المعهد العربي للتدريب والبحوث
حصائية

أساسيات الاحتمالات

إعـــــداد

الاستاذ الدكتور خالد زهدي خواجه

مديـــر عـــام

المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية

المقدمـــــــــــــــــــة

اتسعت استخدامات الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية ، وأصبحت اداة رئيسية وهامة للاقتصادي والاجتماعي والمهندس والطبيب وغيرهم ، ودخلت في كافة العلوم ، وأصبحت تدرس في المدارس والجامعات.

ونظرا لأهمية هذا الموضوع ارتأيت أن أضع بين أيـدي طلبتنـا الأعزاء هذا المؤلف ، الذي هو مقدمه في الاحتمالات، ولم أشأ أن أتعمـق في الموضوع فيصبح للمتخصصين فقط ، واردته ان يكون شرحا مبسـطا مع أمثلة تطبيقية وتمارين وحلول لهذه التمارين تسهل على الطالـب فهـم المادة وترغبه بها ولا تنفره منها. ولهذا اقتصر هذا المؤلف على التعريف بالاحتمالات وقوانينها ، والمتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية وأدلة توصيف هذه التوزيعات (التوقع والتباين والتغاير). والتوزيعات المقطعـة والمتصلة مع التركيز على التوزيع الطبيعي ، إضافة إلى مجموعـه مـن التمارين المتنوعة وحلولها.

ارجـو أن أكـون قـد وفقـت .

المؤلف

أ.د خالد زهدي خواجه

الفصـــــــــل الأول

الفصـ ـل الأول

الاحتمـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـالات

PROBABILITIES

▪ معنى الاحتـ ـمال

لقد تم تعريف الاحتمال بطرق عديدة غير أن أبسطها " **هو مقياس لامكانية وقوع حدث (Event) معين** " .

كثيراً ما نستعمل في حياتنا اليومية كلمات يحتمل ويمكن ويجوز ، فنقول مثلاً من الممكن أو من المحتمل أن تمطر السماء اليوم ، ونعني بهذا أن الظواهر الطبيعية المحيطة بنا اليوم مشابهة لنفس الظواهر الطبيعية في أوقات سابقة التي حدث فيها أن أمطرت السماء. كذلك عندما نقول أن احتمال سحب ورقة "سباتي" من مجموعة واحدة من ورق اللعب عددها (٥٢) ورقة هو ١/٤ فإن ما نعنيه في الحقيقة هو أننا إذا ما سحبنا ورقة واحدة من مجموعة ورق اللعب عدة مرات فأننا نتوقع أن نحصل على ورقة سباتي في ١/٤ مرات السحب وذلك لأن عدد أوراق "السباتي" في المجموعة هو ١٣. إذن فالاحتمال هو ١٣/٥٢ = ١/٤.

لقد شهد القرنين السادس عشر والسابع عشر اهتماما بارزاً بهذا النوع من الدراسات والبحوث حيث كانت الظروف مواتية لذلك في تلك الفترة إذ أن ألعاب المقامرة بورق اللعب ورمي حجر النرد كانت منتشرة في قصور المترفين في أوروبا خاصة في فرنسا، وكانت هذه فترة النهضة العلمية في أوروبا وخاصة في مجال الرياضيات، وقد شعر المقامرون بحاجتهم إلى أسس علمية تساعدهم على حساب فرصهم في الكسب أو الخسارة ، فلجأوا إلى علماء الرياضيات أمثال بسكال (PASCAL) وفرمات (FERMAT) وبرنولي

(BERNOULLI) وغيرهم وهنا كانت نقطة البدء في الدراسات الجدية في علم الاحتمال.

- **تعاريـــف :**

كي نتمكن من عرض أسس ونظريات علم الاحتمال يلزمنا أولاً تقديم بعض التعاريف التي تستخدم في هذا المجال:

١ - الحادث والتجربة والفراغ العيني:

افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلاً ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي ١ أو ٣ أو ٥ مـن التجربـة . وهكـذا فـإن عمليـة رمـي الزهـرة تسـمى **تجربـة (Experiment)** وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى **حادثـاً (Event)** ومجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى **بـالفراغ العيني (Sample Space)**.

ويلاحظ أن الحادث قد يكون حالة او اكثر من الفراغ العيني .

٢- الحالات الممكنة (Possible Cases)

هي الحالات أو النتائج المختلفة التي يمكن أن تظهر نتيجة لإجراء تجربة معينة ، فمثلاً عند رمي قطعة عملة تكون نتيجتها صورة أو كتابة ، وعند رمي زهرة نرد تكون نتيجتها ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ فيقال أن عدد الحالات الممكنة ٢ في حالة رمي قطعة العملة و ٦ في حالة رمي زهرة النرد.

٣- الحالات المواتية (Favorable Cases)

هي النتائج او الحالات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث الذي هو موضع اهتمامنا ، فإذا كان الحادث هو الحصول على رقم فردي في حالة رمي زهرة النرد فإن الحالات التي تحقق هذا الحادث هي الحصول على ١ أو ٣ أو ٥ ، هذه الحالات الثلاثة تسمى الحالات المواتية.

٤- الحالات المتماثلة (Equally Likely Cases)

إذا كان لدينا عدة كرات معدنية مصنوعة من مادة واحدة متجانسة في الكثافة ولها نفس الوزن والحجم وضعناها في كيس وسحبنا كرة منها بعد خلطها جيداً فإن هذه الكرات تكون حالات متماثلة أي يكون لكل منها نفس النصيب في السحب.

٥- الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events)

يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا . فمثلاً عند رمي حجر النرد لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

٦- الحوادث المستقلة (Independent Events)

يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر. فمثلاً عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.

٧- الحوادث الشاملة (Exhaustive Events)

تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة.

فمثلاً عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما إذا كان مدخنا أو غير مدخن تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة لأنه لابد للفرد أن يكون له صفة واحدة من هذه الصفات. كذلك فإن الحصول على العدد ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ عند رمي حجر النرد تعتبر حوادث شاملة لأنه لابد من حدوث إحداها.

- **حسـاب الاحتـمـال**

الاحتمال "**هو نسبة عددية غير سالبة محصورة بين الصفر والواحد**" حيث تدل القيمة صفر على حالة استحالة الحدوث والقيمة واحد على الحادث الأكيد الوقوع. ويمكن حسابه أو تقديره بطريقتين :

- الاحتمال النظري .
- الاحتمال التجريبي .

- **الاحتمال النظري (Theoretical Approach)**

يعرف أيضاً بالاحتمال الكلاسيكي ، والاحتمال النظري لحدوث حادثة ما هو نسبة عدد الحالات المواتية إلى عدد الحالات الممكنة الحدوث على فرض أن كل الحالات لها نصيب متكافيء في الحدوث.

<u>مثـال ١</u> :

إذا كان لدينا كيس بداخله ٨ كرات حمراء و ٣ كرات بيضاء فما هو احتمال أن نسحب كرة ما لا على التعيين فتكون كرة بيضاء؟

<u>الحـل</u> :

عدد الحالات الممكنة = ١١

عدد الحالات المواتية = ٣

∴ احتمال سحب كرة بيضاء = ٣/١١

إذن من أجل حساب احتمال حدوث حادثة ما لابد من معرفة عدد الحالات الممكنة التي لها نصيب متكافيء في الحدوث وعدد الحالات المواتية .

مثـال ٢:

إذا كـان هناك (٤) أعضاء من مجلس إدارة إحـدى الشركـات هم (A ، B ، C ، D) مرشحين لاختيار اثنين منهم لتمثيل الشركة في احد المؤتمرات الدولية :

أ. ما هو احتمال اختيار العضو A

ب. ما هو احتمال اختيار أحد العضوين A أو D

ج. ما هو احتمال اختيار العضوين A و D

د. ما هو احتمال عدم اختيار العضو A

الحـــل: الفراغ العيني S هو مجموعة الحالات الممكنة أي

$$S = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$$

أ- عدد الحالات المواتية لاختيار العضو A هو ٣ حالات ، عدد الحالات الممكنة ٦ حالات.

$$\text{الاحتمال} = \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب- هناك ٥ حالات مواتية لاختيار A أو D

$$P(A \text{ or } D) = P(AUD) = \frac{5}{6}$$

ج- هناك حالة واحدة مواتية لاختيار A , D

$$P(A\ ,\ D) = P(A \cap D) = \frac{1}{6}$$

د- هناك ٣ حالات مواتية لعدم اختيار A

$$\therefore\ P(\overline{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

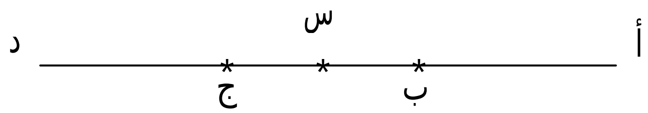
حيث $P(\overline{A})$ هي احتمال عدم اختيار A

▪ عيوب الاحتمال النظري

هناك بعض العيوب أو الصعوبات في تطبيق التعريف النظري للاحتمال منها:

١- صعوبة حصر عدد الحالات الممكنة

فمثلاً لو كان لدينا المستقيم SP أخذت عليه النقطة س وطلب إلينا حساب احتمال وقوع النقطة س في الجزء ب جـ من المستقيم .



