الـمـيـسـر

فـي الاحـتـمـالات و الإحـصـاء
دروس وتـطـبـيـقـات

الـجـزء الأول: الاحـتـمـالات و الـتـوزيـعـات الاحـتـمـالـيـة

بـوعـبـد الله صـالـح
أسـتـاذ مـسـاعـد بـكـلـيـة الـعـلـوم الاقـتـصـاديـة
جـامـعـة الـمـسـيـلـة

محتويات الفصل الأول

مقدمة

صممت هذه الدروس لتوافق بالدرجة الأولى برنامج مقياس "إحصاء 2" لطلبة كلية العلوم الاقتصادية؛ لذلك، ولتيسير المحتوى للطلبة، استخدمنا أمثلة مبسطة أغلبها مستقى من مجال اهتمام الطالب: من حياته ومحيطه أو من مجال اختصاصه في الاقتصاد والتجارة والتسيير. كما عززنا الأمثلة والشروحات برسوم بيانية تجسد الأفكار المجردة لكي يسهل استيعابها وعملنا على ربط المفاهيم والقواعد النظرية باستخداماتها التطبيقية كل ما أمكن ذلك. ولفتح آفاق الطالب على الطرق الإحصائية غير المبرمجة توسعنا في بعض التفاصيل من خلال ملاحق تأتي في آخر الفصل. ولقد قسمنا المحتوى إلى عشرة فصول، الخمسة الأولى منها لنظرية الاحتمالات والباقي للإحصاء الاستدلالي.

هذا ويفترض بالطالب أن يتمكن من استيعاب المفاهيم الرياضية بعموميتها ولا يبقي خياله حبيس الأمثلة والمسائل المعطاة. كما ينبغي الانتباه إلى أن عملية الفهم لا تتأتى بالتلقي لوحده ، فعملية التعلم تنبع من تفكير الإنسان وإعماله لعقله بتركيز وروية وصبر، وإذا كان من "وصفة سحرية" لتعلم هذه المادة، فهي المراجعة المتكررة "بجرعات" فورية (بعد كل محاضرة قبل النوم [1]!). وليعمل الطالب على تعميق فهمه من خلال التمارين، مستخدما في ذلك أكثر من مرجع، على أن لا يتخذ التمارين المحلولة نماذج جامدة أو قواعد إضافية للحفظ وإنما وسيلة لتوضيح المفاهيم والطرق النظرية.

وإذ نقدم لطلبتنا الأعزاء وزملائنا الكرام هذا العمل المتواضع، نهيب بهم أن لا يبخلوا علينا ب التنبيه لأي خطإ أو نقص، والله الموفق وهو يهدي السبيل.

نبذة تاريخية عن تطور علم الاحصاء[2]

"... وهكذا فإن البحث العلمي يتقدم عبر مراحل منفصلة ومستمرة من الحدس، التعصب، الإثارة والحمى ، إلى أن تتحقق الفرحة أخيرا ذات يوم سعيد ويتذوق طعمها من عاش تلك اللحظات الفريدة." ألبرت أينشتاين.[3]

تثبت الحفريات إستخدام الإنسان للعد والجرد منذ بدء الحضارة، وهذا يدل على المكانة المركزية للإحصاء بين فروع المعرفة الإنسانية. فيما يلي إطلالة على التطور التاريخي لهذا العلم معرفة وممارسة وذكر لبعض أبرز رواده.

الفترة ما قبل الميلاد إلى ما قبل القرن 19: منذ القدم استخدم الحكام والأمراء الإحصاء كوسيلة لإدارة المملكة أو المدينة أو المقاطعة، فاستخدموا الإحصاء لتعداد السكان وجرد وموارد الدولة ونفقاتها كما استخدم التجار الإحصاء لجرد السلع وتدوين الصفقات. في آثار بلاد ما بين النهرين، حيث ازدهرت الحضارة السومرية – خمسة آلاف إلى ألفي سنة قبل الميلاد – ووصلت قوافل تجارتها إلى إفريقيا وفارس، وجدت ألواح من الصلصال دونت عليها قوائم من السلع والأشخاص؛ فالبابليون الذين أنشؤا المعامل والبنوك وإليهم تنسب أولى مؤسسات التوصية البسيطة، عرفوا الكتابة والحساب، واستخدم الموظفون الكتابة لإحصاء

---

[1] يعلمنا علم نفس التربية أن أكثر من 60 بالمئة من المعلومات التي نتعلمها ننساها في التسع ساعات الأولى، فأنقذ معلوماتك في الساعات الأولى قبل أن تتبخر !

[2] أخذت معلومات هذه الفقرة من عدد من المراجع منها خاصة مرجعنا ج ج دروزبيك، أساسيات في الإحصاء، سلسلة (SMA)، دار (Ellips)، 1996، ص 2، و Microsoft ® Encarta ® 2006. © 1993-2005 Microsoft Corporation.

[3] من كتابه: كيف أرى العالم. ترجمه إلى الفرنسية ريجي هونريو، باريس، فلاماريون، 1979. عن موسوعة أونكارتا، المرجع السابق.

السلع في المخازن وأجور العاملين وسائر بيانات المؤسسة، بل استخدموا الرياضيات لحساب الفائدة المركبة. ولا عجب في ذلك، فقد أسست تلك الشعوب المتفرقة في دويلات صغيرة حول نهري دجلة والفرات أول إمبراطورية عظيمة في التاريخ عندما توحدت على يد ساراقون الأكادي سنة 2234 ق م، وتبنت نظاما اقتصاديا ليبيراليا ولا مركزيا سادت فيه الملكية الخاصة الصغيرة للأراضي وحرية التجارة والحرف.

الحفريات تدل أيضا على استخدام الحضارة المصرية (3000 سنة قبل الميلاد) للإحصاء من خلال تعداد السكان والجرد، فهذه الحضارة التي قامت على التسيير والتقسيم الدقيق ين لمياه النيل والأراضي الصالحة للزراعة المحيطة به، اتسمت إدارتها بالمركزية الشديدة وقد كان للمصريين القدامى مدارس يتعلم فيها الموظفون القراءة والكتابة والقوانين، وإليهم تنسب المقولة الشهيرة " لا اعتبار لأمر أو عقد ما لم يكتب". في هذا المناخ كان للجرد أهمية كبيرة كوسيلة للمراقبة، و في 1700 ق م في ضل الفرعون "أماسيس" شرعت عقوبة الإعدام لمن لا يمتثل لإعلان اسمه ومهنته ومصدر عيشه.

الصينيون القدامى (2000 سنة ق م) استخدموا الأرقام لحساب الإنتاج الزراعي في ضل الإمبراطور "ياو"، كما استخدم الجرد لدى جميع الحضارات القديمة الأخرى تقريبا، كالحضارة الهندية واليابانية واليونانية والرومانية، وكذا حضارة "الإنكا" في الساحل الغربي لأمريكا الجنوبية (ابتداء من القرن 12 إلى غاية 1572). في هذا العهد كان الإحصاء عبارة عن جرد للموارد والأفراد وأحيانا نظاما لتصنيف المعلومات.

في الإسلام، كان النبي –صلى الله عليه سلم– أول من أمر بتعداد المسلمين[1]، وذلك منذ فجر الدولة الإسلامية حين هاجر إلى المدينة. ثم تدفقت الثروة في عهد الخليفة الثالث عثمان بن عفان –رضي الله عنه– فأمر بالتدوين لإحصاء المستفيدين من عطايا بيت المال، وظلت هذه الوظيفة تتطور بعد ذلك مع الوقت تبعا لتعاظم الدولة مع الفتوحات. أما عن مساهمة المسلمين في علم الإحصاء فتجدر الإشارة إلى أعمال الكندي[2] في بغداد، عاصمة الدولة العباسية، حيث وصف كيفية استخدام طرق إحصائية (التحليل التكراري[3]) لتحليل الكتابات المعماة، وذلك في كتاب له أعيد اكتشافه في 1987 في أرشيف السليمانية للدولة العثمانية بإسطنبول[4]. كان هذا قرونا عدة قبل أعمال الغربيين في كلا الحقلين؛ الإحصاء وتحليل النصوص المعماة (cryptanalyse). كما تجدر الإشارة إلى سبق ابن خلدون إلى العناية العلمية بالعمران وربطه بنمو عدد السكان ونقصانهم. ومن إسهامات المسلمين في علم الإحصاء والاحتمالات عملهم على نظرية الأعداد (التوفيقات والترتيبات ...) حيث استخدمها جابر بن حيان في حل عدد من مسائل الرياضيات، واستخدم "الجزري" (1136- 1206) التحليل العددي في الصناعة، حيث كان أول من اخترع القفل الذي يفتح بكلمة سرية مكونة من الأرقام، وقد شرح اختراعه في كتابه الشهير "الحيل"[5].

في أوربا وجدت في العصر الوسيط القليل من عمليات الإحصاء، منها إحصاء أملاك الكنيسة في عهد ملك الامبراطوية الرومانية "شارلمان" في القرن الثامن، وإحصاء الأراضي الإنجليزية بأمر من "قيوم الأول" سنة 1086. أما في فرنسا فإن عمليات

---

[1] حديث: "أحصوا لي كم يلفظ الإسلام"، رواه مسلم.

[2] أبو يوسف يعقوب بن إسحاق الكندي (801-873 م)، ولد بالكوفة وعمل بدار الحكمة في بغداد في ضل ثلاثة خلفاء منهم المأمون.

