يقول راسل: " إن المبدأ الأسمى للفلسفة العلمية هو: ضرورة استبدال البناءات المنطقية حيثما أمكن بالكائنات المستنتجة".

Bertrand Russell : Mysticism and Logic and Other Essays (London ; Irwin, 1921, P 155.

إبستيمولوجيا المنطق الرياضي

مدخل: اقترن ظهور الإبستيمولوجيا منذ العصور الكلاسيكية بثورات العلوم، وكذا بنزوع العقل المستمر، لتحقيق النماء والتقدم الضروري لتحقيق حاجات الإنسان، وكذا لتفسير وفهم عوالم الكون. بما يؤول إلى تحقيق سعادة الإنسان. وقد تعددت وجهات واهتمامات العقل الناظر في مشكلات الإنسان والكون مستقريا ومحللا ما طاب له أن يحلل من مركبات اليسيرة منها والمستعصية نسبيا إلى حد كبير. ولا ريب أن ثورات الفكر الإبستيمولوجية انصبت حول دراسة قضايا ومشكلات العلوم المتعددة بينها المنطق الرياضي.

أولا/ من الفلسفة الرياضية إلى المنطق الرياضي:

01/ **الفلسفة الرياضية:** عندما تستحضر نصا أو خطابا يذكر فيه فيثاغورس وإقليدس وأفلاطون وطاليس وأرخميدس، فلا شك أنك ستحدس الحقيقة بشان موضع الخطاب، فتشير إلى تاريخ الرياضيات اليونانية. وإنك لتدرك حينها أن لليونان فضل يعتد به في تأسيس الفكر الرياضي، الذي يصطلح عليه أيضا بالفلسفة الرياضية. ولا ريب أن الرياضيات اليونانية لها من القدر والأثر ما يثير لدينا فضول العرفان بشأنها ومنزلتها بين فلسفات وعلوم عصرها. فقد " بيّن أفلاطون موقفه من الرياضة بيانا وافيا في 'الجمهورية' حيث قال: ' من المناسب إذن يا غلوكون أن ينص في قوانيننا على وجوب دراسة هذا الفرع من العلم. ويجب أن نحمل من يلي مناصب الدولة العليا على أن يدرس الحساب ويتمكن منه، لا كما يفعل الهواة، بل عليه أن يواصل دراسته حتى يصل إلى مرحلة تدبر طبيعة العدد بالتفكير البحت" [1]. وقد رغّب تلامذة أفلاطون بينهم 'أرسطو طاليس' في الاهتمام بمسائل المنطق لغرض تنظيم العمليات العقلية، ومنه إلى تمكين الفيلسوف والعالم من تنظيم المعارف وممارسة الاستنباط الصحيح، كذا دعا إلى إعمال الطريقة الاستقراء من جهة ما تمثل منطق العلوم التطبيقية، وقد نحا نحو أرسطو بيكون وآخرون. "ولقد كان المنطق منذ ظهوره فوق المسرح الفكري في اليونان عند أرسطو المدخل الضروري لتعلم كل أقسام الحكمة النظرية والعملية، أعني لتعلم العلوم المختلفة، التي كانت تشملها قديما كلمة الفلسفة، وسمي المنطق باعتباره مدخلا للحكمة باسم 'الآلة' Organon أو الصناعة Art التي يستند إليها الناظر في تلك الموضوعات لإتقان النظر و الاستدلال فيها"[2]. وقد نالت العلوم كما الفنون شرف البنية والاتساق في أبحاثها ونظرياتها عموما بفضل إدخال المنطق في مناهجها وأسسها وقيمها الصدقية. وقد ينظر إلى المنطق من جهة ما هو فن وعلم سواء. أما من جهة دلالته الفنية فقد عرف بأنه فن التفكير السوي. ومن حيث دلالته العلمية فالأرغانون يعني الأداة أو القانون أو المنهج، إذ يحتكم إلى مبادئ وقواعد وقوانين يحتكم إليها التفكير لبلوغ الصواب واليقين المعرفي. وقد تضمن ذلك مؤلفات أرسطو المنطقية. " عكف المشتغلون على أرسطو بتجميع

([1]) ـ جورج ساتون: تاريخ العلم، العلم القديم في العصر الذهبي لليونان، المركز القومي للترجمة، القاهرة، مصر، 2010،ج3، ص 83.