لحساب احتمال وقوع النقطة س في الجزء ب ج علينا أن نحسب مجموع نقاط الجزء ب جـ وهي التي تمثل عدد الحالات المواتية وأن نحسب مجموع نقاط المستقيم أ د والتي تمثل عدد الحالات الممكنة ، ولكننا نرى أنه من الصعب جداً حساب عدد هذه النقاط وبالتالي من الصعب تطبيق التعريف النظري للاحتمال.

٢- عدم تحقيق تماثل الحالات الممكنة

فالتعريف النظري يشترط لتطبيقه تماثل الحالات الممكنة ولكن هذا لا يتحقق دائما فمثلاً عند اختيار شخص ما لمعرفة حالته الاجتماعية (الزواجيه) وهي أعزب أو متزوج أو مطلق أو أرمل فلا يمكننا القول أن احتمال كونه أرملاً مثلاً يساوي ١/٤ بل ولا يمكن حساب أو تقدير هذا الاحتمال باستخدام التعريف النظري لأنه من الواضح أن هذه الحالات الممكنة غير متماثلة.

كذلك لا نستطيع القول بأن احتمال أن يكون المولود ذكراً يساوي ١/٢ على اعتبار أن الحالات المواتية حالة واحدة وهي كونه ذكراً والحالات الممكنة حالتان (ذكر أو أنثى) وذلك لأنه من المشاهد في جميع أنحاء العالم هو زيادة عدد المواليد الذكور على الإناث.

من هنا نشأت الحاجة إلى تعريف آخر للاحتمال يتغلب على مثل هذه الصعوبات هذا التعريف هو الاحتمال التجريبي.

- **الاحتمال التجريبي (Empirical Approach)**

إذا رمينا علبة كبريت على شكل متوازي مستطيلات N مرة وكان عدد الرميات التي نتيجتها ظهور الوجه الكبير إلى أعلى n_1 وعدد الرميات التي نتيجتها ظهور الوجه المتوسط n_2 وعدد الرميات التي نتيجتها ظهور الوجه الصغير n_3 فإن

نسبة عدد المرات للوجه الكبير = $\frac{n_1}{N}$

نسبة عدد المرات للوجه المتوسط = $\frac{n_2}{N}$

نسبة عدد المرات للوجه الصغير = $\frac{n_3}{N}$

هذه النسب تختلف عن الـ $\frac{1}{3}$ لعدم تماثل الحالات الممكنة

وكلما كانت N كبيرة كلما اقتربت هذه النسب من الاستقرار عند قيمة ثابتة وقد تكون مثلاً ٧٠% و ٢٠% و ١٠% على التوالي.

بحيث يمكن القول أن

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_1}{N} = 0.70$$

وهو احتمال الحصول على الوجه الأكبر عند رمي علبة الكبريت

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_2}{N} = 0.20$$

وهو احتمال الحصول على الوجه الأوسط عند رمي علبة الكبريت

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_3}{N} = 0.10$$

وهو احتمال الحصول على الوجه الأصغر عند رمي علبة الكبريت

كذلك إذا رمينا قطعة عملة n مرة وكان عدد مرات ظهور الوجه صورة هو r مرة فإن نسبة عدد الصور = $\frac{r}{n}$. هذه النسبة قد تختلف عن ١/٢ إذا كانت n صغيرة ولكن من الثابت أنه كلما زادت n كلما اقتربت النسبة $\frac{r}{n}$ من ١/٢ بحيث أنه عندما تكون n كبيرة جداً تصبح النسبة قريبة جداً من ١/٢

أي ان

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_1}{N} = 1/2$$

وهو احتمال الحصول على صورة عند رمي قطعة النقد.

وعلى ذلك يكون تعريف الاحتمال التجريبي كما يلي:

إذا أجريت تجربة مرات متتالية عددها N وكان عدد المرات التي يتحقق في كل منها حادث معين هو r مرة فان احتمـال وقوع هذا الحادث يساوي

$$\lim_{N \to \infty} \frac{r}{n}$$

- **قوانـين الاحتـمالات**

- جمـع الاحتمـالات

أ- <u>في حالة كون الحوادث متنافية</u>

إذا كانت الحوادث A_1 , A_2 , A_3 .... حوادث متنافية بمعنى أن حدوث أحـدها يـؤدي

إلى استحالة حدوث أي من الحوادث الأخرى وبالتالي فإن احتمال حدوث هذه الحوادث معاً يكون معدوماً فإن

احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية
يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث

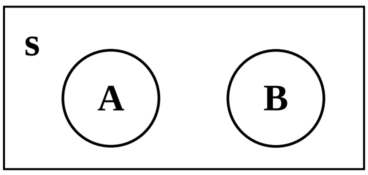
فإذا كان A ، B حادثين متنافيين كما في الشكل (١)

فإن $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$

يرمز أيضاً لاحتمال وقوع أحد الحادثين بالرمز

$P(AUB) = P(A) + P(B)$

الشكل (١)



حوادث متنافية

مثـال ٣ : في حالة رمي زهرة نرد ما هو احتمال الحصول على عدد فردي؟

الحـــل : الحصول على عدد فردي معناه الحصول على ١ أو ٣ أو ٥ وحيث أن هذه الحوادث الثلاثة متنافية فإن

$$P(1 \text{ أو } 3 \text{ أو } 5) = P(1) + P(3) + P(5)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثـال ٤:

عند رمي زهرة نرد مرتين ما هو احتمال الحصول على وجهين متشابهين؟

الحـــل:

الحصول على وجهين متشابهين معناه الحصول على (١ و ١) أو (٢ و ٢) أو (٣ و ٣) ... أو (٦ و ٦) وهي حوادث متنافية واحتمال كل منها $\frac{1}{36}$

P (وجهين متشابهين) = P (١ و ١) + P (٢ و ٢) + ... + P (٦ و ٦)

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \ldots + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{6}{36}$$

ومما سبق نجد أن

إذا كان B , A حادثين شاملين ومتنافين فإن

$$P(A) + P(B) = 1$$

إذا كان B , A حادثين شاملين ومتنافين ومتماثلين فإن

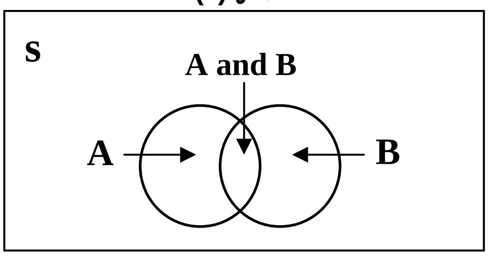
$$P(A) = P(B) = 1/2$$

إذا رمزنا للحادث عدم وقوع A بالرمز $\overline{A}$ فإن الحادثين A و $\overline{A}$ يكونان متنافيين وشاملين ، مثل أن يكون الشخص مدخنا أو غير مدخن

ب - <u>في حالة كون الحوادث غير متنافية</u>

عند عدم اشتراط تنافي الحادثين A و B يكون المقصود بالحادث (A أو B) وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين A و B معا في وقت واحد كما يتضح من الشكل (٢) التالي

شكل (٢)



حوادث غير متنافية

الآن (B) P + (A) P تمثل مجموع الحالات المواتية للحادث A مضافاً إليها مجموع الحالات المواتية للحادث B ولكن يجب ملاحظة أن كل من الحالات المواتية للحادث A وتلك المواتية للحادث B تتضمن الحالات المواتية لوقوع A و B معاً ، وبهذا فإنه في حالة جمع (A) P و (B) P فإننا نجمع

(B و A) P مرتين ، لهذا لابد من طرح (B و A) P مرة واحدة لنحصل على الاحتمال (B أو A) P وهذا هو :

P (A او B)= P (A) + P (B) – P (A و B)

أو

$$P (AUB) = P (A) + P(B) – P (A\cap B)$$

<u>مثـال ٥ :</u>

بالرجوع إلى مثال أعضاء مجلس إدارة إحدى الشركات، ما هو احتمال أن يتم اختيار العضو A أو العضو D من بين ٤ أعضاء من مجلس إدارة إحدى الشركات (هم A و B و C و D) لتمثيلها في أحد المؤتمرات ؟

<u>الحـــل:</u>

الفراغ العيني وهو مجموع الحالات الممكنة

$$S = \{AB,\ AC, AD, BC, BD, CD\}$$

- الحالات المواتية لاختيار A هي (AB, AC, AD)
- الحالات المواتية لاختيار D هي (AD, BD, CD)
- الحالات المواتية لاختيار A و D معاً هي (AD)

حسب قاعدة جمع الاحتمالات نحصل على النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً.