[3] الكتاب بعنوان "رسالة في استخراج المعمى"، والتحليل التكراري analyse fréquentielle هي طريقة لفك النصوص المعماة (المشفرة) من خلال مقاربة تواتر كل حرف في النص المعمى مع تواتره في اللغة التي كتب بها، وقد اشار الكندي إلى مسألة مهمة هي ضرورة أن يكون النص المعمى طويلا كفاية لكي تنطبق عليه القوانين الإحصائي؛ هذه الفكرة هي غشارة مبكرة لقانون إحصائي غاية في الأهمية هو قانون الأعداد الكبيرة. عن الموسوعة الحرة لجمع المحتوى العربي، http://muhtawa.org/index.php/تاريخ_علم_الإحصاء ، أطلع عليه يوم 21-07-2010،

[4] عن موقع مجلة الحظارة الإسلامية لمركز الملك فيصل للبحوث والدراسات الإسلامية: http://www.icmgz.com/IC7.html ، أطلع عليه في 20-7-2010.

[5] الكتاب هو: "الجامع بين العلم والعمل النافع في صناعة الحيل"لبديع الزمان أبو العز الرزاز الملقب بالجزري.

التعداد ترجع إلى القرن الرابع عشر، الذي شهد ميلاد أول تسجيلات عقود الحالة المدنية وإجبارية تسجيل عقود الازدياد في عهد "فرنسوا الأول"، كما شهد القرن السابع عشر عمليات تحقيق كبرى في عهد عدد من الوزراء منهم خاصة أب الإدارة الفرنسية الوزير "كولبيرت".

على صعيد تطور علم الإحصاء، كان "قرانت" البريطاني (John GRAUNT: 1674 -1620)، قد عمل بتشجيع من صديقه بيتي (William PETTY)، على دراسة إحصائيات الوفيات، وأثمرت ملاحظاته عن بروز عدد من مفاهيم علم السكان؛ مثل الخصوبة و العمر المتوقع، كما قارن بين معدلات ولادة الإناث والذكور، وطور "جداول الحياة" و طريقة لتعداد السكان من خلال معطيات جانبية (عن عدد المساكن، عدد الوفيات...) تدعى "طريقة المضاعف"[1].

في ما يتعلق بتاريخ الاحتمالات، وعلى صعيد الممارسة، فقد استخدمت ألعاب الحظ في اتخاذ القرارات والقسمة والتنبؤ منذ القدم، ونجد أشارات على ذلك في القرآن الكريم، حين يروي قصة الاختصام في كفالة مريم وكيف آلت إلى زكريا – عليه السلام – بإلقاء الأقلام[2]، أو حين يحرم القمار (الميسر) وبعض الممارسات العربية الجاهلية (الأنصاب والأزلام)[3]. وقد وجدت رسومات في المقابر المصرية تدل على استخدام ألعاب الحظ تعود إلى 1800 سنة ق م، منها ما هو مشابه لألعاب معاصرة[4].

أما أول النتائج في نظرية الاحتمالات، فتعود إلى القرن الخامس عشر الميلادي، حيث كان لانتشار ألعاب القمار في أروبا دور كبير في جلب اهتمام عدد من العلماء إلى بعض المسائل الحسابية التي تطرحها هذه الألعاب التي كانت تمارسها البنوك. أولى النتائج المهمة في هذا الصدد تعود حسب "آيفازيان" [5] إلى "باسيولي" (Luca B. PACIOLI: 1445-1517) – الراهب والرياضي الإيطالي، وبالتحديد إلى كتابه المنشور سنة 1494(summa de arithmatica)[6] ، الذي ناقش فيه ألعاب الحظ. بعد ذلك جاء الفيلسوف والفلكي والرياضي "كاردانو" (Jérôme CARDANO: 1501-1576) في 1563، بكتابه "الحظ والألعاب" سرد فيه تجربته مع الألعاب (Liber de ludo aleae)، واحتوى على عدد من طرق الغش وكشف الغشاشين. غير أن قلة انتشار طباعة الكتب والأجواء الدينية السائدة التي لم تبار ك ألعاب القمار حالت دون انتشار هذه الكتابات.

في القرن السابع عشر اهتم العالم الفرنسي "باسكال" (Blaise PASCAL: 1662 - 1623) هو الآخر بألعاب البنوك على إثر سؤال طرح عليه من قبل أحد المقامرين المشهورين (Chevalier de Méré)، الذي بنا ثروة من ألعاب القمار، بالمراهنة على الحصول على الوجه 6 مرة على الأقل في أربع رميات لحجر النرد. هذا المراهن جرب بعد ذلك المراهنة على الحصول على مرتين الوجه 6 في 24 رمية، لكنه أخطأ في حساباته هذه المرة فخسر ثروته. باسكال إهتم بهذه المسألة الشهيرة، وتبادل رسائل في ذلك مع موظف الحكومة الفرنسية "فرما" (Pierre de FERMAT :1601-1665)، تناول فيها عددا من المسائل الرياضية المتعلقة بحظوظ اللاعبين ذكر في إحداها اكتشافه لهذا العلم الجديد (علم الاحتمالات) الذي أسماه "هندسة الحظ" (La géométrie du hasard). باسكال هو أيضا صاحب التعريف التقليدي للاحتمال (عدد الحالات

---

[1] الدافع الذي كان وراء أعمال تاجر القماش قرانت هو تكوين نظام لمراقبة وباء الطاعون الذي كان قد أتى في منتصف القرن الرابع عشر على أكثر من ثلث سكان أروبا، فيما يسمى بالموت الأسود. الوباء عاد مرارا إلى أروبا موديا باعداد هائلة إلى أن انقطع في القرن التاسع عشر.

[2] "ذلك من أنباء الغيب نوحيه إليك وما كنت لديهم إذ يلقون أقلامهم أيهم يكفل مريم وما كنت لديهم إ ذ يختصمون" الآية 44 من سورة آل عمران، والقرعة مشروعة في الإسلام وفي حديث عائشة: "كان رسول الله – صلى الله عليه وسلم – إذا أراد سفرا أقرع بين نسائه، فأيتهن خرج سهمها خرج بها معه." رواه البخاري ومسلم.

[3] "إنما الخمر والميسر والأنصاب والأزلام رجس من عمل الشيطان فاجتنبوه لعلكم تفلحون." الآية 90 من سورة المائدة.

[4] اللعبة المصرية سميت كلب الصيد وابن آوى واللعبة الحديثة هي الحيات والسلالم snakes and ladders.

[5] أيفازيان وآخرون، أساسيات النمذجة والمعالجة الأولية للبيانات، ترجمه من الروسية إلى الفرنسية جيلالي مبارك، دار "مير"، موسكو، 1986، ص 36.

[6] "الحوصلة في الحساب، الهندسة والنسب ..."، وهو ذاته الكتاب الذي نشر فيه أول مبادئ المحاسبة: مبدأ القيد المزدوج، المبدأ الذي يعود حسب بعض الدراسات الحديثة إلى الحظارة المصرية.

الملائمة على عدد الحالات الممكنة) وهو من شجع الفيزيائي، الرياضي والفلكي الهولندي المشهور "هايجان" (Christiann HUYGEN: 1629 – 1695)، على نشر كتابه "تفكير منطقي حول ألعاب النرد" سنة 1657، ثم تلاه العالم " جاك برنولي"[1] (Jacques BERNOULLI)، الذي ينسب إليه الغربيون السبق في التحليل العددي (التوفيقات والترتيبات والاحتمالات. كما تأتي في هذه الحقبة أعمال العالم البريطاني ذو الأصل الفرنسي "دو موافر" (Abraham DE MOIVRE: 1667-1754) الذي طبق الاحتمالات لحل العديد من المسائل، ومن أبرز أعماله كتاب نظرية الحظوظ (doctrine of chances) الذي نشر فيه النظرية المسماة باسمه لتقريب القانون الثنائي من القانون الطبيعي. كما تجدر الإشارة إلى فضل العالم الألماني "لايبنيتز" (Gottfried Wilhelm LEIBNIZ: 1716-1646) في مجال المتغيرة العشوائية المستمرة، والعالم "بايز" في الاحتمالات الشرطية.

في الفترة التي سبقت القرن التاسع عشر برز علماء كبار أمثال الفرنسي "لابلاس" (Pierre Simon Marquis de LAPLACE: 1749-1827) بكتابه: "النظرية التحليلية في الاحتمالات" (Théorie analytique des probabilités) الذي طبق فيه الاحتمالات في مجال الميكانيك ا والإحصاء، وكذا العالم الألماني الشهير "قوس" (Carl Freidrich GAUSSE: 1777-1855) صاحب "التوزيع الطبيعي" ذي الاستخدام الواسع في الإحصاء، والذي جاء من عمل العالمين – في القرن التاسع عشر – على قياس نسبة الخطأ في الحسابات الفلكية. في القرن التاسع عشر أيضا، ظهرت حسابات الارتباط "لقالتو" (GALTOU)، كما برزت أسماء مثل كتاي(Adolphe QUETLET)؛ الإحصائي البلجيكي الذي كان وراء عقد أول مؤتمر دولي في الإحصاء سنة 1853، والذي انتشر بعده استخدام الإحصاء في مجالات متعددة.

القرن العشرون: نظرية الاحتمالات كما نراها الآن، أي بصياغة رياضية ناضجة في شكل قوانين مبرهن عليها، إنما تبلورت في بداية القرن العشرين. من الأسماء التي برزت في مطلع هذا القرن، نجد من بريطانيا "بيرسون" (Karle PEARSON) ومن روسيا "كولموقوروف" و" ماركوف" (Andreï MARKOV) ومن فرنسا "بوريل" (Emil BOREL). في فترة لاحقة (1921 – 1932) درست مسائل التوقع، حيث كان "لفيشر" دور بارز. في الفترة الممتدة من 1933 إلى نهاية الحرب العالمية الثانية برزت اختبارات الفروض على يد "نايمان" (NEYMAN : 1894-1981) و"بيرسون" (Egon PEARSON) وبداية النظرية الحديثة للمعاينة "لنايمان"، بالإضافة إلى خطط التجارب "لفيشر". بداية من الخمسينات انتشرت الكتابات في مجال الإحصاء وبرزت نظرية التقدير وتحليل البيانات. وبالتدريج انتشر استخدام الإحصاء في الميادين المختلفة والعلوم التجريبية والإنسانية وزاد انتشاره جراء ظهور الإعلام الآلي الذي ذلل عقبة الحسابات الكثيرة التي يتطلبها استخدام الأسلوب الإحصائي في الدراسات.