([2]) ـ محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، دار النهضة العربية، بيروت، لبنان، ط1، 1972، ص 13.

العديد من أعماله تحت عنوان "الأورغانون" ("الأداة")... حيث حدد قواعد وأشكال الاستدلالات ("القياس المنطقي")، خصوصا القياسات المنطقية الضرورية، والموضوعات والتفنيدات السفسطائية (أرسطو التي تتخذ من الشبهات والحجج التي تكون مقدماتها محتملة فقط.كان لهذه الأعمال الأولى في تاريخ المنطق تأثير كبير على الفلسفة والفكر العلمي بشكل عام. وبعد أكثر من ألفي عام، لا يزال كانط يعتقد أن أرسطو اكتشف كل ما يمكن معرفته في المنطق (و أكد مؤرخ المنطق في القرن التاسع عشر، كارل فون برانت، أن المنطقيين الذين أتوا بعد أرسطو، لم يضيفوا شيئًا "جديدًا" لما تضمنه منطق أرسطو، معتبرا إياهم مشوشون أو أغبياء أو منحرفون"[3].

وعموما نميز تاريخيا بين شكلين من أشكال الفلسفة الرياضية: فلسفة رياضية قديمة، وفلسفة رياضية حديثة. وقد تعرضنا بمختصر قراءة لفلسفة الرياضيات القديمة وقصرناها على فكر اليونان. أما الفلسفة الرياضية الحديثة، فابتدأ التأسيس لها على أعقاب محاولات الفلاسفة المحدثين لإرساء فكر رياضي ينزع إلى توثيقه بالعلم أكثر من محاولة وصله بالفلسفة، وقد أثمرت أولى المحاولات مع ديكارت وليبنتز وآخرون، إذ هموا بوصل الفكر الرياضي بالمنطق الرمزي. لذلك فإن موضوع الفلسفة الرياضية " نشأ وتطور مع نشأة المنطق الرمزي وتطوره، وهو مبحث في طبيعة العلوم الرياضية ومناهجها، ومعيار صحة نظرياتها، وهو أيضا مبحث في رد التصورات الرياضية الأساسية إلى تصورات منطقية بحتة، أو ردها جميعها إلى تصورات أكثر منها سبقا. فلسفة الرياضة مرتبطة بالمنطق من جهتين: أن التفكير في إقامة الأولى هو الذي أثار البحث في إقامة الثاني، وأن تطوير الثاني هو الذي ساعد على تدعيم الأولى"[4]. وخلال عقود من الزمن حصلت الانقلابات الثورية في الأنساق المنطقية لضرورات علمية بالأساس لتحدث وثبات أكثر تأثيرا على واقع العلم الرياضي، إذ صرفت النظر عن الفلسفة الرياضية لتؤسس لمنظومة المعارف المنطقية الرياضية. " تغير هذا الوضع جذريا مع ظهور المنطق الحديث الذي كان فضل اكتشافه بقدر كبير إلى عالم الرياضيات والفيلسوف الألماني جوتلوب فريجه (1848-1925)، بعد ذلك نال شرف التطور بفضل أعمال برتراند راسل وألفريد وايتهيد، ولودفيج فيتجنشتاين وآخرون. اكتشافات فريجه للمنطق الحديث كانت بالتوازي مع تطورات الأنساق الأساسية لشرودر بيرس، بيانو، دي مورغان، راسل، وايتهيد وما إلى ذلك، أصبح المنطق حجر الزاوية في الفلسفة والرياضيات... باعتباره فرعًا من فروع الرياضيات. لعب المنطق دورًا حاسمًا في تطور الرياضيات الحديثة إذ بلغت من الدقة لما م تعهده في القرون السابقة، هذه الصرامة تتجلى في استخدام الطريقة الأكسيومية المعممة تقريبا على جميع مجالات الرياضيات المعاصرة"[5].

([3]) - *Philipp Keller : Introduction à la logique La logique classique des propositions et des prédicats, Département de Philosophie, Université de Genève 2007, P 11.*

([4]) ـ محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي ونشأته، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، 1979، ص 15.