P (AUD) = P (A أو D) = P (A) + P (D) – P (A∩ D) =

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}$$

مثـال ٦:

إذا سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب فما هو احتمال أن تكون الورقة عدداً أو من مجموعة معينة من المجموعات الأربعة المكونة لأوراق اللعب؟

الحـــل:

نفرض أن A يمثل الحصول على عدد وأن B يمثل الحصول على ورقة من مجموعة معينة ولتكن "الديناري"

$$P(A) = \frac{40}{52}$$

$$P(B) = \frac{13}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{52}$$

ومن قانون جمع الاحتمالات

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{40}{52} + \frac{13}{52} - \frac{10}{52}$$
$$= \frac{43}{52}$$

- **ضـــرب الاحتـمالات**

أن احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل واحد من هذه الحوادث ببعضها بعضاً

إذا كان لدينا الحادثين المستقلين A و B فإن

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

مثـال ٧ :

ما هو احتمال الحصول على الوجه (٣ ، ٣) عند رمي زوج من أحجار النرد؟

الحـــل:

أن احتمال الحصول على الوجه ٣ لدى رمي الحجر الأول من النرد هو $\frac{1}{6}$

وكذلك احتمال لحصول على الوجه ٣ لدى رمي الحجر الثاني من النرد هو $\frac{1}{6}$

$$P(A \cap B) =$$
$$P(A)\ P(B) =$$
$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

▪ الاحتـــمال الشرطي Conditional Probability

يهتم مدراء الشركات حين اتخاذ العديد من القرارات الإدارية أو التجارية بمعرفة احتمال حدوث حدث معين A إذا كان حدثاً آخر B قد حدث، فمثلاً حين يكون مطلوباً من المدير أن يتخذ قرارا بنشر إعلان دعائي لسلعة ما في التلفزيون فإنه يكون مهتما بمعرفة ما هو احتمال أن شخصاً ما سيشتري السلعة (الحادث A) إذا كان قد حصل أن شاهد الإعلان في التلفزيون (الحادث B).

وهكذا فإن احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B يدعى بالاحتمال الشرطي ويكتب على صورة P (A/B) وتقرأ احتمال الحادث A بعد وقوع الحادث B.

سنوضح مفهوم الاحتمال الشرطي بمساعدة المثال التالي:

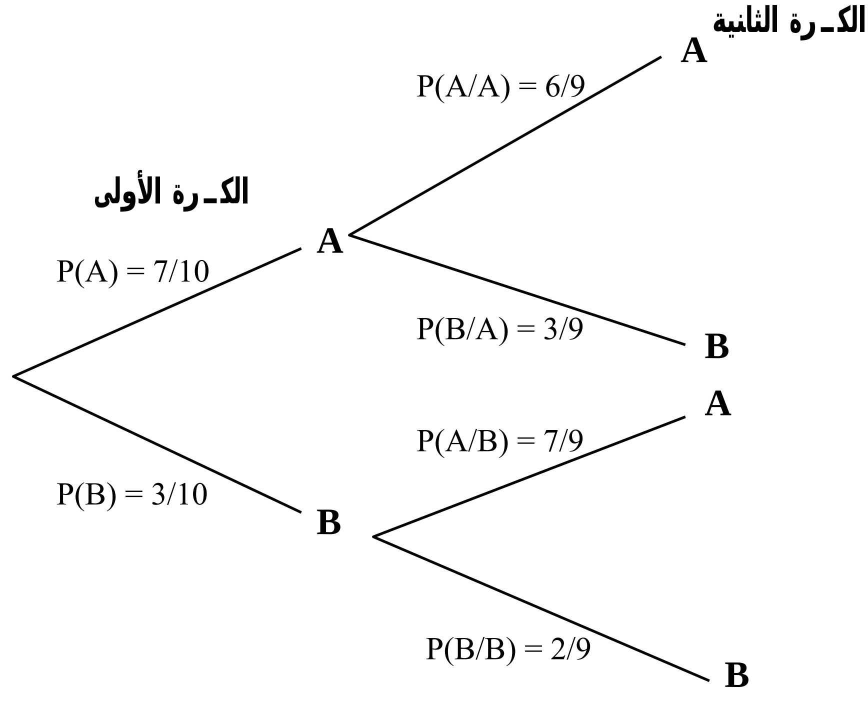
<u>مثـال ٨</u> :

كيس يحتوي على ٣ كرات سوداء و ٧ كرات بيضاء

لنفرض أننا سحبنا منه كرتين كل على حده وبدون إعادة . فإذا رمزنا إلى سحب كرة بيضاء بالرمز A وإلى سحب كرة سوداء بالرمز B فإن الحالات المركبة التي نحصل عليها تتمثل بما يلي:

- الكرتان بيضاوان AA
- الأولى بيضاء والثانية بيضاء AB
- الأولى سوداء والثانية بيضاء BA
- الكرتان سوداوان BB

احتمالات النتائج لسحب الكرة الأولى ثم الثانية بالترتيب يمكن إيضاحها بالرسم التالي:



وهكذا فإن الاحتمال المركب يمكن حسابه كما يلي:

احتمال ان تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء = احتمال أن تكون الأولى بيضاء مضروبا في احتمال أن تكون الثانية بيضاء بشرط أن تكون الأولى بيضاء.

$$P(A \cap A) = P(A, A) = P(A)\ P(A/A)$$
$$= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90}$$

وبالمثـل

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P(B \cap A) = P(B)\ P(A/B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P(B \cap B) = P(B)\ P(B/B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

والآن نعمم هذا المثال ونقدم التعريف التالي للاحتمال الشرطي:

- **الاحتـــمال الشـــرطي**

إذا كان لدينا الحادثين B , A وكان P (B) لا يساوي الصفر فأن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يعطي بالمعادلة التالية:

$$\mathbf{P(A/B) = P}\ \frac{(A \cap B)}{P(B)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ B , A على احتمال الحادث B

من الاحتمال الشرطي أعلاه يمكننا أن نستنتج الاحتمال المركب P(A B)

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B/A)$$
$$= P(B)\,P(A/B)$$

ويمكننا أن نعمم هذه الصيغة لأكثر من حادثين ففي حالة ٣ حوادث تكون

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B/A)\,P(C/AB)$$

مثـال ٩ :

كيس يحتوي على ٧ كرات بيضاء و٣ كرات سوداء سحبت منه ٣ كرات بدون إعادة ما هو احتمال أن تكون كلها بيضاء؟

الحـــل :

ليكن A1 هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الأولى

A2 هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني

A3 هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الثالث

وبالتطبيق المباشر للقانون

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2)$$
$$= \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{5}{8}\right)$$
$$= \frac{210}{720}$$

مثـال ١٠ :

سحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب بدون إعادة ما هو احتمال أن تكون عشرتين؟

الحـــل :

ليكن A هو الحصول على العدد ١٠ في الورقة الأولى

B هو الحصول على العدد ١٠ في الورقة الثانية

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A)$$
$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

▪ العمليات العشوائية المنتهية والأشجار البيانية

يقصد بالعملية العشوائية المنتهية : التجارب المتتابعة بحيث يكون لكل تجربه عدد منته من النواتج باحتمالات معطاة

ومن الطرق المناسبة لوصف مثل هذه العلميات ولحساب احتمالات أي حدث ، طريقة الأشجار البيانية الموضحة في المثال التالي:

مثـــال ١١ :

لدينا ثلاثة أدراج كما يلي:

بالدرج I يوجد ٦ أشرطة فيديو من بينها ٢ أجنبيان .

بالدرج II يوجد ٨ أشرطة فيديو من بينها ٣ أجنبية.