تعريف علم الإحصاء

وردت كلمة الإحصاء مرات عدة في القرآن، وفي الحديث وردت بمعناها الحالي "أحصوا لي كم يلفظ الإسلام"، أما في الحضارة الغربية فالكلمة حديثة العهد نوعا ما، فهي تعود إلى 1746 حين استخدم "جوتنجن" (Göttingen, G. Achenwall) كلمة « statistik » مشتقا إياها من « staatskunde ». أما الأصل اللاتيني للكلمة فهو « status » ويعني الدولة[2].

---

[1] عائلة برنولي هي احدى العائلات البارزة في تاريخ العلوم، حيث تذكر الإسهامات المعتبرة لجون أخو جاك في التكاملات والتفاضل وكذا أعمال دانيال إبن جون في الهيدروديناميك.

[2] Jean-Claude Oriol : Formation à la statistique par la pratique d'enquêtes par questionnaires et la simulation, p 26, Thèse, http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00191166/fr/

من جهة أخرى، يعود أصل كلمة « hasard » إلى الكلمة العربية "زهر" ، حيث كانت تطبع على أحد أوجه النرد، قبل أن تدخل في اللغة الإسبانية بمسمى « azar » بمعنى لعبة النرد، ثم الفرنسية عبر الكلمتين « asart » ثم « hasard » بنفس المعنى الإسباني. وبقيت تكتب بذات الطريقة مع تغيير المعنى إلى أن استقرت على المعاني الحالية وهي الحظ والخطر وكل ما يحدث دون سبب ظاهر[1].

الانتشار الواسع لاستخدام الإحصاء دليل على قوة ومصداقية الطرق التي يوفرها هذا العلم، وإذا كان بطء تأقلم برامج الدراسة في التعليم الأساسي والثانوي قد حال دون تعليم كاف لتقنياته في هذه المراحل فإن الجامعات قد أدركت منذ فترة طويلة أهمية هذه الوسيلة ما جعل دراسة مقياسي الإحصاء والاحتمال مدرجين في مناهج جميع الشعب تقريبا.

يعرف علم الإحصاء بأنه العلم الذي يدرس كيفية جمع وعرض وتحليل البيانات بهدف الوصول إلى معلومات ذات دلالة بخصوص مجموعة من الأشخاص أو الأشياء. ويميز علماء الإحصاء بين الطرق المستخدمة في حالتي توفر البيانات عن المجتمع واقتصارها على عينة منه. يسمى فرع الإحصاء الذي يدرس الحالة الأولى الإحصاء الوصفي، بينما يسمى الفرع الثاني الإحصاء الاستدلالي أو التحليلي. ولأن التعميم على المجتمع انطلاقا من بيانات عينة يحتمل الصواب والخطأ، يتوجب استخدام نظرية الاحتمالات لحساب مصداقية الاستنتاجات المتوصل إليها، أو لمعرفة كمية البيانات التي يجب توفرها لكي يمكن الاعتماد على مثل تلك التحليلات.

الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستدلالي: يميز علماء الإحصاء بين عدة فروع لعلم الإحصاء منها فرعين أساسيين هما الإحصاء الوصفي والإحصاء الاستدلالي؛ فالأول يهتم بكيفية جمع البيانات وتلخيصها بمؤشرات وتحليلها وعرضها في جداول ورسوم بيانية؛ أما الثاني فيهتم بكيفية الاستدلال على خصائص مجتمع إحصائي ما، انطلاقا من بيانات مستخرجة من دراسة أجريت على جزء من هذا المجتمع. حسب "دومينيك سالفاتور" يختلف الإحصاء الوصفي عن الإحصاء الاستدلالي (Statistique Inductive): "فالأول يلخص، يحوصل ويحلل كما من المعطيات، أما الثاني فيسقط على الكل من خلال دراسة الجزء، الكل يسمى في هذه الحالة المجتمع ، والجزء يسمى العينة. صحة الإسقاط تتطلب إذا أن تكون العينة ممثلة وأن يكون احتمال الخطأ محسوبا"[2].

الإحصاء الرياضي والإحصاء التطبيقي: يمكن القول أن الإحصاء التطبيقي نضج تدريجيا واستقل عن "الإحصاء الرياضي" لما ارتبط هذا الأخير بالاحتمالات من جهة وتكاثرت الكتابات حول الطرق المستخدمة في مرحلة استثمار النموذج الرياضي الاحتمالي لتمثيل الظاهرة المدروسة من خلال البيانات الميدانية. وقد دافع "أيفازيان" عن ضرورة اعتبار الإحصاء التطبيقي كعلم مستقل عن "الإحصاء الرياضي"؛ علم له ميدانه الذي يختلف عن ميادين علوم سابقة مثل "تحليل البيانات" و"الاقتصاد القياسي". الإحصاء الرياضي حسب "أيفازيان" هو[3]: "منظومة من المفاهيم والطرق الرياضية التي تستخدم النماذج الاحتمالية، مخصصة لجمع وتنظيم وتفسير ومعالجة البيانات الإحصائية للخروج بنتائج ذات طابع علمي وتطبيقي." بينما يعرف الإحصاء التطبيقي بأنه: "مجموع الطرق الرياضية التي تهتم بكيفية جمع البيانات وكتابتها بطريقة منظمة ومعالجتها (باستخدام الحاسوب) من أجل عرضها بطريقة واضحة وسهلة واستخلاص النتائج العلمية والتطبيقية الملائمة[4].

---

[1] المرجع السابق.

[2] Salvator Dominick, Econométrie et statistique appliquée, cours et problèmes, Série Schaum, McGrow Hill, 1985, N. Y.

[3] الموسوعة السوفياتية، حسب أيفازيان وآخرون، 1986، ص 44.

[4] أيفازيان وآخرون، المرجع نفسه، ص 16.

حسب هذا العالم، يعنى الإحصاء الرياضي بمسألة الاختيار من بين النماذج الاحتمالية لأكثرها ملاءمة وتوافقا مع البيانات الإحصائية المجمعة عن الظاهرة المدروسة، إلا إذا تطلب الأمر بناء نموذج رياضي خاص. اتخاذ القرار حسب منطق الإحصاء الرياضي يعتمد على المزاوجة بين منطقين مختلفين ومنفصلين هما المنطق الرياضي الاحتمالي الذي يعتمد على نظرية الاحتمالات والمنطق الإحصائي الذي يستند إلى البيانات الإحصائية. لتفسير هذا التزاوج نأخذ المثال المبسط التالي، هب أن فردا ألقى قطعة نقدية 100 مرة، فكانت النتيجة 48 كتابة مقابل 52 صورة، نريد أن نتنبأ بنتيجة المرات المقبلة، هل ستكون الصورة أكثر ظهورا أم الكتابة . إذا استندنا إلى المنطق الرياضي الاحتمالي الصرف، و اعتمادا على فرضية أن القطعة النقدية متوازنة، فإن الوجهين لهما نفس الاحتمال في الظهور. أما حسب المنطق الإحصائي فإننا نتنبأ أن الصورة لها احتمال أكبر أن تظهر بما أنها ظهرت أكثر في المرات المائة السابقة (52 مرة). منطق الإحصاء الرياضي يزاوج بين النظرتين و يقضي بأن القطعة النقدية ربما ليست متوازنة، وهو يطرح السؤال التالي: هل تعتبر النتيجة الإحصائية المحصلة (52 صورة مقابل 48 كتابة) كافية للحكم، بدرجة ثقة معينة، أن القطعة غير متوازنة، أم لا؟ للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى حسابات نستخدم فيها التوزيعات الاحتمالية (الثنائي والطبيعي) ونظرية "موافر"-"لابلاس". إذا كانت الإجابة بنعم فسوف نراهن على ظهور الصورة، أما إذا كانت الإجابة بلا فسوف نقرر الامتناع عن الحكم لأن بيانات المائة رمية غير كافية ونتربص إلى أن نرى نتيجة عدد أكبر من الرميات، أو نجازف ونراهن على إحدى النتيجتين آخذين في الاعتبار أن احتمالات الصورة والكتابة إن لم تكن متساوية فهي متقاربة.

ملخص: إذا كانت أولى استعمالات الإحصاء ارتبطت بحاجة الأ مير لتنظيم الجباية والتجنيد فإن أولى الدراسات في حساب الاحتمالات (أصل الإحصاء الرياضي) ارتبطت أول الأمر بمسائل القمار كمجال جديد أثار فضول عدد من العلماء في أروبا القرن السابع عشر، منهم خاصة "باسكال" و"فيرمات" (1654). أما خلال القرن الثامن عشر فأبرز الإسهامات كانت أعمال "قوس" و"لابلاس" و"بايز". تطور الرياضيات في هذه الفترة مكن من الاستغناء بالاستقصاء عن عمليات التعداد المكلفة، لكن ذلك رفع تساؤلات جديدة عن الثقة في الاستقصاء وأحسن الطرق لاختيار عينة ممثلة وحجمها... القرن العشرون كان قرن "الانفجار الكبير" في العلوم وفي عدد سكان المعمورة، وبالتالي في الإحصاء. في البداية نضج علم الاحتمالات وغدا فرعا من الرياضيات ثم تفرع علم الإحصاء إلى علوم فرعية منها الإحصاء الرياضي الذي يدرس مسائل الاستقصاء من وجهة نظر رياضية، والإحصاء التطبيقي الذي يعنى بالجانب التطبيقي الميداني، كما برزت نظريات تحليل البيانات إلى أن أدت ثورة المعلومات وانتشار الإعلام الآلي في أواخر القرن إلى شيوع استخدام الإحصاء كأداة بحث في جميع فروع المعرفة تقريبا.