([5]) – *Ibid. P 72.*

02/ أهمية المنطق للفلسفة المعاصرة: أبدا لا يمكننا إغفال الأعمال الخالدة لعالم الرياضيات الألماني جوتلوب فريجه بشأن تطوير ثم بعث نظريات تؤسس لأنساق منطقية رياضية بالغة الأهمية في تاريخ الرياضيات المعاصرة. ولا شك أيضا أن أعمال فريجه ظلت إرثا معرفيا يرجع إليه المنطقيون الرياضيون حيث اقتضت الضرورة لتأصيل أبحاثهم ومطابقتها لنسق نظريات فريجة الأساسية المنطقية منها واللغوية. لذلك قيل: " ولدت الفلسفة المعاصرة في عام 1879 مع نشر كتاب "الإيديولوجية" لجوتلوب فريجه. في هذا العمل حاول عالم الرياضيات الألماني فريجه تطوير الأشكال الرمزية للغة، لإضفاء الطابع الرسمي على الرياضيات، ولهذا الغرض اخترع فريجه حساب المنطق المسند، وبالتالي إجراء ثورة في المنطق"[6]. وقد تزامنت الثورة الرياضية آنذاك مع ظهور ثورات حاسمة أخرى على صعيد فلسفة اللغة، تضمنت مدخلات الكشف المنطقي الرياضي الذي أثاره فريجه واشتغل عليه التحليليون بينهم برتراند راسل ولودفيج فتجنشتين وجورج مور وآخرون. ولعل الهمية والقيمة التي تحظى بها الرياضيات لا ترتد عليها وحسب، ولكن لها تأثير بين على الحقول المعرفية ذات الصلة بالعلوم النظرية منها والعملية، لأجل الإحاطة بمشكلاتها. " ثمة إشكاليات أنطولوجية تتعلق بموضوع تتعلق بموضوع الرياضيات: بأي شيء تتعلق؟ وثمة إشكاليات إبستيمولوجية: كيف نعرف الرياضيات؟ ما نهجها، وإلى أي حد يعد جدير بالثقة؟ أيضا ثمة إشكاليات المنطق والسيمانتكس: كيف تفهم لغات الرياضيات، كيف يتم تعلمها، تبليغها، إلخ؟... يتعين الإمكان الآخر في القول بأن الرياضيات ترتهن بالعقل والموضوعية، ربما عبر تبني رأي 'كانت' القائل ' إن الرياضيات تتعامل مع بنى مشتركة بين العقول البشرية'... يطرح كواين وبنتام فضلا عن آخرين مذهبا استنباطيا فرضيا في الإبستيمولوجيا الرياضية، تبدأ هذه الرؤية بملاحظة أن كل العلوم تقريبا مصاغة عبر حدود رياضية، وأنه لا يبدو أن ثمة بديلا لهذا. من ثمة فإن الرؤية مدلل عليها بقدر ما لدينا من شواهد على النظريات العلمية"[7].

وأيا كانت قراءات ووجهات نظر الفلاسفة حول قيمة الرياضيات ومنزلتها، فإن ما يجلي تميز النظرة القيمية التي نمنحها للفكر الرياضي إنما نستقريها من المنطق. وما تنوع الأنساق والبنيات في المنطق الرياضي إلا دليلا على تميز العلاقة الوثيقة بين المنطق والرياضيات.

تشديد راسل على وصل المنطق بالرياضيات أدركت أن الفيلسوف والمنطقي راسل قد اهتدى لدلالة الوصل المنطقية بينهما التي هي المنطق الرياضي، أو ما اصطلح عليه باللوجستيك (رد الرياضيات إلى أصول منطقية). ولا شك أن ثمة استمرارية لزومية تنبئنا عنها أبحاث الرياضيات والفلسفة الرياضية إذ تستوثق أنساقها وقيمها بقواعد ومعايير منطقية خالصة، موصولة بآليات الاستدلال والبرهان وقوانينهما. بل أضحى اليوم واقع الدراسات والأبحاث المنطقية مقصورا ـ في دوائر علمية وفلسفية خاصة ـ على قضايا المنطق الرياضي وحسب. ولا يعلم

([5]) – *Ibid. P15.*

([6]) ـ دليل أكسفورد للفلسفة، ج2 ،تر، نجيب الحصادي، المكتب الوطني للبحث والتطوير، الجماهيرية العربية الليبية، 2003، ص ص 427 - 428.