بالدرج III يوجد ٤ أشرطة فيديو من بينها ١ أجنبي.

اختير درجا بطريقة عشوائية وسحب منه شريطاً بطريقة عشوائية أيضاً. فما هو الاحتمال (P) أن يكون الشريط عربياً.

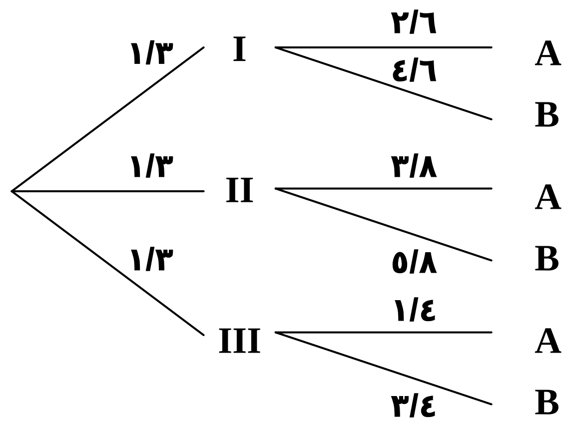
الحـ ـل:

في هذا المثال العملية العشوائية متتابعة من تجربتين

(i) نختار درجا من الثلاثة أدراج .

(ii) نختار شريطا ويحتمل أن يكون أجنبياً (A) أو عربياً (B) .

تمثل الشجرة البيانية التالية هذه العملية وتعطي الاحتمال لكل فرع أو مسار للشجرة:



يكون احتمال حدوث أي مسار من المسارات الستة مساوياً لحاصل ضرب الاحتمالات لكل فرع في هذا المسار. فمثلاً اختيار الدرج II ثم اختيار شريطاً أجنبياً هو $\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$.

وحيث أنه توجد ثلاثة مسارات متنافية تؤدي إلى شريط عربي يكون مجموع احتمالات هذه المسارات الثلاثة هو الاحتمال المطلوب (أي احتمال الحصول على شريط عربي):

$$P = \frac{1}{3}.\frac{4}{6}+\frac{1}{3}.\frac{5}{8}+\frac{1}{3}.\frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{6}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{49}{24}\right)=\frac{49}{72}$$

- **نظريـــــة بيــز (Bayes' Theorem)**

لو افترضنا أن لدينا صندوقين بداخلها مفردات سليمة ومعيبة. مفرده معيبه سحبت عشوائياً من أحد الصندوقين دون تعيين، ونحب أن نعرف ما هو احتمال أن تكون هذه المفردة المعيبة قد سحبت من الصندوق الأول.

للإجابة على أسئلة من هذا النوع نستخدم قاعدة أو نظرية بيز والتي يمكن اعتبارها تطبيقاً للاحتمال الشرطي.

تهدف نظرية بيز إلى حساب احتمالات صحة الفروض بناء على معلومات ميدانية أو تجريبية. في الغالب يكون لدى رجل الأعمال معلومات إضافية عن حادث معين أو مسالة معينة ، إما من خلال خبرته الشخصية أو من خلال ماضي هذا الحادث أو المسألة. الاحتمالات التي تعتمد على الخبرة الشخصية وقبل الحصول على نتائج التجربة تدعى بالاحتمال القبلي Prior Probability فمثلاً الاحتمالات المعتمدة على سجلات المبيعات السابقة أو على الرقم السابق لكمية الإنتاج غير السليم تعتبر أمثلة للاحتمال القبلي. أما عندما يحسب الاحتمال على ضوء معلومات ميدانية مكتسبة يسمى بالاحتمال البعدي Posterior Probability .

فمثلاً عند دراسة حجم الأسرة الشائع قد يكون في ذهننا عدة فروض خاصة بهذا الحجم ، هذه الفروض هي:

A1 أن يكون حجم الأسرة الشائع ١

A2 أن يكون حجم الأسرة الشائع ٢

A3 أن يكون حجم الأسرة الشائع ٣

ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـ

ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـ

ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـ ـ

A10 ـــ ـــ ـــ ـــ ـــ ـ ـ 10

وهذه الحالات تمثل مجموعة شاملة ومتنافية.

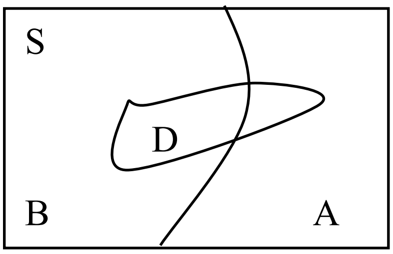
إذا جمعت بيانات ميدانية B عن هذه الظاهرة واستطعنا أن نحسب P(A4/B) فإن هذا الاحتمال يسمى بعديا. مع أن قاعدة بيز يمكن استخدامها لأكثر من حادثين شاملين ومتنافيين إلا أننا ومن أجل التبسيط سنتعرض لتطبيق النظرية على حادثين شاملين متنافيين فقط.

- نظريــة بــيــز

إذا كان A و B حادثين شاملين ومتنافيين في الفراغ العيني S
و D أي حادث في نفس الفراغ بحيث $P(D) \neq O$ فان

$$P(A/D) = \frac{P(A\ D)}{P(A\ D) + P(B\ D)}$$

$$P(B/D) = \frac{P(B\ D)}{P(A\ D) + P(B\ D)}$$



مثـال ١٢ :

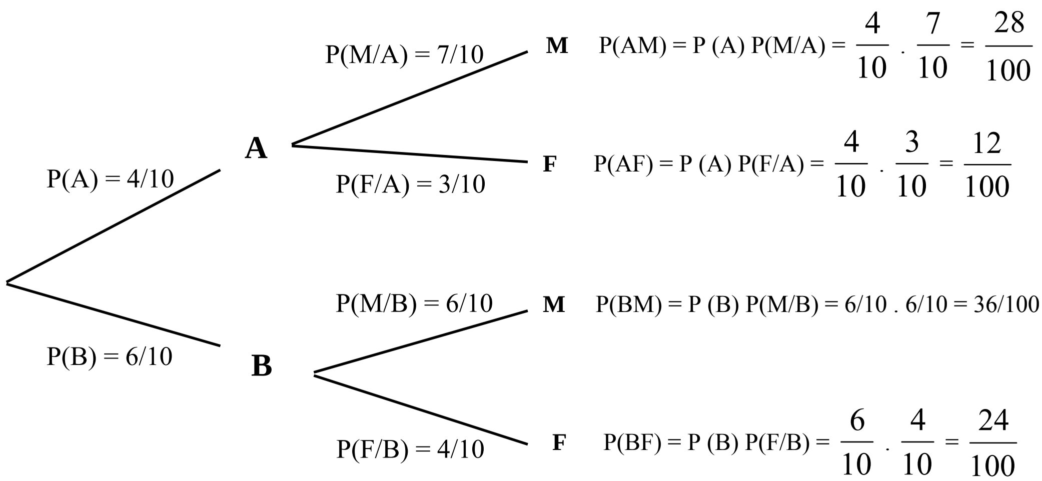
إذا كان ٠.٤٠ من المدخنين في مدينة ما يفضلون نوع السجاير A والباقين منهم يفضلون النوع B وإذا كن النساء يمثلن 0.30 من بين الذين يفضلون A و ٠.٤٠ من بين الذين يفضلون B. فإذا اخترنا بطريقة عشوائية أحد المدخنين وكانت امرأة فما هو احتمال أن تكون ممن يفضلون النوع A؟

الحـــل :

لنفرض أن الاحتمالات هي:

P (A)	احتمال أن المدخن يفضل النوع A
P (B)	احتمال أن المدخن يفضل النوع B
P (M/A)	احتمال أن يكون المدخن رجلاً بشرط أن النوع A هو المفضل
P (M/B)	احتمال أن يكون المدخن رجلاً بشرط أن النوع B هو المفضل
P (F/A)	احتمال أن يكون المدخن امرأه بشرط أن النوع A هو المفضل
P (F/B)	احتمال أن يكون المدخن امرأه بشرط أن النوع B هو المفضل

احتمالات الحالات الممكنة يوضحها الشكل التالي:



وباستخدام قاعدة بيز

$$P(A/F) = \frac{P(AF)}{P(AF) + P(BF)} = \frac{12/100}{12/100 + 24/100}$$

$$= \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

ويمكننا أن نمثل كل هذه الاحتمالات بالجدول التالي:

الحـــادث	الاحتمال القبلي	الاحتمال الشرطي	الاحتمال المركب	الاحتمال البعدي
A	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{12}{36}$
B	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{24}{36}$
المجمــوع	1.0		$\frac{36}{100}$	1.0

▪ التجـارب المتكـررة Repeated Trials

سندرس في هذا القسم كيفية حساب احتمالات الحصول على النتائج المختلفة التي يمكن أن تترتب على تكرار تجربة معينة عدداً معيناً من المرات تحت نفس الظروف أو تحت ظروف مختلفة.