# الفصل 1.	مفاهيم أساسية في حساب الاحتمال

مفاهيم أساسية - الأساس الرياضي لحساب الاحتمال

علم حساب الاحتمال أو "هندسة الحظ"[1] – كما أسماه العالم الرياضي الفرنسي "بليز باسكال" – هو العلم الذي يمكن من حساب المخاطرة ومن ثم فهو يمكن صاحب القرار من اتخاذ قراراته على أساس منطقي في ضل معلومات غير مؤكدة وتوقعات بأحداث يطويها الغيب. تبوأت نظرية الاحتمالات مكانتها ضمن علم الرياضيات منذ بداية القرن الماضي، أما اليوم فلاستخداماتها المتعددة وقدرتها على تمثيل ودراسة الظواهر المختلفة تجعلها وسيلة حيوية بامتياز في شتى الاختصاصات.

في نهاية الفصل يفترض أن يصبح الطالب قادرا على تعريف الاحتمال والتعبير عنه رياضيا هندسيا – البسيط منه والمركب ، وكتابة القوانين الأساسية للاحتمال واستخدامها لحساب الاحتمالات.

1 1 مفاهيم أساسية

مفهوم التجربة، الحدث والمجموعة الأساسية
مفهوم الاحتمال
تعاكس، تنافي واستقلال الأحداث
التعريف التقليدي (تعريف باسكال) للاحتمال
تعريف الاحتمال كتكرار نسبي

1 1 1 التجربة العشوائية، الحدث العشوائي والمجموعة الأساسية

مبدئيا يمكن أن نعرف التجربة العشوائية في مجال الاحتمال على أنها عملية يترتب عنها واحد من مجموعة من النتائج أو الأحداث الممكنة. مثلا تجربة رمي مكعب نرد يترتب عنها إما الوجه 1 أو 2 أو 3، ...إلى 6، وتجربة إلقاء قطعة نقدية إما أن ينتج عنها الصورة أو الكتابة، ... نسمي مجموعة الأحداث الممكنة لتجربة ما **المجموعة الأساسية**، أو **فضاء الأحداث أو فضاء العينة**، ونرمز لها بالحرف اليوناني Ω. في المثال السابق – إلقاء حجر النرد– فإن المجموعة الأساسية يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

لاحظ. يختلف تفسير مفهوم التجربة، ومن ثم المجموعة الأساسية (الأحداث) المرتبطة بها، بحسب الهدف الذي نرمي إليه من التجربة: عند مشاهدة وحدة منتجة مسحوبة من مخزن ما، يمكن تصور أكثر من مجموعة أساسية بحسب ما نرمي إليه، فإذا كنا نهتم بمراقبة جودة المنتج فسيكون لدينا حدثين ممكنين، أي أن المجموعة الأساسية ستحتوي على عنصرين: "منتج صالح" و"منتج تالف"، أما إذا كنا نهتم بخاصية مثل نوع المنتج، فسيكون لدينا مجموعة محدودة تمثل الأنواع المتوفرة، مثلا "نوع أ"، "نوع ب"، نوع ج"، أما إذا كنا نهتم بمقياس مثل الوزن أو الطول، فإن المجموعة الأساسية تأخذ مدى مستمرا... كذلك قد تكون المجموعة الأساسية منتهية (finie) — إذا كانت تحوي عددا محدودا من العناصر– وقد تكون قابلة للعد (dénombrable) إذا كان يمكن

[1] في رسالة له إلى الأكاديمية الفرنسية نشرت سنة 1779، أنظر: ج ج دراوزبيك، 1997، ص 197.

التعبير عن عناصرها بالأرقام ., . . . ,n ,. . . ,2 ,1 وقد تكون مستمرة (continue) ؛ مثل وزن سلعة ما أو طول مسافة، أو المدة اللازمة لإنجاز عمل...

من تعريف التجربة يتضح أن الحدث العشوائي (événement) هو نتيجة (issue) لتجربة عشوائية، إذ أن كل تجربة عشوائية يترتب عنها تحقيق حدث عشوائي[1] (نتيجة) من بين مجموعة من نتائج ممكنة تسمى المجموعة الأساسية.

نعبر عن الحدث العشوائي [2] بمجموعة جزئية من المجموعة الأساسية Ω، هذه المجموعة الجزئية تحتوي على عنصر واحد (بالنسبة **للحدث البسيط أو الأولي**) أو عدة عناصر (بالنسبة **للحدث المركب**)، أو بمجموعة خالية (بالنسبة للحدث المستحيل)، أو ب Ω نفسها (بالنسبة للحدث الأكيد). يعرف الحدث المركب بأنه الحدث الذي يقع إذا تحقق واحد أو أكثر من الأحداث البسيطة التي تكون المجوعة الجزئية التي يمثلها، ونعرف الحدث المؤكد بأنه الحدث المحقق دوما.

مثال: في تجربة رمي مكعب نرد، العنصر 5 يمثل الحدث العشوائي: "استقرار مكعب النرد على الوجه 5"، ونقول عن هذا الحدث أنه حدث بسيط، في المقابل، المجموعة الجزئية: {4, 5, 6} تمثل حدثا مركبا هو الحدث "استقرار مكعب النرد على الوجه 4 أو 5 أو 6، ويسمى حدثا مركبا لأنه يتحقق بأكثر من طريقة، إذ يحقق بواحد أو أكثر من الأحداث التي تحتويها مجموعة جزئية.

1 1 2 احتمال الحدث العشوائي

في لغتنا اليومية، عندما نرغب في التعبير عن فرصة وقوع حدث [3] ما، يحدث أن نستخدم الأرقام في شكل سلم من 0 إلى 1، فنستخدم عبارات مثل: 100% للحدث المؤكد و1% مثلا للحدث المستبعد.

مثال. احتمال الحصول على صورة عند إلقاء قطعة نقدية هو ½، احتمال الحصول على الوجه " 6" عند إلقاء حجر نرد هو 1/6.

مما سبق نستنتج أن :

- الاحتمال هو عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.

لاحظ أنه يمكن إضافة خاصية ثالثة تستنتج بديهيا من الخاصيتين السالفتين وهي أن الاحتمال يكون محصورا بين 0 و1. أي أنه لا يمكن أن يكون سالبا ولا أن يكون أكبر من الواحد.

1 1 3 تعاكس، تنافي واستقلال الأحداث

لتوضيح هذه المفاهيم نعرض القواعد الأساسية التالية:

[1] كلمة حدث عشوائي لا تعني أن الحدث لا يخضع لأي قانون. في الحقيقة أحد التعريفات للحدث العشوائي هي أنه نتيجة تخضع لعدد كبير جدا من القوانين بحيث لا يمكن التنبؤ بنتيجة تفاعلها. نعتبر وقوع 3 حوادث بالضبط في مدينة ما في أسبوع معين حدثا عشوائيا لكن لا يعني ذلك أن حوادث المرور لا تتحكم فيها أي قوانين طبيعية أو عوامل موضوعية.

[2] سوف نقتصر في هذا الفصل على دراسة التجربة ذات المجموعة الأساسية القابلة للعد دون المستمرة.

[3] كثيرا ما يخلط الطالب غير المتمرس بين مفهومي "الاحتمال" و"الحدث"، فنسمع من يقول مثلا: إن هذا احتمال نادر، أو يقول: إذا ألقينا قطعة نرد فهناك عدة احتمالات للنتيجة هي 1، 2، 3 ... والصحيح أن يقول إن هذا حدث نادر (احتماله ضعيف)، وإذا ألقينا قطعة نرد فإن هناك عدة حالات ممكنة (أو نتائج ممكنة). لأن الاحتمال هو عدد، يطبق عليه ما يطبق على الأعداد من جداء وقسمة وجمع وطرح، لكن ذلك لا ينطبق على الحدث، فهذا الأخير هو بمثابة المجموعة ومن ثم ما يطبق عليه من عمليات هي التقاطع، الاتحاد، المتممة، ...

- **إحتمال حدث يساوي الواحد مطروحا منه احتمال الحدث المعاكس له**. مثلا؛ احتمال تأهل الجزائر في المقابلة مع مصر يساوي الواحد ناقصا إحتمال الإقصاء. **يقال عن حدثان أنهما متعاكسان إذا كان عدم تحقق أحدهما يعني بالضرورة تحقق الآخر** (بعد المقابلة: عدم التأهل يعني بالضرورة الإقصاء، عدم الإقصاء يعني بالضرورة التأهل).

مثال: الحصول على الوجه اثنان عند إلقاء حجر نرد ليس معاكسا للحصول على الوجه ثلاثة، لأن عدم الحصول على الوجه اثنان لايعني الحصول على الوجه ثلاثة.

- **احتمال تحقق أحد حدثين ما يساوي مجموع احتمالي الحدثين إذا كانا متنافيين**. مثلا؛ احتمال التأهل يساوي احتمال الفوز زائدا احتمال التعادل (نفترض أن الخسارة فقط تعني الإقصاء). نقول عن حدثان أنهما متنافيان إذا كان تحقق أحدهما يعني عدم تحقق الآخر.