للمنطق الرياضي أثر أو تأثير على مناحي المعرفة إجمالا إلا من خلال تقدم صنائع العقل الرياضي، التي قعّد وأسس لها أعلام المنطق الرياضي الحديث والمعاصر.

ثانيا/ إبستيمية المنطق الرياضي في فلسفة أعلامه:

01/ ليبنتز G.w.Leibniz (1646 . 1716) أشهر فلاسفة عصره، تنوعت أعماله لتشكل في فلسفته موسوعة المعارف. كان له سبق التأسيس للمنطق الرمزي وقد عد رائدا له، وله أعمال في الميثافيزيقا والأخلاق واللاهوت والفيزيقا، عرض قراءات إرجاعية بناءة لمنطق أرسطو، وأبان عن ملاحظات وجيهة كانت دافعا لتأسيس المنطق الرمزي، وقد عرض ليبنتز لفكرتين مركزيتين في أبحاثه المنطقية: أولاهما: يمكن للمنطق أن يدرك التماثل التي هي عليه الهندسة الإقليدية من جهة الاقتداء بنسقها الاستنباطي، أي أن يتألف من قضايا نبرهن عليها بالاستنباط من مجموعة معطاة من التعريفات والمبادئ والمصادرات. وثانيهما: أن يتخذ المنطق علم الجبر نموذجا له من حيث لغته الرمزية، وكذا من جهة موضوعاته وقوامه معادلات وقوانين[8]. ولعل فرادة منطق راسل الموصولة بتاريخ المنطق، قد أبانت عن إنصافه لمنطق أرسطو وإعجابه به. "كان ليبنتز معجبا بالمنطق الأرسطي، قال عنه إنه ' من أروع ما اكتشفه العقل الإنساني' وأنه ' فن العصمة من الزلل مما يمكن تطويره إلى نوع من الرياضيات الكلية'. كان يرى ان القضية الحملية هي الصورة الرئيسية و الوحيدة للقضية... وبالرغم من تقديره للمنطق الأرسطي، كانت له مواقف عديدة يعدل بها ذلك المنطق، كإضافته إلى نظرية رد الأقيسة ما لم يرد عند مناطقة العصر الوسيط، وأنه لا يمكن رد كل أنواع الأقيسة الشرطية المتصلة والمنفصلة إلى أقيسة حملية"[(9)]. وقد عرض ليبنتز لوجهة نظر أقر فيها " إمكان النظر إلى الحدود نظر صنفية: ننظر إلى الحد نظرة من جهة المفهوم إذا حددنا معناه، وننظر إلى الحد نظرة صنفية أو من جهة الماصدق حين نعتبره صنفا من الأشياء يحوي أفرادا تندرج تحته"[(10)]. (للإطلاع لأجل الاستفادة أكثر عد إلى كتاب محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي ونشأته، ص ص 54 ـ 56).

02/ منطق رودلف كارناب: يعد رودلف كارناب أحد أبرز أعضاء حلقة فيينا، وهو رائد من رواد الفلسفة التحليلية. تتلمذ على يد المنطقي الفذ غوتلوب فريجه مثلما انكب على دراسة وتحليل نظرية راسل في المنطق

([8]) ـ محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي ونشأته ، ص 51.
([9]) ـ المرجع نفسه، ص 52.
([10]) ـ المرجع نفسه، ص54.

الرياضي، أدرك أهمية وضرورة التفكير الرياضي لإقامة أسس التفكير الفلسفي والعلمي وكذا المنطقي. عرض أهم أعماله المنطقية في كتابه: ' البناء المنطقي للعالم والمسائل الزائفة في الفلسفة' " الذي نشره عام 1927كشف من خلال دراسته أعمال برتراند راسل من جهة إلى الأهمية الأساسية للرياضيات في تشكيل نسق المعرفة، ومن جهة أخرى إلى خاصيته الصورية والمنطقية الخالصة، التي تقوم عليها استقلاليتها عن عرضية العالم الواقعي. تمثل هذه الرؤى أساسا لكتابي وهي الرؤى التي تطورت فيما بعد من خلال النقاشات ضمن حلقة فيينا لشليك وتحت تأثير أفكار فيتجينشتاين إلى نمط التفكير الموسوم ب حلقة فيينا"[11]. تأثر كارناب بأعمال فريجه وهوايتهد وراسل المنطقية فيما له صلة بنظرية مفهومية عامة للعلاقات وخصائصها البنيوية، مثلما اهتم بتبيان البنية المفهومية للرياضيات من خلال تعريف الأعداد والدالات العددية انطلاقا من مفاهيم منطقية خالصة. عرض في مقالات له النظرية الماصدقية بأن اقترح صيغة تقر أن أي عبارة غير ماصدقية قابلة للترجمة إلى عبارة باللغة الماصدقية مكافئة لها منطقيا... يرى رودلف كارناب شأنه في ذلك شان باقي الوضعيين المناطقة والفلاسفة التحليليين أن التحليل المنطقي للغة هو السبيل الوحيد للكشف عن المسائل الفلسفية وبالتالي حلّها، بمعنى أن مسائل الفلسفة والعلم تكمن في معنى العبارات، وحيث أن اللغة الطبيعية تتصف بالالتباس والغموض وجب اللجوء إلى اللغة الاصطناعية للمنطقيات والرياضيات"[12].

