2.27	2.21	2.14	2.09	2.02	1.94	1.86	1.78	1.71	1.64	1.58	1.53	1.49
120	3.82	3.07	2.85	2.45	2.29	2.18	2.09	2.03	1.96	1.91	1.84	1.76	1.68	1.60	1.53	1.46	1.40	1.35	1.31
∞	3.54	3.00	2.80	2.37	2.21	2.10	2.01	1.95	1.88	1.83	1.75	1.67	1.59	1.52	1.45	1.39	1.32	1.27	1.23

Upper 5 per cent points

df numerator	Upper 1 per cent points																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4062	4000	3803	3623	3464	3350	3278	3223	3181	3156	3106	3057	3009	2973	2951	2927	2913	2899	2886
2	86.5	89.0	89.3	89.2	89.3	89.3	89.4	89.4	89.4	89.4	89.4	89.4	89.4	89.4	89.4	89.4	89.4	89.4	89.4
3	34.1	30.8	29.6	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.6	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.6	10.5	10.2	10.1	9.9	9.72	9.53	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.73	9.13	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88

7	12.2	8.65	8.48	7.85	7.40	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.18	6.07	5.92	5.81	5.74	5.68
8	11.2	8.65	7.69	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.38	5.28	5.20	5.11	5.05	4.85
9	10.8	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.40	4.31
10	10.0	7.88	6.86	6.29	5.92	5.66	5.49	5.35	5.24	5.15	5.00	4.85	4.71	4.62	4.55	4.47	4.30	4.21
11	9.85	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.26	4.10	4.02	3.94	3.86	3.69	3.60
12	9.23	6.93	5.96	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.85	3.78	3.70	3.61	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.42	3.25	3.16
14	8.86	6.61	5.66	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.88	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.02	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.84	2.76
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.92	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.16	3.00	2.92	2.84	2.76	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.46	2.36
22	7.96	5.73	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.41	2.31
23	7.86	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.35	2.26
24	7.81	5.61	4.71	4.21	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.50	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.83	3.60	3.43	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.72	2.57	2.49	2.41	2.32	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.75	1.60
80	6.85	4.79	3.95	3.46	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.57	1.38
100	6.61	4.61	3.78	3.31	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.37	1.00

Source: By permission of Prof. E. R. Pearson, from M. Herington and G. M. Thompson, "Tables of Percentage Points of the Inverted Beta (T) Distribution," Biometrika, vol. III, p. 71, 1924.





## المحتويات

رقم الصفحة	الموضوع
3	مقدمة
	<b>الفصل الأول</b>
5	تعريف علم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى
7	تمهيد
7	أولاً : تعريف علم الإحصاء
9	ثانياً : خصائص علم الإحصاء
9	ثالثاً : وظائف علم الإحصاء
10	علاقة علم الإحصاء بالعلوم الأخرى
11	1- العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الاقتصاد
12	2- العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الإدارة
12	3- العلاقة بين علم الإحصاء وعلم المحاسبة
13	4- العلاقة بين علم الإحصاء والرياضة
	5- العلاقة بين علم الإحصاء وعلم الرياضة وعلم
13	الاقتصاد

## الفصل الثاني

15	مراحل البحث الإحصائي
	1- تحديد الهدف من البحث أو وضع الفروض
17	الإحصائية
17	2- تحديد المجتمع المراد جمع البيانات عنه

**رقم الصفحة****الموضوع**

17	3- تحديد مصادر البيانات
18	4- التجهيز لعملية جمع البيانات الميدانية
20	5- تصنيف وتجهيز البيانات
20	6- عرض البيانات وتحليلها إحصائياً
21	العينات
21	أنواع العينات
22	أولاً : العينات الاحتمالية
22	العينة العشوائية البسيطة
22	العينة العشوائية المنتظمة
24	العينة الطبقية
24	العينة متعددة المراحل
24	ثانياً : العينات غير الاحتمالية
26	أنواع الأخطاء
26	أخطاء المعاينة
26	أخطاء التحيز
27	تبويب وعرض البيانات الإحصائية
27	العرض الجدولي
27	جداول عامة
27	جداول خاصة
28	جدول التوزيع التكرارى
33	التمثيل البياني
33	البيانات الخام
34	طريقة الخط البياني

## رقم الصفحة

## الموضوع

35	طريقة الأعمدة
36	طريقة الدائرة
38	البيانات المبوبة
38	المدرج التكرارى
40	المضلع التكرارى
42	المنحنى التكرارى
43	المنحنى التكرارى المتجمع الهابط
44	المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

## الفصل الثالث

### مقاييس النزعة المركزية

51	
53	تمهيد
54	الوسط الحسابى
70	الوسيط
76	المتوال
83	الوسط الهندسى
88	المتوسط الموزون

## الفصل الرابع

### مقاييس التشتت

93	
95	تمهيد
96	المدى
96	الانحراف المربيعى

## رقم الصفحة

## الموضوع

100

الانحراف المتوسط

103

الانحراف المعياري

113

معامل الاختلاف

## الفصل الخامس

### الارتباط

119

121

تمهيد

123

خصائص معامل الارتباط

123

حساب معامل الارتباط الخطي (بيرسون)

123

الطريقة المباشرة

124

طريقة الانحرافات البسيطة

124

طريقة الانحرافات المختصرة

126

معامل ارتباط الرتب (سبيرمان)