مثال: الحصول على الوجه اثنان عند إلقاء حجر نرد منافي للحصول على الوجه ثلاثة، لأن الحصول على الوجه اثنان يعني عدم الحصول على الوجه ثلاثة. كذلك الحصول على عدد فردي منافي للحصول على عدد زوجي، والفوز منافي للتعادل والفوز منافي للإقصاء، لكن التعادل غير مناف للتأهل والحصول على عدد أولي ليس منافيا للحصول على عدد فردي. **الحدثان المتعاكسان هما بالضرورة متنافيان لكن العكس ليس صحيحا**.

- احتمال تحقق حدثان معا يساوي جداء احتماليهما إذا كانا مستقلين. مثلا احتمال تساقط الأمطار في سيدني و(مع) فوز الفريق الجزائري في القاهرة يساوي احتمال تساقط الأمطار في سيدني مضروبا في احتمال فوز الفريق الجزائري في القاهرة.

1-1-4 التعريف التقليدي للاحتمال

عرف الفيلسوف والرياضي الفرنسي "باسكال" (Blaise Pascal, 1623) الاحتمال بالشكل التالي:

> "احتمال حدث هو عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث مقسوما على عدد الحالات الممكنة، إذا افترضنا أن كل الحالات لها نفس الحظوظ في الوقوع."[1]

مثال: ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي قطعة نرد؟ بين كل من التجربة، الحدث والاحتمال في هذا المثال.

الجواب: هناك ثلاث حالات ملائمة للحصول على عدد زوجي (2، 4 و6). أما العدد الكلي للحالات الممكنة فهو 6: (1، 2، 3، 4، 5، 6). **وبافتراض أن كل الحالات الممكنة لها نفس الاحتمال** فإن احتمال الحصول على عدد زوجي هو $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

لاحظ أنه لم نكن لنستخدم هذه العلاقة لو لم تكن احتمالات الحالات متساوية.

مثال2. صندوق به 7 كريات منها 5 حمراء. نسحب 3 كريات معا. ما هو احتمال أن تكون كلها حمراء ؟ بين كل من التجربة والحدث في هذا المثال.

[1] ريجينالد لافوا 1981، ص 2 و3.

الحل: عدد الحالات الملائمة C_5^3 وعدد الحالات الممكنة: C_7^3. إذا الاحتمال هو $\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}$. التجربة هي السحب من الصندوق، الحدث أو النتيجة هي الحصول على ...

مثال3. نسحب بالقرعة إسما واحدا من فوج مكون من 10 طلبة.

- ما هو احتمال أن يكون الطالب أحمد؟ بين كلا من التجربة والحدث.
- نسحب (بدون إعادة) عينة من 3 أسماء من العشرة. ما هو احتمال أن يكون منهم الطالب أحمد؟

الحل: 1) احتمال الحدث الأول أو النتيجة الأولى هي $\frac{1}{10}$،

2) عدد الطرق الممكنة للعينة: C_{10}^3، عدد الحالات الملائمة لكي يكون أحمد في العينة:

$$C_{10-1}^{3-1}=C_9^2 \qquad C_n^x=\frac{n!}{(n-x)!x!}\Rightarrow C_9^2=36$$

الاحتمال هو إذا:

$$\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{10(9)(8)/3}=\frac{36}{240}=\frac{3}{20}$$

التجربة هي السحب، النتيجة أو الحدث هي أن يكون الطالب أحمد ...

مثال 4. يتنافس أربعة عدائين كل يريد الحصول على ترتيب أفضل من زملائه في كل من ثلاث سباقات تصفوية مرشحة للألومبياد، بفرض أن حظوظ العدائين متساوية في هذه التصفيات وبفرض أن هناك دائما فارق زمني بين العدائين (لا يحصل عدائين على نفس المرتبة في سباق) ، أحسب احتمال: أن يفوز العداء أحمد بأفضل مرتبة (بالمقارنة مع زملائه) في السباقات الثلاث؟ أحسب احتمال أن يفوز عداء ما – أيا كان – بأفضل رتبة في السباقات الثلاث؟

الجواب:

1) هناك أربعة عدائين، إذا أربع حالات لنتيجة السباق الأول، ثم أربع حالات للثاني وأربع للثالث. كل حالة من الأربع الأولى يمكن أن توافق أيا من الأربع الأخرى، إذا بالنسبة للسباقين هناك 4 × 4 حالات، وبالنسبة للسباقات الثلاث هناك 4×4×4 أي 4^3 = 64 حالة ممكنة . احتمال فوز أحمد بأعلى مرتبة في السباقات يساوي عدد الحالات الملائمة (1) مقسوما على 64 ما يساوي 0.0156.

احتمال أن يفوز نفس العداء في المسابقات الثلاث هو 4 ÷ 64 = 0.0625.

1 1 5 تعريف الاحتمال كتكرار نسبي

تعريف الاحتمال بالاعتماد على مفهوم التكرار النسبي أكثر شمولية من تعريف باسكال فهذا الأخير يصلح فقط في حالة تساوي احتمالات النتائج الممكنة.

ليكن لدينا الحدث a مرتبط بتجربة ما (مثلا الحصول على الوجه 6 عند إلقاء حجر نرد). نكرر التجربة n مرة ونسمي π عدد مرات تحقق a مقسوما على n أي التكرار النسبي. كلما كان n كبيرا سيؤول π إلى قيمة ما نظرية p . هذه القيمة هي التي نعرفها بأنها احتمال تحقق الحدث a.

مثال. إذا كررنا رمي قطعة نقدية، وسجلنا في كل مرة نسبة مرات الحصول على الصورة فإن هذه النسبة تقترب بالتدريج من القيمة 0.5 كلما نزيد عدد التجارب. هذه الخاصية تعبر عنها نظرية الأعداد الكبيرة "لجاك برنولي".

عيب هذا التعريف، أنه لا يكون صالحا إذا كانت التجربة غير قابلة للتكرار. التعريف الذي يتلافى هذه المحددات هو التعريف الحديث لكونه يعتمد على مجموعة من المسلمات دون افتراض شروط معينة مرتبطة بالتجربة (المبحث الثاني).

1 2 الأساس الرياضي لحساب الاحتمالات

إستخدام نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث
التعبير الهندسي عن الأحداث والاحتمالات
التعريف الحديث للاحتمال
الاحتمال السببي أوقانون "بايز"

نستخدم الترميز من أجل التوصل إلى تعبير دقيق وواضح عن أي مسألة، وبالنسبة لنظرية الاحتمالات فقد اكتسبت من استخدامها لغة الرموز الرياضية – مع بداية القرن الماضي – الدقة والعمومية التي كانت تنقصها من قبل.

1 2 1 استخدام نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية

تستخدم نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية، ويمكن تبيان ذلك من خلال البنود التالية:

1) نعبر عن النتائج الممكنة لتجربة ما بمجموعة يرمز لها عادة ب Ω، وتسمى فضاء العينة أو المجموعة الكلية أو الأساسية. إذا كانت المجموعة الأساسية محدودة يمكن كتابتها كما يلي $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ حيث تسمى العناصر a_i عينات. بهذه الطريقة يمكننا استخراج جميع الأحداث من خلال مجموعات جزئية من Ω وتصبح مجموعة أجزاء Ω هي مجموعة الأحداث المترتبة عن التجربة.
2) إذا كانت احتمالات العناصر المكونة ل Ω متساوية الاحتمال نقول عن فضاء العينة أنه فضاء منتظم.
3) نعبر عن الحدث بمجوعة جزئية من فضاء العينة ويمكن[1] اعتبار كل مجموعة جزئية من Ω حدثا.
4) يتحقق الحدث A إذا انتهت التجربة بنتيجة تمثل عنصرا من المجموعة الجزئية A.
5) إذا كانت المجموعة الجزئية A ذات عنصر وحيد نقول أن A حدث أولي أو بسيط. إذا كنت تحتوي على عنصرين أو أكثر نقول عن الحدث أنه مركب، ويعني ذلك أنه يتحقق بأكثر من طريقة.
6) من بين المجموعات الجزئية المجموعة Ω نفسها وتمثل الحدث الأكيد، لأنه لابد أن يتحقق أحد عناصرها على الأقل والمجموعة Φ وتمثل الحدث المستحيل.
7) بتطبيق عمليات مثل الإتحاد والتقاطع، الطرح، الجمع ...، على المجموعات نحصل على مجموعات جديدة جزئية من Ω ومن ثم أحداث جديدة في Ω . من ذلك:
   - عملية الاتحاد: فالمجموعة $A\cup B$ تعبر عن الحدث الذي يقع إذا وقع A أو B أو كلاهما لأن عناصرها إما تحقق A (موجودة فيها) أو تحقق B، أو تحققهما معا.

[1] إلا إذا كانت المجموعة Ω غير منتهية وغير قابلة للعد، مثلا مساحة أو زمن تقع فيها أحداث ما؛ لاعتبارات رياضية، لا يمكن اعتبار بعض المجموعات الجزئية أحداثا. في هذه الحالة يكفي أن نقسم فضاء العينة إلى أقسام (classes)، أي إلى مجموعات متنافية يكون اتحادها مساويا لفضاء العينة.

- عملية التقاطع: فالمجموعة $A \cap B$ تعبر عن الحدث الذي يقع إذا وقع A وB في وقت معا لأن عناصر $A \cap B$ تحقق A وتحقق B. إذا كان $A \cap B = \Phi$ نقول عن A وB أنهما متنافيان؛ أي لا يمكن تحققهما معا والعكس صحيح.
- عملية الفرق: $A - B$ تعطي الحدث "A لكن ليس B"، ونكتب أيضا $A \backslash B$، وتسمى هذه المجموعة "**المكمل النسبي** ل B بالنسبة ل A"، حيث تحتوي على العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B.
- عملية الإكمال المطلق: الحدث المعاكس ل A يرمز له ب 'A، أو أيضا $\bar{A}$ ، ويعبر عنه بالمجموعة C_A التي تحتوي على جميع عناصر Ω التي لا تنتمي إلى A، وتسمى أيضا بالمكمل المطلق ل A.