03/ ديمورغان ونظرية العلاقات: يعتبر أغسطس دي مورغان بحق رائدا من رواد المنطق الرمزي الحديث، ساهم إلى جانب المنطقيين الآخرين في وضع قواعد وأصول نظريات المنطق الرمزي بينها نظرية العلاقات، التي كان لها بالغ الأثر في تجاوز عقم نظرية العلاقات في المنطق التقليدي، مؤسسا لنسق جديد. " أغسطس دي مورغان A. De Morgan (1806 ـ 1871) أحد كبار الرياضيين والمناطقة الإنجليز في القرن التاسع عشر. كان أستاذ الرياضيات في جامعة لندن فيما بين 1828 و 1831، ثم أعيد إلى نفس الوظيفة عام 1836 وظل بها حتى 1866. كتابه المنطقي الأساسي هو المنطق الصوري: أو حساب الاستدلال الضروري والاحتمالي... كتب مقالات عديدة في المنطق والرياضيات نشرت في: 'منشورات جمعية كمبردج الفلسفية'... كان أحد أعضاء هذه الجمعية العاملين، كما كان عضوا في 'الجمعية الفلكية الملكية'"[13]. إذا كان لكل منطقي رياضي فضل على

([11]) . برتراند راسل: البناء المنطقي للعالم والمسائل الزائفة في الفلسفة، تر، يوسف تيبس، المنظمة العربية للترجمة، بيروت، لبنان، ط1، 2011، ص 36.

([12]) ـ المرجع نفسه، ص 38.

([13]) ـ محمود فهمي زيدان: **المنطق الرمزي ونشأته**، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، 1979، ص 65.

المنطق الرياضي من حيث إسهامه في تأسيسه أو تطويره، فإن " لدى ديمورغان الفضل في موضوعين رئيسيين في المنطق: إصلاحه للمنطق التقليدي، وإقامته مبادئ جديدة هي نظرية العلاقات. ولا بأس من إشارة سريعة إلى أهم تعديلاته على المنطق التقليدي. الحدود تدل على أصناف من الأشياء، لا على معان أو تصورات. ومن ثم كان دي مورغان يسمي الحدود 'حدودا صنفية'... رفض التصنيف الرباعي التقليدي للقضية الحملية وصنفها تصنيفا ثمانيا وفق نظرية كم المحمول. وضع القضايا في صورة رمزية ترمز حروف الهجاء فيها إلى الحدود"[14]. كما عرض لقواعد التقابل بين القضايا وقواعد الاستدلال المباشر بأشكاله وأضربه مستبدلا اللغة الطبيعية باللغة الرمزية وقد كان لـ دي مورغان موقف من القضية الحملية الأرسطية، معدلا في صيغتها القضوية الحملية إلى صيغة علائقية رمزية. حيث استبعد " اعتبار القضية الحملية الصورة الرئيسية والوحيدة لكل قضية، وإمكان رد أي صورة أخرى للقضية إلى الصورة الحملية... بل أضاف أنه يمكن رد القضية الحملية إلى قضية علاقة، وقد كان يعلم أنه بصدد منطق جديد، ومن ثم قال: ' ... وهنا تنبثق الفكرة العامة للعلاقة، ولأول مرة في تاريخ المعرفة، أمكننا وضع أفكار العلاقة وعلاقة العلاقة في صورة رمزية"[15].