أولاً: التجارب المتكررة المستقلة ذات الاحتمال الثابت

مثلاً عند إلقاء قطعة نقد N مرة وكنا معنيين بظهور الوجه صورة فأننا نلاحظ بأن هناك نتائج مختلفة لعدد مرات ظهور الوجه صورة، فقد نحصل على (N صورة وصفر كتابة) أو (N -١ صورة ومرة واحدة كتابة) أو (N-٢ صورة ومرتين كتابة) أو ... أو (صفر صورة و N كتابة) أي أن هناك

$N+1$ حالة ممكنة . فمثلاً لو ألقينا قطعة النقد خمس مرات فإن الحالات الممكنة هي:

٥ صورة	و	صفر كتابة
٤ صور	و	كتابة واحدة
٣ صور	و	كتابتان
٢ صور	و	٣ كتابة
١ صورة	و	٤ كتابة
صفر صورة	و	٥ كتابة

أي أن مجموع الحالات الممكنة ست حالات

ولحساب مثل هذه الاحتمالات في التجارب المتكررة المستقلة ذات الاحتمال الثابت نستخدم القانون الاحتمالي ثنائي الحدين.

▪ القانون الاحتمالي ثنائي الحدين Binomil Probabilit Law

ولتوضيح كيفية التوصل إلى هذا القانون نجري الآتي:

احتمال ظهور الصورة على قطعة واحدة = ½

احتمال ظهور الصورة على ٣ قطع معاً أو برمية قطعة واحدة ثلاث مرات هو

$$½ . ½ . ½ = (½)^3$$

فإذا رمينا خمس قطع نقود أو قطعة واحدة خمس مرات يكون احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع منها يعني في الوقت نفسه عدم ظهورها على القطعتين الباقيتين أي = $(½)^2$. وبذلك يكون احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع وعدم ظهورها على القطعتين الباقيتين معاً في نفس الوقت =

$$(½)^3 \ (½)^2$$

لكن هذه هي نتيجة ظهور الصورة في الثلاث رميات الأولى وعدم ظهورها في المرتين الباقيتين ولكننا نريد حساب احتمال ظهور الصورة في أي ثلاث قطع وعدم ظهورها في أي قطعتين بغض النظر عن ترتيب القطع ومن الواضح أن الاحتمال المطلوب أكبر من الاحتمال السابق أي أن احتمال ظهور الصورة على أي ثلاث قطع أكبر من احتمال ظهورها على ثلاث قطع محددة .
وللحصول على الاحتمال المطلوب نستخدم التوافيق ونحسب عدد المجموعات التي يمكن تكوينها من خمس قطع بحيث تتكون كل مجموعة من ثلاث قطع فقط، أي نحسب عدد التوافيق التي يمكن تكوينها من خمس قطع بحيث تتكون كل توفيقة من ثلاث قطع أي $\subset_3^5$ والاحتمال الذي حسبناه أعلاه يكون صحيحاً لكل توفيقه أو مجموعة من هذه التوافيق الثلاث أي الاحتمال ثابت ويتكرر في كل مجموعة ولذلك نضرب عدد التوافيق في الاحتمال المحسوب فنحصل على

$$\subset_3^5 \ (½)^3 \ (½)^2$$

$$= 10\ (½)^5$$

$$= \frac{10}{32}$$

والآن نستطيع أن نعمم فنقول أنه في حالة تجربة معينة نتيجتها وقوع حادث ما أو عدم وقوعه وكان احتمال وقوع هذا الحادث (P) واحتمال عدم وقوعه (1-P) وكررنا هذه التجربة (n) مرة فإن احتمال وقوع هذا الحادث في (r) مرة حيث ($n> r > ٠$) يكون =

$$\subset_r^n \ p^r \ (1-p)^{n-r}$$

وهذا ما يعرف باسم القانون الاحتمالي ثنائي الحدين وكما ذكرنا فهو يستخدم في الحالات المستقلة ذات الاحتمال الثابت، فاحتمال وقوع الصورة أو عدم وقوعها ثابت في كل رمية = $\frac{1}{2}$

مثال (١٣): بالعودة إلى مثالنا السابق وهو رمي قطعة نقد خمس مرات او رمي خمس قطع مرة واحدة فإن الاحتمالات الخاصة بظهور الوجه يمكن حسابها باستخدام هذا القانون كما يلي:

احتمال ظهور الصورة ٥ مرات =

$$C^5_5 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

احتمال ظهور الصورة ٤ مرات =

$$C^5_4 \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 = 5 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

احتمال ظهور الصورة ٣ مرات =

$$C^5_3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 10 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$$

احتمال ظهور الصورة مرتين =

$$C^5_2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 10 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$$

احتمال ظهور الصورة مرة واحدة =

$$C^5_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = 5 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

احتمال عدم ظهور الصورة =

$$C^5_0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = 1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

نلاحظ أن هذه النتائج هي الحدود المتتالية في مفكوك المقدار ثنائي الحدين

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5$$

نتيجة لما كان عدد مرات وقوع الحادث في التجارب المتكررة التي عددها n قد تأخذ القيم صفر أو ١ أو ٢ أو ... أو n وهي حالات شاملة ومتنافية فإن

$$P(O)+P(1)+P(2)+...+P(n)=1$$

<u>مثـال ١٤ :</u>

أحصر الحالات الممكنة لظهور الوجبة ٣ وأحسب احتمالاتها عند رمي حجر النرد ٣ مرات.

<u>الحـــل:</u> الحالات الممكنة

- عدم ظهور الوجه ٣ بتاتا
- ظهوره مرة واحدة
- ظهوره مرتين
- ظهوره ثلاث مرات
- احتمال عدم ظهور الوجه ٣ بتاتاً =

$$C_0^3\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$

- احتمال ظهوره مرة واحدة =

$$C_1^3\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{25}{36}\right)=\frac{75}{216}$$

- احتمال ظهوره مرتين=

$$C_2^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{15}{216}$$

- احتمال ظهوره ثلاث مرات =

$$C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}$$

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات = واحد وذلك لأن هذه الحالات شاملة ومتنافية كما نلاحظ أن هذه النتائج هي الحدود المتتالية في مفكوك المقدار ثنائي الحدين

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^3$$

ثانياً : التجارب المتكررة غير المستقلة

في الجزء السابق درسنا الاحتمالات في حالة التجارب المتكررة تحت نفس الظروف أي في الحالات المستقلة ذات الاحتمال الثابت وفي هذا الجزء سندرس الاحتمالات في حالة التجارب المتكررة والتي يتغير فيها احتمال وقوع الحادث من تجربة إلى أخرى، في مثل هذه الحالات نستخدم القانون الهايبرجيومتري .

▪ القانـــون الهايبرجيومتري Hypregeometric Low

يمكننا أن نوضح هذا القانون بالمثال التالي:

<u>مثـال ١٥ :</u>

لو أخذنا كيس بداخله N كرة متماثلة من جميع الوجوه عدا اللون هي : n_1 كرة بيضاء و n_2 كرة حمراء و n_3 كرة سوداء وسحبنا كرات عددها R

بدون إعادة والمطلوب حساب احتمال أن يكون من بين الكرات المسحوبة r_1 كرة بيضاء و r_2 كرة حمراء و r_3 كرة سوداء.