مثال1. لتكن لدينا تجربة هي إلقاء مكعب نرد. 1) أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عمليا عن الأحداث التالية:

الحدث A: الحصول على العدد 6 (حدث بسيط) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{6\}$

الحدث B: الحصول على عدد زوجي $B = \{2, 4, 6\}$

الحدث C: الحصول على عدد أولي $C = \{2, 3, 5\}$

الحدث D: الحصول على عدد فردي $D = \{1, 3, 5\}$

الحدث الحصول على عدد زوجي أو أولي: $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

الحدث الحصول على عدد زوجي وأولي: $B \cap C = \{2\}$

الحدث الحصول على عدد غير الوجه ستة: $A' = C_A = \Omega - A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2) من بين الأحداث المعبر عنها ما هي تلك المتعاكسة؟ هل الحدثان B و A متنافيان؟

الحدث D هو حدث معاكس ل B لأن: $B' = C_B = \Omega - B = D$ (و B معاكس ل A).

الحدثان B و A ليسا متنافيان لأن $A \cap B \neq \Phi$

الحدث الحصول على عدد زوجي لكن ليس أولي: $B - C = \{4, 6\}$

مثال2: لتكن لدينا تجربة هي رمي قطعتين نقديتين على التوالي. 1) عبر بمجموعات عن الأحداث التالية:

الحدث A : الحصول على مرتين كتابة (حدث بسيط) $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$, $A = \{PP\}$

الحدث B : الحصول على كتابة مرة واحدة $B = \{FP, PF\}$

الحدث C : الحصول على كتابة في الرمية الأولى $C = \{PF, PP\}$

الحدث D : الحصول على الكتابة مرة على الأكثر $D = \{PF, FP, FF\}$

2) هل الحدثان A و B متنافيان؟ هل هما متعاكسان؟

نعم هما متنافيان لأن: $A \cap B = \Phi$ لكنهما غير متعاكسان لأن B تختلف عن 'A :

$A' = \Omega - A = \{PF, FP, FF\}$

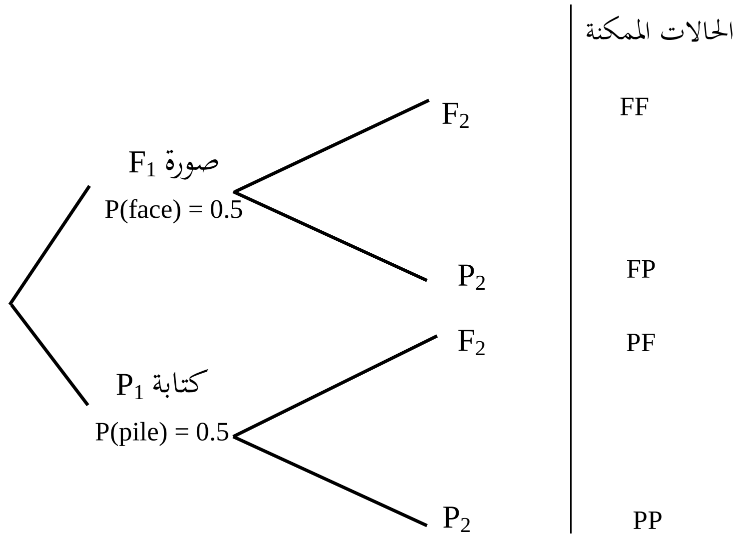
3) هل الحدثان A و D متعاكسان؟ هل هما متنافيان؟

الحدثان A و D متعاكسان لأن: $A' = D$ ومن ثم فهما بالضرورة متنافيان.

1 2 2 التعبير الهندسي عن الأحداث والاحتمالات

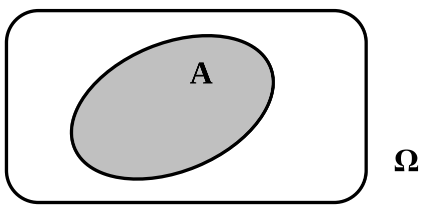
يمكن التعبير عن الأحداث والاحتمالات هندسيا من خلال **الشجرة البيانية** أو **مخطط فين**[1] (diagramme de Venn).
تبين الشجرة البيانية الأحداث المتنافية التي تنتج عن التجربة الواحدة أو المكررة، حيث تمثل الأحداث (النتائج الممكنة) على أغصان تتفرع من أصل . يراعى في رسم الشجرة البيانية أن يكون مجموع احتمالات كل تفريعة يساوي الواحد. التفريعة هي مجموعة أغصان تنطلق من ذات النقطة، وهي بمثابة شجرة فرعية لكونها تمثل النتائج المحتملة لتجربة جزئية.

مثال. نلقي قطعة نقدية مرتين . أرسم شجرة الاحتمال (الشجرة البيانية) مبينا عليها الأحداث، أحسب احتمال الحصول على الصورة في الرمية الثانية.



$P(F_2) = P(FF \vee PF) = 2(0.25) = 0.5$

يمكن أيضا التعبير عن الأحداث والاحتمالات هندسيا من خلال مخطط "فين" (diagramme de Venn). يستخد مخطط فين دوائر لتمثيل الأحداث الفرعية، ويستخدم مستطيلا يشمل هذه الدوائر لتمثيل المجموعة الأساسية.



رسم 1 . مخطط "فين" (Diagramme de

1 2 3 التعريف الحديث للاحتمال

يستند التعريف الحديث للاحتمال على مجموعة من الافتراضات غير المبرهنة (مسلمات) . يتم انطلاقا من هذه المسلمات البرهنة على مجموعة من النظريات بخصوص حساب الاحتمال.

[1] باسم العالم الانجليزي (John Venn : 1834-1923)

نفترض أن Ω هي فضاء معاينة و E مجموعة أجزائها. نعرف في E الدالة P(A) ، حيث P(A) احتمال وقوع الحدث A إذا تحققت المسلمات التالية.

1. أيا كان الحدث A فإن $0 \le P(A) \le 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. إذا كان A و B حدثان متنافيان فإن

$$P(AUB) = P(A) + P(B)$$

ويمكن التعميم انطلاقا من هذه المسلمة على حالة عدد أكبر – لكن محدود – من الأحداث المتنافية مثنى مثنى:

$$P(A_1UA_2U\ldots UA_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

4. إذا كانت A_1، A_2، . . . متتابعة من الأحداث المتنافية مثنى مثنى فإن

$$P(A_1UA_2U\ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

بناءا على المسلمات السالفة الذكر يمكن البرهان على مجموعة من النظريات بخصوص حساب الاحتمالات.

نظرية 1. (احتمال الحدث المستحيل)

إذا كانت Φ مجموعة خالية فإن $\mathbf{P(\Phi) = 0}$

البرهان: من أجل أي مجموعة A فإن الحدثان A و Φ متنافيان ومنه (حسب المسلمة 3) فإن

$$\mathbf{P(AU\Phi) = P(A) + P(\Phi)}$$

و بما أن $AU\Phi = A$ فإن $P(AU\Phi) = P(A)$ وبالنظر إلى المعادلة أعلاه نستنتج أن $P(\Phi) = 0$.

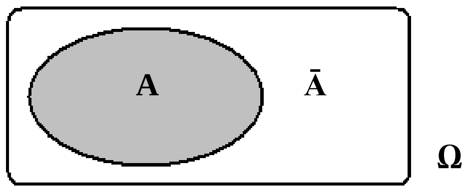
نظرية 2. (احتمال الحدث المعاكس)

$$\mathbf{P(\bar{A}) + P(A) = 1 \ , P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

البرهان: لدينا $AU\bar{A} = \Omega$ ومنه، حسب المسلمة 2، فإن $P(AU\bar{A}) = 1$ ومن المسلمة 3 نجد:

$$\mathbf{P(AU\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1}$$

ومنه فإن: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



رسم 2 . توضيح الحدث والحدث المعاكس ب مخطط "فين".

لاحظ! لكي يكون B معاكسا ل A يجب أن يتحقق الشرطان التاليان:

$$A\cap B = \Phi, \ \ AUB = \Omega.$$

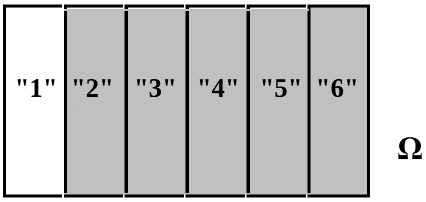
مثال 1: نلقي حجر نرد مرة واحدة. ليكن A: "الحصول على العدد 1". إذا كان $P(A) = 1/6$ ، حدد الحدث المعاكس ل A وأحسب احتماله.

الحدث المعاكس ل A هو "الحصول على عدد غير 1"، بمعنى "الحصول على 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6"، واحتماله هو:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - (1/6) = 5/6.$$

"الحصول على العدد 4" هو حدث منافي ل "الحصول على العدد 1" لكنه ليس معاكسا له لأن:

$$P(4) = 1/6 \neq 1 - 1/6$$



رسم 3 . الحدث المعاكس ل "1" هو كل المساحة المضللة.

