تمارين محلولة

التمرين الأول

تعتقد شركة البريد والمواصلات أن دخلها الشهري من المكالمات الدولية قد تزايد بشكل واضح، ولتأكيد هذا الاعتقاد اختيرت عينة عشوائية تتكون من مئة سجل من سجلات زبائنها فوجد أن متوسط القسط الشهري المدفوع عن المكالمات الدولية يساوي 22.10 وحدة نقدية، فإذا كانت سجلات الشركة تشير إلى أن متوسط القسط الشهري الذي يدفعه الزبائن عن المكالمات الدولية هو 17.10 وحدة نقدية بتباين 450 هل تؤيد اعتقاد هذه الشركة عند مستوى المعنوية 0.01.

الحل:

ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل القسط الشهري الذي يدفعه الزبائن عن المكالمات الدولية.

$$X \sim N(\mu, 450)$$

نريد إجراء اختبار الفرضيات التالية:

$$H_0: \mu = 17.10$$
$$H_1: \mu > 17.10$$

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر H_0 صحيحة تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{22.1 - 17.10}{\frac{21.21}{\sqrt{100}}} = 2.35$$

عند مستوى المعنوية 0.01 وبما أن فرضية العدم ذات طرف فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.99} = 2.33$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفضها ونقبل الفرضية البديلة H_1 ومنه اعتقاد الشركة صحيح عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$.

التمرين الثاني

يعتقد ديوان الإسكان أن تكاليف بناء المساكن قد ارتفع في السنوات العشر الأخيرة بمقدار 15000 وحدة نقدية، وأن الانحراف المعياري لتكاليف البناء قبل عشر سنوات كان 4000 وحدة نقدية وقد ارتفع في السنوات العشر الأخيرة إلى 8000 وحدة نقدية، ولتأكيد هذا الاعتقاد اختيرت عينة عشوائية من 30 مسكن فوجد أن متوسط تكاليف بناءها قبل عشر سنوات هو 22875 وحدة نقدية ثم اختيرت عينة عشوائية من 25 مسكن تم بنائها حديثا فوجد أن متوسط تكاليف بنائها هو 40345 وحدة نقدية.

إذا اعتبرنا أن تكاليف البناء تتبع التوزيع الطبيعي فعلى ضوء هذه البيانات هل اعتقاد ديوان الإسكان صحيح عند مستوى المعنوية 0.05؟

الحل:

ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل تكاليف بناء المساكن الحديثة.

$$\mathrm{X} \backsim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1)$$

ليكن المتغير العشوائي Y_i يمثل تكاليف بناء المساكن قبل عشر سنوات.

$$\mathrm{Y} \backsim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2)$$

نريد إجراء اختبار الفرضيات التالية:

$$\mathrm{H}_0: \mu_1 - \mu_2 = 15000$$
$$\mathrm{H}_1: \mu_1 - \mu_2 > 15000$$

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$\mathrm{Z} = \frac{(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}}\,) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\mathrm{n}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\mathrm{n}_2}}} \backsim \mathrm{N}(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$\mathrm{Z}_0 = \frac{(40345 - 22875) - 15000}{\sqrt{\frac{8000^2}{25} + \frac{4000^2}{30}}} = 1.40$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات الطرف فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نستنتج أن ادعاء ديوان الاسكان صحيح عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$

التمرين الثالث

يدعيِ أحد المرشحين في الانتخابات أنه سيحصل على نسبة 70٪ من أصوات الناخبين عندما تجرى الانتخابات، ولاختبار هذا الادعاء تم اختيار عينة عشوائية من الناخبين حجمها 100 ناخب، ووجد أن نسبة من يؤيدون المرشح في العينة هي 60 ٪ .

المطلوب: اختبر مدى صحة ادعاء المرشح بأن النسبة في المجتمع هي 70٪ مقابل الفرض البديل أن النسبة أقل من 70٪ وذلك عند مستوى المعنوية 5 ٪.

الحل:

الصفة المدروسة هي تأييد المرشح في الانتخابات.

نريد اختبار الفرضيات التالية:

$$H_0: p = 07$$
$$H_1: p < 0.7$$

إحصاءة الاختبار هي:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{0.6 - 0.7}{\sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{100}}} = -2.18$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات الطرف فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 وبالتالي ادعاء المترشح غير صحيح.

التمرين الر ابع

ينتج معمل للأدوية نوعا من الدواء الفعال يحتوي على مادة فعالة يجب أن تكون محددة بشكل دقيق، وتدعي إدارة المعمل أن كمية المادة الفعالة المضافة إلى كل حبة من حبوب هذا الدواء تتبع

التوزيع الطبيعي بتباين 1.5. ولدراسة مدى دقة المصنع قام المسؤولون بتحليل عينة من 27 حبة فوجدوا أن الانحراف المعياري لكمية هذه المادة في الحبوب هي 1.3 ملغ.

- هل هذه النتائج تؤيد ادعاء الإدارة عند مستوى المعنوية 5٪؟

الحل:

ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل كمية المادة الفعالة المضافة إلى كل حبة.

نريد اختبار الفرضيات التالية:

$$H_0: \sigma^2 = 1.5$$
$$H_1: \sigma^2 \neq 1.5$$

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \lambda^2_{n-1}$$

وعندما نعتبر H_0 صحيحة تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$\lambda_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 29.29$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات الطرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \lambda^2{}_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \lambda^2{}_{0.975,19} = 41.9$$

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \lambda^2{}_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \lambda^2{}_{0.025,19} = 13.8$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 ، وبالتالي ادعاء الإدارة صحيح عند مستوى المعنوية 5٪ .

التمرين الخامس

أخذت عينتان مستقلتان من مجتمعين طبيعيين فكانت النتائج كما يلي:

	العينة الأولى	العينة الثانية
الحجم	8	9
الوسط الحسابي	17.4	13.2
التباين	16	22

المطلوب: اختبر الفرضية $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ مقابل الفرضية $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ عند مستوى المخاطرة 0.95.

الحل:

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} = 1.37$$

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow f_{1-\alpha,(n_1-1,n_2-1)} = f_{0.975,(8,7)} = 3.73$$

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow f_{\alpha,(n_1-1,n_2-1)} = f_{0.025,(8,7)} = 0.28$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة F_0 تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 ، وبالتالي لا يوجد فرق معنوي بين تبايني المجتمعين عند مستوى المعنوية 5٪ .