<u>الحـــل:</u>

يتم اختيار R كرة من الكيس بطرق عددها C_R^N وهو عدد الحالات الممكنة ، يتم الحادث بسحب r_1 كرة بيضاء من الكرات البيضاء الـ n_1 وهذا يتم بطرق عددها $C_{r_1}^{n_1}$ **و**سحب r_2 كرة حمراء من الكرات الحمراء الـ n_2 وهذا يتم بطرق عددها $C_{r_2}^{n_2}$ **و**سحب r_3 كرة سوداء من الكرات السوداء n_3 وهذا يتم بطرق عددها $C_{r_3}^{n_3}$ أي أن الحادث يتم بطرق عددها

$$\left(C_{r_1}^{n_1}\right)\left(C_{r_2}^{n_2}\right)\left(C_{r_3}^{n_3}\right)$$

وهذا هو عدد الحالات المواتية

وبالتالي يكون الاحتمال = $\dfrac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

$$\frac{C_{r_1}^{n_1}\,C_{r_2}^{n_2}\,C_{r_3}^{n_3}}{C_R^N}$$

حيـــث

$$R = r_1 + r_2 + r_3$$

$$= n_1 + n_2 + n_3$$

ويمكننا أن نعمم النتيجة فنقول :

إذا كان لدينا كيس بداخله N كرة متماثلة منها n_1 كرة من اللون الأول و n_2 كرة من اللون الثاني و ... و n_z كرة من اللون Z وسحبنا دون إعادة R

كرة فإن احتمال أن يكون من بين الكرات المسحوبة r_1 كرة من اللون الأول و r_2 من اللون الثاني و ... و r_z من اللون z هو :

$$\frac{\subset_{r_1}^{n_1} \subset_{r_2}^{n_2} \cdots \subset_{r_z}^{n_z}}{\subset_{R}^{N}}$$

وهذه الصيغة تدعى بالقانون الاحتمالي الهايبرجيومتري

مثـال ١٦:

قاعة فيها ١٠ طلاب و ٥ طالبات أخذت عينه عشوائية حجمها ٢٠%

فما هو احتمال:

i) أن تتكون من طالبين وطالبة.

ii) أن تحتوي على طالبات.

الحـــل:

i) بتطبيق القانون الهايبرجيومتري يكون احتمال طالبين وطالبة =

$$\frac{\subset_{2}^{10} \subset_{1}^{5}}{\subset_{3}^{15}} = \frac{225}{455}$$

ii) احتمال أن تحتوي على طالبات يعني أن تحتوي على طالبة على الأقل وهذا يساوي واحد ناقص احتمال أن يكونوا جميعاً من الطلاب

$$= 1 - \frac{\subset_{3}^{10} \subset_{0}^{5}}{\subset_{3}^{15}} = \frac{335}{455}$$

أو هو احتمال أن تحتوي على طالبة أو طالبتين أو ثلاث طالبات

$$\frac{\subset_{1}^{5} \subset_{2}^{10} + \subset_{2}^{5} \subset_{1}^{10} + \subset_{3}^{5} \subset_{0}^{10}}{\subset_{3}^{15}} = \frac{335}{455}$$

▪ التوقع الرياضي واستخداماته الاقتصادية Expectation

التوقع الرياضي هو وسيلة الغرض منها ربط نظرية الاحتمالات بالمسائل المالية ، فإذا افترضنا أن P ترمز إلى احتمال نجاح شخص في مغامرة ما و X ترمز إلى قيمة المبلغ الذي يحصل عليه عند نجاحه فإن حاصل ضرب P.X يسمى بتوقع الشخص أو أمله من هذه المغامرة.

$\therefore$ التوقع = مقدار الرهان × احتمال الكسب

ونرمز للتوقع بالرمز E

$$E = P.X$$

هذا وإذا كان المبلغ χ يستحق الدفع بعد n من الزمن وكانت i هي معدل الفائدة فإن القيمة الحالية للتوقع =

$$P.X\ (1+i)^{-n} = \frac{P\,.\,X}{(1+i)^{n}}$$

<u>مثـال ١٧</u> :

في لعبة من ألعاب الرهان يربح اللاعب ٥ دنانير إذا سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق اللعب (٥٢ ورقة) وكانت الورقة المسحوبة من النوع "سباتي" فما هو الثمن العادل الذي يجب دفعه لقاء كل عملية سحب؟

<u>الحـــل</u>:

احتمال الربح = احتمال سحب ورقة "سباتي" = $\frac{1}{4}$

فإذا ضربنا هذا الاحتمال بقيمة الجائزة أمكننا الحصول على قيمة التوقع وهو الثمن العادل لكل سحبه

$$E = P.X.$$
$$= \tfrac{1}{4}(5) = 1.25$$

أي أن السعر العادل لكل سحبه يساوي دينار وربع الدينار.

مثـال ١٨:

كم يبلغ التوقع الرياضي (أي مقدار الرهان) المنتظر أن يدفعه لاعب يرغب في كسب رهان قدره ١٠٠ دينار إذا كان احتمال الكسب ٠.٤٠ ؟

الحـــل: التوقع الرياضي $= E = P.X. = \frac{40}{100} \times 100 = 40$

مثـال ١٩:

وبفرض أن قيمة الرهان المذكور في المثال السابق تستحق الدفع بعد ٥ سنوات وكان سعر الفائدة ٣.٥% فإن القيمة الحالية للتوقع الرياضي =

$$E = \frac{P.X}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{40}{(1.035)^5}$$

$$= \frac{40}{1.1876862}$$

$$= 33.6789 = 33.7$$

ومعنى هذا انه إذا استمرت الجهة التي تعهدت بدفع قيمة الرهان إلى الفائزين بتحصيل الاشتراكات السنوية من اللاعبين وقدر كل منها ٣٣.٧ دينارا ولمدة خمس سنوات فإن جملة هذه الاشتراكات (بواقع فائدة سنوية مركبة ٣.٥%) تكون كافية لدفع مبلغ قيمة الرهان وهي ١٠٠ دينار لكل فائز بعد ٥ سنوات.

▪ علاقـــة التوقـع بالتأمين على الحيـــاة

لما كانت قيمة شراء التوقع الرياضي هي المبلغ الذي يجوز المغامرة به في كل محاولة لكسب مبلغ متوقع هو قيمة الرهان فإن فكرة التوقع الرياضي هذه تعتبر أساس فكرة التأمين على الحياة إذ أن شركات التأمين تتعهد بدفع قيمة الرهان (المبلغ المؤمن عليه) للاعبين (المأمنين) الذين يقومون بدفع القيمة الحالية للتوقع الرياضي لها بغرض التأمين لديها.

مثـال ٢٠: ما هي القيمة الحالية للتوقع الرياضي على أساس الفائدة المركبة بمعدل ٣.٥% سنوياً التي يسددها شخص في سن العشرين لشركة تأمين تعهدت بأن تدفع له مبلغ ٢٠٠٠ دينار إذا بلغ سن الأربعين؟

الحـــل: أن قيمة احتمال البقاء على قيد الحياة يمكن أخذها أو حسابها من جداول الحياة التي تعرف باسم "جداول الخبرة الأمريكية للحياة" وهي جداول ٧ ، ٨ ، ٩ من الجداول المالية التي طبعت في أميركا عام ١٨٦٧ ولا يزال العمل بها جارياً حتى الآن وهي محسوبة لدفعة نظرية عددها ١٠٠٠٠٠ شخص.

احتمال البقاء على قيد الحياة =

$$P = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

حيث l_x هي عدد الباقين على قيد الحياة عند العمر x

l_{x+n} هي عدد الباقين على قيد الحياة عند العمر $x + n$

من جداول الحياة الأميركي رقم ٧

$$P = \frac{l_{40}}{l_{20}} = \frac{78106}{92637} = 0.84314$$

القيمة الحالية للتوقيع الرياضي هي

$$\frac{P.X}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{0.84314 \times 2000}{(1.035)^{20}} = \frac{1686.28}{1.9897877} = 847.467$$

ومعنى هذا أن على كل شخص في سن العشرين من المؤمنين على حياتهم أن يدفع إلى شركة التأمين اشتراكا وقسطا سنويا قيمته ٨٤٧.٤٦٧ دينار مقابل تعهدها بأن تدفع له مبلغ ٢٠٠٠ دينار إذا بلغ سن الأربعين . وذلك لأن الشركة باستثمارها هذه الاشتراكات أو الأقساط بسعر ٣.٥% سنوياً لمدة ٢٠ سنة فإنه سيكون لديها رأسمال يكفي لدفع مبلغ ٢٠٠٠ دينار لكل من يظل حياً من المشتركين حتى سن الأربعين.

▪ علاقة التوقع باختيار الاستثمارات

ان تطبيق قاعدة التوقع في اختيار الاستثمارات تقوم على أساس حساب القيم الحالية للدخول المتوقعة ثم بعد ذلك تقوم بطرح المبالغ المستثمرة من مجموع القيم الحالية للدخول المتوقعة وحساب التوقع للناتج.