حساب معامل ارتباط الرتب في حالة البيانات

131

الكمية

132

اختبار معنوية معامل الارتباط

## الفصل السادس

### الانحدار

137

139

تمهيد

140

طريقة المربعات الصغرى لتوفيق الخط المستقيم

140

معادلة انحدار ص على س

148

العلاقة بين معامل الارتباط ومعامل الانحدار

رقم الصفحة	الموضوع
151	طريقة العزوم لحساب معادلة خط الانحدار
152	اختبار معنوية معامل الانحدار
160	خطأ التقدير
165	معادلة الاتجاه العام الزمني
168	التطبيق على السلاسل الزمنية

## الفصل السابع

### مبادئ الاحتمالات

183	
185	تمهيد
185	التباديل
188	التوافيق
194	نظرية ذات الحدين
201	الاحتمالات البسيطة
205	الاحتمالات المركبة
206	قانون جمع الاحتمالات
207	جمع الاحتمالات للحوادث المانعة
208	جمع الاحتمالات للحوادث غير المانعة
209	قانون ضرب الاحتمالات
209	ضرب الاحتمالات للحوادث المستقلة
211	ضرب الاحتمالات للحوادث غير المستقلة
216	التوزيعات الاحتمالية
216	أولاً : توزيع ذو الحدين
224	ثانياً : توزيع بواسون

رقم الصفحة	الموضوع
225	ثالثاً : التوزيع الطبيعي
	الفصل الثامن
263	الأرقام القياسية
265	تمهيد
266	أنواع الأرقام القياسية
266	أولاً : الرقم القياسى البسيط
266	1- الرقم القياسى البسيط للأسعار
267	2- الرقم القياسى البسيط للكميات
267	3- الرقم القياسى البسيط للقيمة
269	ثانياً : الأرقام القياسية التجميعية البسيطة
269	أ- الرقم القياسى التجميعى للأسعار
270	ب- الرقم القياسى التجميعى المرجح
	1- الرقم القياسى المرجح بكمية سنة الأساس
270	(رقم لاسبير)
	2- الرقم القياسى المرجح بكمية سنة المقارنة
270	(رقم باش)
271	3- رقم دروبش وبالى القياسى
271	4- رقم فيشر القياسى المثالى
271	5- رقم مارشال وإدجورث
276	ثالثاً : المتوسطات البسيطة للمناسيب
276	1- الوسط الحسابى البسيط لمناسيب الأسعار
278	2- الوسط الهندسى البسيط لمناسيب الأسعار

رقم الصفحة	الموضوع
279	3- الوسط الحسابى للمناسيب المرجحة
282	اختبار الأرقام القياسية
282	أولاً : اختبار الانعكاس فى الزمن
283	ثانياً : اختبار الانعكاس فى المعامل
288	تغيير فترة الأساس
291	الأرقام القياسية للتجارة الخارجية
301	المراجع
303	مراجع باللغة العربية
303	مراجع باللغة الأجنبية
307	الملحق
309	الجداول الإحصائية
317	المحتويات

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رقم الإيداع : 2013/24053

الترقيم الدولي : 2-082-735-977-978

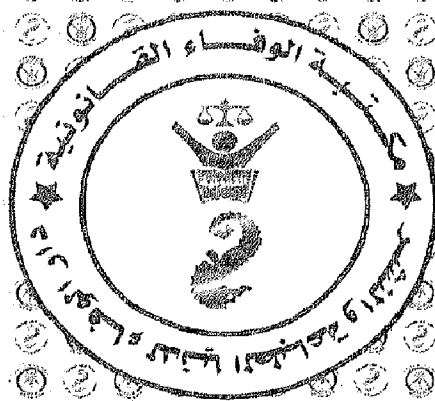
مع تحيات

دار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر

تليفاكس: 5404480 - الإسكندرية











### المؤلف

الدكتور / جابر أحمد بسيوني شحاته

أستاذ الإقتصاد الزراعي بكلية الزراعة (سابا باشا) - جامعة الإسكندرية

- تخرج من كلية الزراعة (سابا باشا) - جامعة الإسكندرية .
- تدرج من وظيفة معيد إلى وظيفة أستاذ بقسم الإقتصاد الزراعي ثم رئيساً لذات القسم بكلية الزراعة (سابا باشا) - جامعة الإسكندرية
- نشر له أكثر من ستين بحثاً محلياً وعالمياً في مجال التخصص .
- عضو اللجنة العلمية الدائمة لترقية أعضاء هيئة التدريس الاساتذة والاساتذة المساعدين تخصص الإقتصاد الزراعي والإرشاد والمجتمع الريفي .
- شارك في العديد من المؤتمرات والندوات العلمية المحلية والإقليمية والعالمية .
- ساهم في الإشراف علي ومناقشة العديد من رسائل الماجستير والدكتوراه محلياً وإقليمياً .
- قام بإعداد العديد من المؤلفات في مجال التخصص مثل :  
مبادئ الإقتصاد - التنمية الزراعية - الإحصاء التطبيقي  
نظرية الدوال والمعادلات التفاضلية - المصفوفات والمحددات ونظرية الاحتمالات  
الإتجاهات الحديثة في إدارة الجودة الشاملة - الإتجاهات المعاصرة في التسويق الزراعي  
وإدارة الجودة الشاملة .

### هذا الكتاب

يتناول الموضوعات التالية : التعريف بعلم الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى، ومراحل البحث الإحصائي، ومقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت، وتحليل الارتباط ، وتحليل الانحدار ، والتوزيعات الإحصائية ، ونظرية الاحتمالات، والأرقام القياسية .

### الناشر

دار الوفاء لدينا الطباعة والنشر  
٥٩ ش محمود صدقي منفرع من الميسوي سيدى بشر - الإسكندرية  
تليفاكس : ٥٤٠٤٤٨٠ / ٠٠٢٠٢ - الإسكندرية

ISBN:977-735-082-2



9 789777 350822