مثال 2: نلقي حجر نرد، ما هو احتمال الحدث A: "الحصول على عدد زوجي " ؟ ما هو الحدث المعاكس له؟ وما هو احتماله؟

$$P(A) = P(2 \vee 4 \vee 6) = 3/6$$

(الرمز "V" يعني "أو")

الحدث المعاكس هو "الحصول على عدد غير زوجي" (A') ، واحتماله:

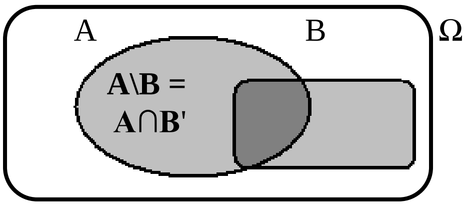
$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - (3/6) = 3/6.$$

نظرية 3. إحتمال A باستثناء B . إذا كان A و B حدثان ما فإن:

$$\mathbf{P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

البرهان: لدينا A\B و A∩B حدثان متنافيان و $(A\backslash B) \cup (A\cap B) = A$، ومنه حسب المسلمة 3:

$$P(A\backslash B) + P(A\cap B) = P(A) \Rightarrow P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B)$$



رسم 4. مفهوم الاستثناء

مثال. عند إلقاء حجر نرد نسمي A الحصول على عدد زوجي و B حدث الحصول على عدد أقل من 3. أحسب P(A\B).

$P(A) = P\{2, 4, 6\} = 3/6, P(B) = P\{1, 2\} = 2/6, P(A\cap B) = P\{2\} = 1/6,$
$P(B\backslash A) = P(A) - P(A\cap B) = 3/6 - 1/6 = 2/6$

لاحظ! ينبغي التمييز بين الكتابة P(A\B) التي تعني احتمال الحدث A لكن ليس B ، والكتابة P(A/B) والتي تعني الاحتمال الشرطي ل A حيث B محقق.

نظرية 4. (الاتحاد) من أجل A و B أحداثا أيا كانت، احتمال تحقق أحدهما على الأقل (واحد منهما أو الإثنان معا) يحسب كما يلي:

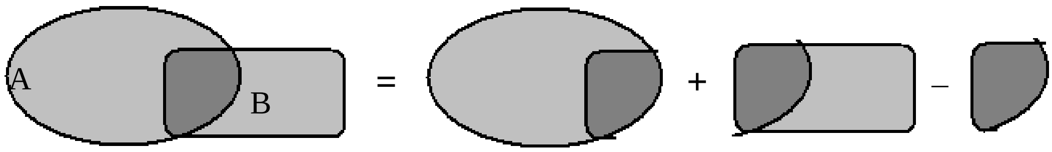
$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

البرهان: لدينا B و A\B حدثان متنافيان و $AUB = (A\backslash B) \cup B$

إذن من المسلمة 3 نجد: $P(AUB) = P(A\backslash B) + P(B)$

و من النظرية 3 لدينا: $P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B)$

إذن: $P(AUB) = P(A) - P(A\cap B) + P(B)$ وهو المطلوب.



رسم 5 . يتوجب طرح A∩B عند حساب الاتحاد لألا تحتسب مرتين؛ مرة مع A ومرة مع B.

لاحظ! من أجل ثلاثة أحداث A، B و C أيا كانت:

$$P(AUBUC) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

مثال. عند رمي مكعب نرد، نرمز ب A للحصول على عدد زوجي و B للحصول على عدد أولي. أحسب احتمال الحصول على عدد زوجي أو أولي.

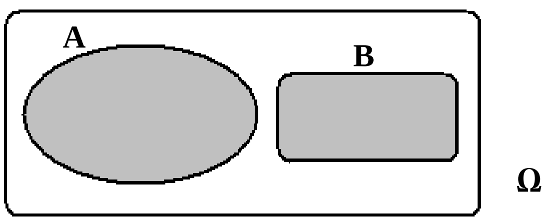
$P(A) = P\{2, 4, 6\} = 3/6, P(B) = \{2, 3, 5\} = 3/6, P(A\cap B) = P\{2\} = 1/6$
$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 3/6 + 3/6 - 1/6 = 5/6$
$AUB = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

مثال 2 (**التنافي**): عند رمي مكعب نرد نرمز ب A للحصول على عدد أكبر من 4 و ب B للحصول على عدد أقل من 3. أحسب احتمال الحصول على عدد أكبر من 4 أو أقل من 3.

$P(A) = P\{5, 6\} = 2/6, P(B) = P\{1, 2\} = 2/6, A\cap B = \Phi.$

الحدثان متنافيان.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/6 + 2/6 = 4/6$



رسم 6 . الحدثان المتنافيان هما اللذان لا يوجد بينهما تقاطع.

نظرية 5. (احتمال جمع حدثين والاحتمال الشرطي). من أجل A و B حدثان ما، احتمال تحققهما معا يحسب كما يلي:

$$P(A\cap B) = P(A).P(B/A)$$

$P(B/A)$ يسمى الاحتمال الشرطي ل B علما أن A محقق. ومن المعادلة نستنتج :

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \quad (\text{بشرط } P(A) > 0)$$

حيث A تصبح فضاء المعاينة بما أن A محقق.

لاحظ! من النظرية ذاتها نستنتج أنه من أجل A, B, C أحداث ما (مستقلة أو لا، متنافية أو لا)،

$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/(A \cap B))$

$P((A \cap B)/C) = P(A \cap B \cap C) \div P(C)$

مثال: 1) أحسب عند إلقاء حجر نرد احتمال الحصول على قيم أقل من 4 (حدث B).

2) أحسب احتمال الحصول على نتيجة أقل من 4 إذا علمت أن الوجه المحصل لمكعب النرد عدد فردي (حدث A).

3) أحسب احتمال الحصول على قيمة أكبر أو تساوي 4 إذا علمت أن النتيجة عدد فردي.

$P(B) = P(1 \vee 2 \vee 3) = P(1) + P(2) + P(3) = 3/6$
$P(B/A) = P(B \cap A) \div P(A)$,
$P(B \cap A) = P(1 \vee 3) = P(1) + P(3) = (1/6) + (1/6) = 2/6$
$P(B/A) = P(B \cap A) \div P(A) = (2/6) \div (3/6) = 2/3$

نتيجة 1. **(تعريف الاستقلال)**

من النظرية السابقة (5) ، وبما أن استقلال الحدثين A و B يعني أن $P(B/A) = P(B/A') = P(B)$ نستنتج أنه من أجل A و B أحداثا مستقلة، فإن احتمال تحققهما معا يحسب كما يلي:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

هذه المعادلة هي تعريف استقلال حدثين، ويعني أن احتمال وقوع B لا يتأثر بوقوع A أو عدم وقوعه.

لاحظ!

- يعمم تعريف الاستقلال على ثلاثة أحداث أو أكثر بسهولة:

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \div P(B) \div P(C)$

- يقال عن الحدثان (A/C) و (B/C) أنهما مستقلان إذاا

$P((A \cap B)/C) = P(A/C) \div P(B/C)$

مثال: نلقي حجر نرد وقطعة نقدية معا. ما هو احتمال الحصول على الصورة والعدد6 ؟ (نتيجة مكعب النرد مستقلة عن نتيجة القطعة النقدية).

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = 0.5 \times 1/6 = 1/12.$

مثال 2. نلقي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على صورة في الرمية الأولى وفي الرمية الثانية.

$P(FF) = P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$

مثال 3. صندوق به 5 كريات 2 حمراء و3 بيضاء. نسحب كرية نسجل لونها ثم نعيدها للصندوق ونكرر ذلك ثلاثا؛

- أحسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين، أحسب احتمال الحصول على 3 كريات حمراء.

o كيف يكون الاحتمال في حالة كون السحب بدون إرجاع الكرية ؟

1) $P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\, P(R_2) = 2/5 \times 2/5 = 8/25$

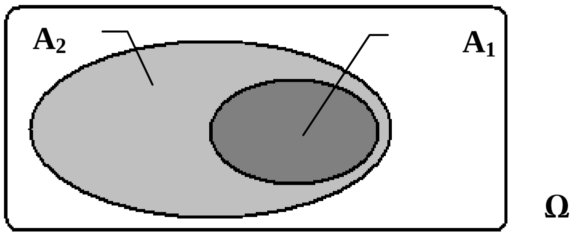
$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\, P(R_2)\, P(R_3) = 2/5 \times 2/5 \times 2/5 = 8/125$

2) $P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\, P(R_2/R_1) = 2/5 \times 1/4 = 2/20$

$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\, P(R_2/R_1)\, P(R_3/(R_1 \cap R_2)) = 2/5 \times 1/4 \times 0 = 0$

نظرية 6. (الاستلزام) لما $A_1 \subset A_2$ نقول أن الحدث A_1 يستلزم الحدث A_2 أي أن وقوع الأول يعني أن الثاني محقق بالضرورة. في هذه الحالة يكون

$$\begin{cases} \overline{A}_2 \subset \overline{A}_1 \\ P(A_1) \le P(A_2) \\ P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_1) \\ P(A_2 / A_1) = 1 \end{cases}$$



رسم 7 . مفهوم الاحتواء : تحقق A_1 يستلزم تحقق A_2 .

o تبعا لقانوني دو مورقان الأول والثاني في المجموعات:

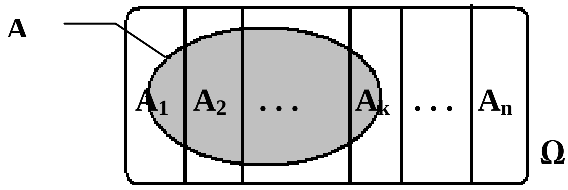
$$C_{A\cup B} = C_A \cap C_B \quad , \quad C_{A\cap B} = C_A \cup C_B$$

نستنتج:

$$\mathbf{P(A\cup B)' = P(A'\cap B') \quad , \quad P(A\cap B)' = P(A'\cup B')}$$

o إذا كان A هو نتيجة أحد أو بعض الأحداث المتنافية: $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_n$ حيث اتحادها يشكل المجموعة الكلية Ω، فإن:

$$\mathbf{P(A) = P(A\cap A_1) + P(A\cap A_2) + \ldots + P(A\cap A_k) + \ldots + P(A\cap A_n)}$$



رسم 8 . حدث A يتقاطع واحد أو أكثر من الأحداث المتنافية

و نستنتج أن:

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \ldots + P(A_k)P(A/A_k) + \ldots + P(A_n)P(A/A_n)$$
$$= \Sigma_k\, P(A_k)P(A/A_k)$$

1 2 4 قانون الاحتمال السببي أو قانون بايز

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_n$، أحداثمتنافية فيما بينها (أنظر الرسم أعلاه) حيث اتحادها يشكل المجموعة الكلية (الأساسية) Ω، و A حدث ما يتحقق عن طريق واحد أو أكثر من الأحداث A_k، إذا علمنا أن A تحقق، نحسب احتمال تحققه عن طريق الحدث A_k كما يلي:

$$P(A_k / A) = \frac{P(A_k)P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{P(A \cap A_k)}{P(A)}$$

تسمى هذه القاعدة "قانون بايز"[1] (Règle de BAYES) أو قانون "الاحتمال السببي" لأنها تمكن من حساب احتمال أن يكون حدث ما (A_k) هو المسبب لوقوع حدث آخر (A).