مثـال ٢١ : يود شخص في استثمار مبلغ ١٠٠٠ دينار في أحد المشاريع الصناعية التي يقدر لها عمراً استثمارياً قدره سنتان حيث أن احتمالات الربح أو الخسارة في كل من السنتين هي كما يلي:

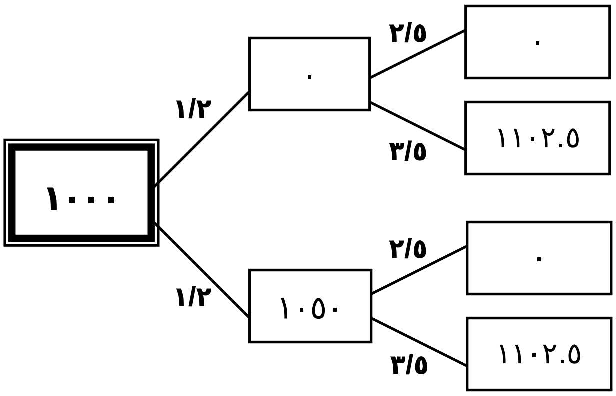
السنة الأولى
١- احتمال عدم الحصول على أي مردود هو ½
٢- احتمال الحصول على مردود قدره (١٠٥٠) دينار هو ½

السنة الثانية
١- احتمال عدم الحصول على أي مردود هو $\frac{2}{5}$

٢- احتمال الحصول على مردود قدره (١١٠٢.٥) دينار هو $\frac{3}{5}$

فإذا علمنا أن معدل الفائدة المعمول به في الأسواق المالية هو ٥% فهل ينصح هذا الشخص بإجراء الاستثمار أم لا؟

الحـــل: لاتخاذ قرار حول إجراء الاستثمار أو عدم إجرائه علينا أولاً أن نقوم بتمثيل المشكلة بيانيا كما يلي:



وبعد ذلك نقوم بحساب القيم الحالية للدخل المتوقع الحصول عليه وحسب مختلف الاحتمالات ومن ثم نطرح منها قيمة المبلغ المستثمر وذلك كما يلي:

1. $0 - 1000 = -1000$
2. $\frac{1102.5}{(1.05)^2} - 1000 = 0$
3. $\frac{1050}{1.05} - 1000 = 0$
4. $\frac{1102.5}{(1.05)^2} + \frac{1050}{1.05} - 1000 = 1000$

وبعد ذلك نقوم بحساب الاحتمالات وذلك كما يلي:

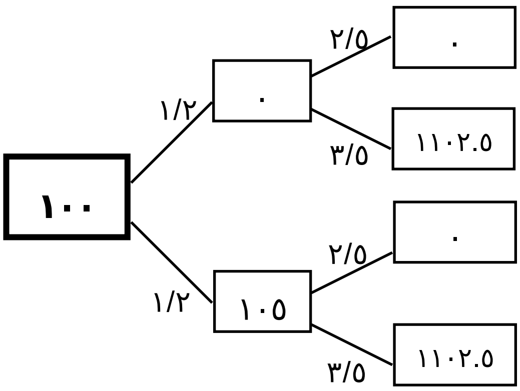
$$\frac{2}{10} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} =$$ الاحتمال الأول

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} =$$ الاحتمال الثاني

$$\frac{2}{10} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} =$$ الاحتمال الثالث

$$\frac{3}{10} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} =$$ الاحتمال الرابع

بعد أن قمنا بحساب القيم الحالية لمختلف الدخول المتوقعة والاحتمالات المقابلة لها فانه يمكننا حساب التوقع أي الدخل المتوقع وذلك كما يلي:



التوقع	الاحتمال	القيمة الحالية للدخل
-٢٠٠	٢/١٠	-١٠٠٠
٠	٣/١٠	٠
٠	٢/١٠	٠
٣٠٠	٣/١٠	١٠٠٠
١٠٠		

بما أن قيمة التوقع للدخل المتوقع الحصول عليه موجبه وتعادل ١٠٠ وحدة نقدية إذا فأننا ننصح هذا الشخص بإجراء الاستثمار.

تماريـــــن

الفصـــــل الأول

١. سحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب (٥٢ ورقة) بحيث تعاد الورقة الأولى قبل سحب الثانية. أحسب الاحتمالات الآتية:

أ. أن تكون الورقتان المسحوبتان من اللون الأسود $\left(\frac{1}{4}\right)$

ب. أن تكون الورقتان المسحوبتان من شكل معين (ديناري) $\left(\frac{1}{16}\right)$

ج. أن تكون الورقتان المسحوبتان من نفس الشكل $\left(\frac{1}{4}\right)$

٢. لدينا ثلاثة أزواج من الأشخاص المتزوجين . اخترنا من كل زوج فرداً واحداً بدون تحيز فما هو احتمال :

أ. أن يكون الأفراد الثلاثة المختارون من جنس واحد $\left(\frac{1}{4}\right)$

ب. أن يكونوا رجلين وامرأة $\left(\frac{3}{8}\right)$

٣. رميت قطعة نقود خمس مرات أحصر النتائج الممكنة ، وأحسب احتمال كل منها.

٤. ما هو احتمال ظهور ثلاثة صور في رمية واحدة لثلاثة قطع من النقود؟ $\left(\frac{1}{8}\right)$

٥. يقوم شخص برمي قطعة نقود فإذا حصل على صورة وضع ثلاث كرات سوداء في صندوق أما إذا حصل على كتابة فأنه يضع كرتين سوداء وكرة بيضاء. فإذا كرر الشخص هذه العملية n مرة ثم سحب كرة من الصندوق. فاحسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء $\left(\frac{1}{6}\right)$

٦. كيسان الأول به ٥ كرات متماثلة منها ثلاث كرات حمراء وكرتان بيضاوان والثاني به ٧ كرات منها ثلاث كرات حمراء وأربع كرات بيضاء. سحبت كرة من كل كيس فما هو احتمال أن تكون واحدة منهما على الأقل بيضاء؟ (٢٦/٣٥)

٧. كيس يحتوي على ٣ كرات بيضاء و ٦ كرات حمراء و٣ كرات سوداء من حجم واحد سحبت ٣ كرات عشوائياً وبدون إعادة ، فما هو احتمال أنها ستكون من لون واحد؟ (١/١٠)

٨. كيس به ١٢ كرة متماثلة منها ٥ كرات بيضاء و٣ كرات حمراء و ٤ كرات سوداء سحبت ٣ كرات من الكيس أحسب الاحتمالات الآتية:

أ. احتمال عدم ظهور كرات حمراء (٢١/٥٥)

ب. احتمال ظهور كرة واحدة حمراء (٢٧/٥٥)

ج. احتمال أن تكون كرة واحدة حمراء على الأقل (٣٤/٥٥)

د. احتمال أن تكون الكرات كلها من لون واحد (٣/٤٤)

ه. احتمال أنه ليس هناك كرتان أو أكثر من لون واحد (٣/١١)

٩. بيع في أحد الحفلات ١٠٠ بطاقة بسعر دينار واحد للبطاقة الواحدة، وخصصت جائزة قدرها ٥٠ دينار للبطاقة الفائزة فهل كان سعر البطاقة عادلا أم لا؟

١٠.كيس به ١٠٠ كرة متماثلة عدا اللون منها ٤٥ كرة بيضاء و ٣٠ كرة حمراء و٢٥ كرة سوداء سحبت كرة وسجل لونها وأعيدت إلى الكيس ثم سحبت كرة ثانية وسجل لونها وأعيدت إلى الكيس ثم سحبت كرة ثالثة ما هو احتمال أن تكون ألوان الكرات الثلاث المسحوبة على الترتيب أبيض ، أسود، وأحمر؟ (٠.٠٣٣٧٥)

١١. سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب (٥٢ ورقة) ثم أعيدت وسحبت ورقة ثانية. أحسب الاحتمالات التالية:

أ. أن تكون الورقة الثانية من نفس لون الورقة الأولى (١/٢)

ب. أن تكون الورقة الثانية هي نفس الورقة الأولى (١/٥٢)

ج. أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد (١٠/١٦٩)

د. أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد أو نفس الصورة (١/١٣)

ه. أن تحمل كل من الورقتين نفس الصورة (٣/١٦٩)

١٢. رميت قطعة نقود ٣ مرات متتالية

أ. ما هو احتمال الا تحدث صورتان متتاليتان في الرميات الثلاثاء (٥/٨)

ب. ما هو احتمال الا تحدث صورتان متتاليتان أو كتابتان في الرميات الثلاث (١/٤)

١٣. إذا كان احتمال أن يتأخر أياس عن عمله $\frac{2}{3}$ إذا ذهب إلى العمل ماشياً و ١/٤ إذا ذهب بالحافلة و ١/٦ إذا ذهب بسيارته . فما هو احتمال أن يتأخر عن عمله في صباح أحد الأيام إذا اختار وسيلته بطريقة عشوائية؟(١٣/٣٦)