ـ قانونا دي مورغان: " أ ـ العلاقات عند دي مورغان نوعان: علاقات من الدرجة الأولى وعلاقات من الدرجة الثانية. كلمات أب، ابن، قبل، بعد، أكبر من، أصغر من، يساوي، يشبه، يختلف، يعطي، يحب... إلخ أمثلة لعلاقات الدرجة الأولى، وتربط بين حدين أو أكثر. أما العلاقات من الدرجة الثانية فهي علاقات تجري على العلاقات السابقة، ويسميها دي مورغان 'علاقة العلاقة' ومن امثلتها علاقات العكس والسلب والتعدي والجمع والربط... مثل 'ابن عم صديق. ب ـ استطاع دي مورغان من دراسة الخواص السابقة للعلاقات أن يصل إلى نظرية هامة منطوقها: ' سلب جمع ما هو سلبي الحدين المجموعين، وسلب ربط ما هو جمع سلب الحدين المرتبطين"[16].

04/ **منطق راسل ووايتهد**: منطلقنا في المعرفة بملخص نظريتي راسل ووايتهد في المنطق الرياضي نتمثلها من خلال مضمون كتاب راسل برتراند (1872 ـ 1970م) برنكيبيا ماتيماتيكا الذي ألفه عام 1903م من جهة ما يمثل حلقة تالية لأعمال فريجه وبيبانو في تطور المنطق الرمزي، ويتضمن الكتاب قضيتين أساسيتين: تطوير

([14]) - المرجع نفسه، ص ص 66 ـ 67.

([15]) - المرجع نفسه، ص 67.

([16]) - المرجع نفسه، ص 71.

الاتجاه اللوجيستيكي، وتطوير المنطق الرمزي أكثر مما ذهب إليه فريجه وبيانو. كان راسل قد أحاط سلفا بالأعمال المنطقية لـ : ليبنتز وبول وبيرس وشرويدر وكانتور وبرادلي. والمنطق بنظر راسل لا يعدو أن يقتصر سوى على تعديل وتعميق وتطوير المنطق التقليدي، وقد رغب راسل في أن يكون المنطق أكثر صورية ورمزية مما بدا في منطق أرسطو، مثلما أراد أن يجعل منه نسقا استنباطيا. كما اهتم راسل لشأن نظريات منطقية على نهج ما تبناه فريجه وبيانو وبول. وشأن المنطق الرمزي أن يحلل القضايا ويصنفها، ويبني العلاقات ويدقق في حسابها ويستتبعها بتقعيد دوال الصدق بشأنها[17]. **يميز راسل في القضايا بين خمسة أصناف: قضية ذرية:** قضية معطاة مسلم بها، وهي أكثر القضايا بساطة. موضوع القضية الذرية هو الفردي أو الجزئي. مثل قولنا 'هذا أحمر' 'أ أكبر من ب' والقضية الذرية نوعان: شخصية نسند فيها صفة إلى شيء جزئي. وقضية علاقة تربط بين شيئين بعلاقة ما وإن شئنا أسميناها بالقضية الحملية. **ـ قضية مركبة:** لا تفهم إلا في صلتها بالثابت والمتغير ودالة الصدق. أما المتغير فقد يكون اسم علم أو إلى صنف أو إلى قضية أو إلى علاقة. نشير إلى المتغيرات بحروف معينة من لغة الهجاء. أما الثوابت فتشير إلى الروابط المنطقية أو العلاقات بين القضايا كالفصل والوصل مثلا. أما دالات الصدق فأربعة: (دالة تناقض، ودالة الربط، ودالة الفصل، ودالة التضمن) **ـ قضية عامة:** القضية العامة شرطية متصلة لا تقرر واقعا و لكنها لا تقرر شيئا. مثل 'كل إنسان فان' **ـ قضية عامة عمومية تامة:** يقصد بها القضية المنطقية التي تتضمن حقيقة منطقية، ويقصد بها على وجه الدقة القضايا الرياضية البحتة التي لا تحتوي غير حدود منطقية وحسب. مثال: إذا كان أ يتضمن ب وب يتضمن ج فإن أ يتضمن ج **ـ قضية وجودية**[18] .