مثال: وظفت أمينة (A_1) بمكتب للمحاسبة حيث تولت طبع 20 % من الفواتير. يشغل المكتب عاملتين أخريين إحداهما (A_2) تطبع 30 % من الفواتير والأخرى (A_3) 50 %. ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في 5 % من الفواتير، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A_2) 2 % ولدى الثالثة (A_3) 1 %.

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء. استبعدت الموظفة الجديدة (A_1) أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا 20 % من الفواتير، وردت عليها العاملات الأخريات بأن نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر.

1. أحسب احتمال أن تكون (A_1) هي من حررت الفاتورة وقارن مع احتمال أن تكون A_2 أو A_3.
2. أحسب مجموع الاحتمالات الثلاث.
3. ما هي نسبة المراسلات التي بها أخطاء.

$$P(A_1 / A) = \frac{P(A_1)P(A/A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{0.2 * 0.05}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)} = 0.476$$
$$P(A_2 / A) = \frac{P(A_2)P(A/A_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{0.3 * 0.02}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)} = 0.2857$$
$$P(A_3 / A) = \frac{P(A_3)P(A/A_3)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{0.5 * 0.01}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)} = 0.2383$$

يظهر من الحساب أن الاحتمال الأكبر هو أن تكون A_1 هي التي حررت الفاتورة.

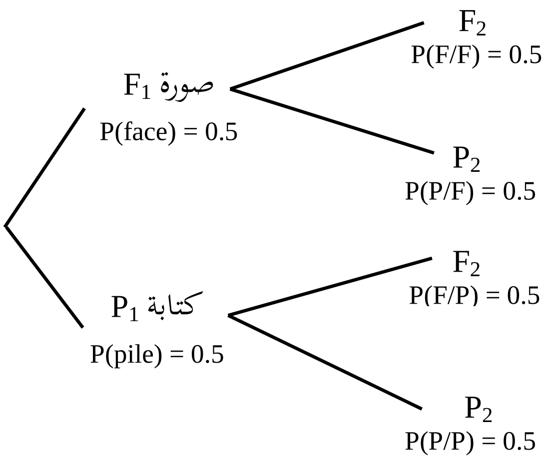
2. $P(A_1/A) + P(A_2/A) + P(A_3/A) = 1$.

3.

$$P(A) = \sum P(A_k)P(A/A_k) = 0.2(0.05) + 0.3(0.02) + 0.5(0.01) = 0.021$$

[1] ولد العالم Thomas Bayes سنة 1701، وعاش في لندن. نشرت كل كتاباته واكتشافاته بعد مماته في 1761. حسب آلان بلومان، 2007 ، أساسيات الإحصاء، الطبعة السادسة، ماك قراو هيل، نيويورك، ص A-9.

تطبيق (على الاحتمال الشرطي والشجرة البيانية) . نلقي قطعة نقدية مرتين . أرسم شجرة الاحتمال (الشجرة البيانية) مبينا عليها الأحداث واحتمالاتها، أحسب احتمال الحصول على مرتين صورة، أحسب احتمال الحصول على الصورة في الرمية الثانية.



الحالات الممكنة

FF $P(FF) = P(F)\,P(F/F) = 0.5\,(0.5) = 0.25$

FP $P(FP) = P(F)\,P(P/F) = 0.5\,(0.5) = 0.25$

PF $P(PF) = P(P)\,P(F/P) = 0.5\,(0.5) = 0.25$

PP $P(PP) = P(P)\,P(P/P) = 0.5\,(0.5) = 0.25$

$P(F \cap F) = P(F) \times P(F/F) = 0.5 \times 0.5 = 0.25.$

$P(F_2) = P(FF \vee PF) = 2(0.25) = 0.5$

3 1 خلاصة

تعريف التنافي، التعاكس والاستقلال: يكون حدثان متنافيان إذا كان من المستحيل تحققهما معا. الحدث المعاكس هو حدث منافي لكن الحدث المنافي ليس دوما حدثا معاكسا. يكون حدثان مستقلان إذا كان تحقق أحدهما لا يزيد ولاينقص في احتمال تحقق الآخر.

سبع قواعد أساسية في حساب الاحتمال:

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	احتمال الحدث المعاكس
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$	احتمال تحقق حدثين، مستقلين أو لا
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	احتمال تحقق حدثين مستقلين
$P(B/A) = P(A \cap B) \div P(A)$ si $P(A) > 0$	احتمال تحقق B بشرط تحقق A
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	احتمال تحقق A أو B متنافيين أو لا
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ car $P(A \cap B) = 0$	احتمال تحقق A أو B عندما يكون الحدثان متنافيان
$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$	احتمال تحقق A لكن ليس B

4 1 ملحق عن التحليل العددي

تستخدم مفاهيم التحليل العددي من توفيقات وترتيبات وعاملي وغيرها لحساب عدد الحالات الممكنة أو الملائمة لوقوع حدث.

من خلال الأمثلة التالية نحاول توضيح هذه المفاهيم:

1. ضغط طفل عشوائيا على جانب الأرقام من لوح المفاتيح فكتب عددا من 3 أرقام، كم عدد حالات الأعداد التي يمكن أن يكتبها، ما هو عدد الحالات إذا كان العدد المكتوب من 4 أرقام، 5 أرقام؟ أكتب الصيغة العامة للحل؟ ماسم هذه الصيغة
10^3، 10^4، 10^5 .

الصيغة العامة للحل هي: $\mathbf{N^n}$ وتسمى القائمة، حيث الترتيب معتبر (يفرق بين حالة وحالة) والتكرار ممكن (يمكن استخدام ذات الرقم أكثر من مرة).

2. يتنافس 4 طلبة أحمد، محمد، طه ومصطفى على مرتبة أعلى معدل في كل واحد من المقاييس المدروسة على حدة. بفرض أن المعدلات المحققة لا تتساوى، ما هو عدد الحالات الممكنة إذا كان عدد المقاييس 5، 6، 7؟ 4^5 ، 4^6 ، 4^7 .

3. صندوق يحتوي على 10 كريات مرقمة من 0 إلى 9، نسحب عشوائيا ثلاث كريات بدون إرجاع، ما هو عدد الحالات الممكنة؟ ما هو عدد الحالات إذا كنا نسحب 4 كريات، 5 كريات؟ أكتب الصيغة العامة للحل؟ ماسم هذه الصيغة؟

$10!/(10-3)! = 10!/7! = 10(9)(8)$، ل4 كريات عدد الحالات: $10(9)(8)(7)$ ، ل5 كريات: $10(9)(8)(7)(6)$

الصيغة العامة هي $\mathbf{A^n_N = N! \div (N-n)!}$ وتسمى الترتيبة، حيث الترتيب معتبر والتكرار غير ممكن، ولذلك تعطي عدد من الحالات أقل من القائمة.

4. يتنافس رؤساء أفواج السنة الثانية تسيير لانتخاب ممثل الدفعة، نائب أول و نائب ثاني، ما هو عدد الحالات الممكنة إذا علمت أن عدد أفواج السنة الثانية تسيير هو 7، 8؟

لاحظ أننا هنا معنيون بأسماء الطلبة الثلاثة الفائزين لكن أيضا بترتيبهم، أي من الأول، من الثاني ومن الثالث.

$$a)\ A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!} \Rightarrow A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7(6)(5)4!}{4!} = 7(6)(5) = 210,$$

$$b)\ A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8(7)(6)5!}{5!} = 8(7)(6) = 336$$

5. يتم اختيار بالقرعة 3 طلبة من مجموع طلبة الفوج لحضور اجتماع معين مع رئيس القسم. ما هو عدد الحالات الممكنة إذا كان عدد طلبة الفوج : 30، 35، 40؟ ما هي الصيغة العامة للحل؟ ماسم هذه الصيغة؟

لاحظ أننا هنا معنيون بأسماء الطلبة الثلاثة لكن لا اعتبار للترتيب.

$30(29)(28) \div 3!$، $35(34)(33) \div 3!$ ، $40(39)(38) \div 3!$

الصيغة العامة هي $C^n_N = N! \div [(N-n)!n!]$ وتسمى **التوفيقة**، حيث الترتيب غير معتبر والتكرار غير ممكن، لذلك فهي أقل من الترتيبة.

6. يتنافس 4 مرشحين للرئاسيات في بلد معين: أحمد، محمد، طه ومصطفى، ما هو عدد الحالات الممكنة لترتيب المرشحين بعد فرز الأصوات (نستبعد إمكانية تساوي عدد الأصوات)؟ ما هو عدد الحالات إذا كان عدد المرشحين 5، 6، 7؟

$4(3)(2)(1) = 4!$ ، $5!$ ، $6!$ ، $7!$.