ـ نظرية حساب القضايا: يرجع الفضل في التأسيس لها إلى فريجه وبيانو ، ويصطلح على النظرية كذلك بـ 'نظرية الاستنباط' و 'نظرية دالات الصدق' و 'نظرية تركيب القضايا' . موضوع نظرية حساب القضايا هو الاستنباط، الذي مادته الثوابت والمتغيرات ودالات الصدق[19].

ـ نظرية دالة القضية: يعرف راسل دالة القضية بقوله: " 'هي تعبير يحوي عنصرا أو أكثر غير محدد، بحيث حين نعطي قيمة لهذه العناصر يصبح التعبير قضية، دالة القضية بعبارة أخرى دالة قيمتها قضية'. 'هـ إنسان' دالة قضية لا قضية، ولا معنى لها بمفردها وليست صادقة ولا كاذبة، لكنها تكتسب معنى وتحتمل الصدق والكذب حين نعطي قيمة للمتغير : 'سقراط إنسان' قضية صادقة. بينما 'راسل طبيب' كاذبة" [20].

([17]) - المرجع نفسه، ص ص 171 ـ 172.
([18]) - المرجع نفسه، ص ص 178 ـ 180.
([19]) - المرجع نفسه، ص 203.
([20]) - المرجع نفسه، ص 221.

ـ **مجال قيم الدالة**: بإزاء كل دالة قضية يجب منح المتغير فيها قيمة ما ومجالات قيم الدالة ثلاثة: أن تكون القضية صادقة دائما ـ أن تكون القضية صادقة أحيانا ـ أن تكون القضية كاذبة دائما. وثمة نظريات أخرى عرض لها راسل مثل النظرية الوصفية في جانبيها المنطقي والمعرفي (الإبستيمي) والوصف قد يكون واضحا أو غامضا . والغامض ما تضمن في القضية من حد عام في صيغة نكرة. مثل: 'قابلت رجلا ما' أما الوصف المحدد فمعرف وتشير العبارة الوصفية فيه إلى شيء بعينه. مثل: الجزائر مستقلة.

نظرية حساب الأصناف: لها مستويين منطقي ورياضي. يرتبط الجانب الرياضي بتعريف العدد تعريفا منطقيا بحتا، برده إلى تصورات الصنف والعلاقة المشابهة. بينما يرتبط الثاني بما نصطلح عليه المفارقات أو التناقضات... يرجع الفضل إلى بول في تقديم أولى محاولة لإقامة المنطق الرمزي بالمعنى الدقيق، وإن كان قد اقتصر في جهده على إقامة مبادئ حساب الأصناف دون غيرها من نظريات ذلك المنطق"[21].

نظرية العلاقات: لنظرية العلاقات مستويين منطقي ورياضي. يتجلى المستوى الأول في رد العلاقات بين التصورات الرياضية إلى علاقات منطقية خالصة. وجدير بالذكر الإشارة إلى أن المنطق التقليدي لم يعرف هذا الشكل من العلاقات لذا فهي حديثة حداثة المنطق الرمزي. أول من أشار إليها دي مورغان حين درس بعض العلاقات بين الحدود كالهوية والتعدي والعكس والسلب، مثلما درس علاقات الربط والفصل بين تلك العلاقات. والعلاقات بنظر راسل تصنف بحسب أسس مختلفة نوجزها كالآتي: علاقات تماثلية ـ علاقات لاتماثلية علاقات بينية ـ علاقات ثنائية ـ علاقات ثلاثية ـ علاقات رباعية ـ علاقة واحد بواحد ـ علاقة واحد بكثير ـ علاقة كثير بواحد ـ علاقة كثير بكثير[22].

خاتمة: لا شك أن المنطق الرياضي إنما بلغ مستوى من التقدمية بفضل أعمال جهابذة المنطق الحديث والمعاصر ابتداء من أعمال ليبنتز وقد أضحت الفروق بيّنة بين المنطق التقليدي وبين المنطق الحديث الذي أبان عن خصوبته وقدرته على توقيع الانفتاح الضروري للفكر الرياضي على الأفكار والنظريات التي ما فتئت تعدل في مسارات المنطق والرياضيات في واصلية أنساقهما ونجاعة نظرياتهما التي بلغت بالمنطق الحديث مبلغا متميزا من حيث الصورانية والرمزية المستجدة.

([21]) ـ المرجع نفسه، ص 247.
([22]) ـ المرجع نفسه، ص ص 259 ـ 261.