١٤. إذا كان لدينا صندوقين الأول يحتوي على ٥ مناديل معيبة و ٨ مناديل سليمة والثاني يحتوي على ٦ مناديل معيبة و١١ سليمة. فما هو احتمال أن يكون المنديل المسحوب عشوائياً من أحد الصندوقين معيباً ؟ (٠.٣٦٨٧٨)

١٥. لتكن التجربة هي اختيار عائله لديها أربعة أطفال وتسجيلهم حسب الجنس وتسلسل الولادة. اكتب الفراغ العيني لهذه التجربة ثم احسب الاحتمالات التالية:

أ. عند العائلة بنت واحدة (١/٤)

ب. عند العائلة أكثر من بنتين (٥/١٦)

ج. عند العائلة ٣ بنات على الأكثر (١٥/١٦)

١٦. تقدمت إحدى شركات البناء إلى مناقصتين A , B فإذا كان احتمال أن تحصل على المناقصة A هو ٠.٦ واحتمال أن تحصل على المناقصة B هو ٠.٣ واحتمال أن تحصل على المناقصتين معاً هو ٠.١ فما هو احتمال:

- أن تحصل الشركة على المناقصة A أو المناقصة B (٠.٨)

١٧. دع A , B حادثين في الفراغ العيني S حيث

$$P(AB)=\frac{1}{5} \qquad P(B/A)=\frac{1}{2} \qquad P(A/B)=\frac{1}{3}$$

أوجـــد $P(A)$, $P(B)$ $\left(\frac{3}{5} , \frac{2}{5}\right)$

١٨. في أحد مصانع المصابيح الكهربائية إذا كانت الماكنات M_1 و M_2 و M_3 تصنع على الترتيب ٠.٣٠ و ٠.٣٠ و ٠.٤٠ من مجموع الإنتاج وإذا كان ١ و ٣ و ٢ بالمئة من إنتاج الماكينات الثلاث على الترتيب هو إنتاج معيب. سحب مصباحا عشوائياً من إنتاج أحد الأيام وجد أنه معيب فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح من صنع الماكينة M_1 ؟ من صنع M_2؟ من صنع $M3$؟ (٣/٢٠ ، ٩/٢٠ ، ٨/٢٠) .

١٩.إذا سحبنا ٥ ورقات من مجموعة أوراق اللعب (٥٢ ورقة) بدون إعادة ، فما هو احتمال احتواء هذه الأوراق الخمسة على ورقة واحدة بها صورة شايب؟ (٣٢٤٣/١٠٨٢٩).

٢٠. الماكينة ١ تنتج ٦٠% من إنتاج مصنع البطاريات الجافة والماكينة ٢ تنتج الباقي. ٥% من إنتاج الماكينة ١ معيب بينما ٢% من إنتاج الماكينة ٢ معيب. فما هو احتمال ان تكون بطارية معيبة قد صنعت في الماكينة ١؟ (٣٠/٣٨)

حـل تمـاريـن الاحتـمالات

الفصـــل الأول

.١

i) $\frac{26}{52} \cdot \frac{26}{52} = \frac{1}{4}$

ii) $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{16}$

ii) $\left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) = \frac{1}{4}$

٢. عدد الحالات الممكنة هو = $٢^{٣}$ ، وهي كما في الرسم

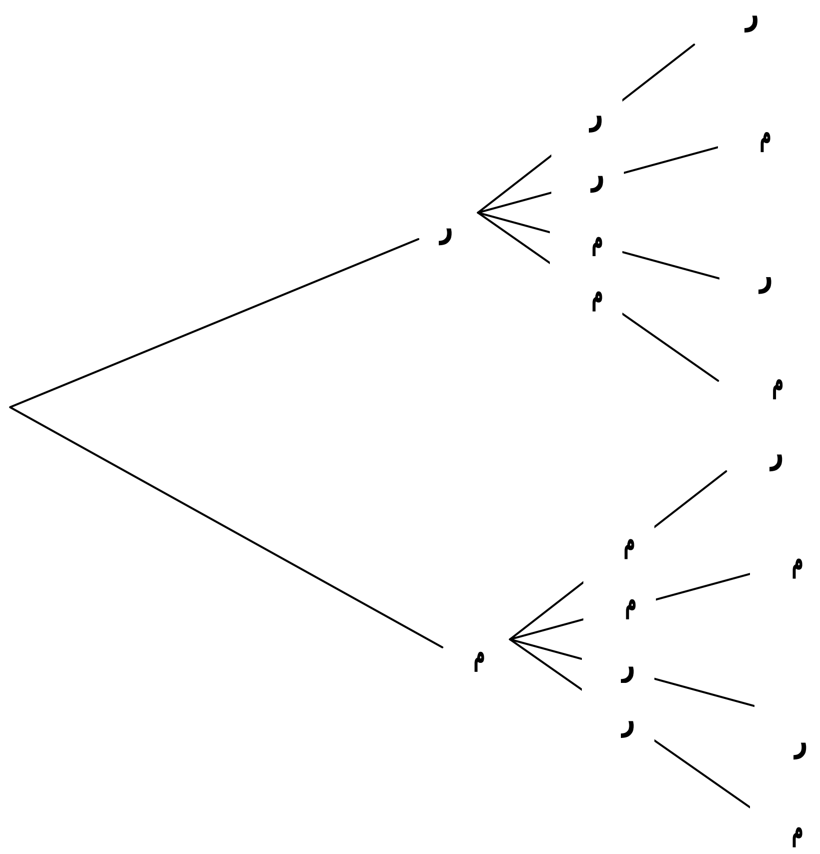
i) احتمال الحصول على الثلاثة من جنس واحد ، أي ٣ رجال أو ٣ نساء.

مـن الرسـم

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

أو

$$(1/2 . 1/2 \ . \ 1/2) + (1/2 \ . \ 1/2 \ . \ 1/2) = \frac{1}{4}$$



ii) احتمال الحصول على رجلين وامراة

من الرسم

$$= \frac{\text{الحالات المواتية}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{3}{8}$$

أو

$$= \frac{3}{8} = \frac{C_2^3}{8}$$

٣. الحالات الممكنة

$$٢^{٥} = ٣٢$$

احتمالات الصورة = احتمالات الكتابة =

$$C_5^5 \div 32 = 1/32$$
$$C_4^5 \div 32 = 5/32$$
$$C_3^5 \div 32 = 10/32$$
$$C_2^5 \div 32 = 10/32$$
$$C_1^5 \div 32 = 5/32$$
$$C_0^5 \div 32 = 1/32$$

٤.

p (ص ص ص) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot = \frac{1}{8}$

٥. عدد الكرات الناتجة عن اللعبة = $3n$ لأنه يضع ٣ كرات مع كل رمية

احتمال الحصول على صورة = احتمال الحصول على كتابة = ١/٢

∴ عدد المرات التي يضع فيها ٣ كرات سوداء = عدد المرات

التي يضع فيها كرتين سوداوين وكرة بيضاء ويساوي $\frac{n}{2}$

∴ عدد الكرات البيضاء =

$$\frac{n}{2} \times 1 = \frac{n}{2}$$

عدد الكرات السوداء =

$$\frac{n}{2} \times 3 + \frac{n}{2} \times 2 = \frac{5n}{2}$$

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء = $\frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

$$= \frac{n}{2} \div 3n$$

$$= \frac{n}{2} \times \frac{1}{3n} = \frac{1}{6}$$

٦. الحالات الممكنة الحصول هي:

بيضاء	حمراء
حمراء	بيضاء
بيضاء	بيضاء
حمراء	حمراء

احتمال أن تكون كره على الأقل بيضاء = واحد ناقص احتمال أن تكون الكرتان حمراوان .

$$1 - \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7}\right) = 1 - \frac{9}{35} = \frac{26}{35}$$

حـــل آخـر

احتمال أن تكون كره على الأقل بيضاء = احتمال الأولى بيضاء والثانية حمراء

أو الأولى حمراء والثانية بيضاء

أو الأولى بيضاء والثانية بيضاء

$$= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}\right)$$

$$= \frac{26}{35}$$

٧. الاحتمال المطلوب = احتمال أن تكون الثلاث كرات بيضاء او الثلاث حمراء أو الثلاث سوداء

$$P = \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}$$

أو

$$= \frac{C_3^3 + C_3^6 + C_3^3}{C_3^{12}} = \frac{1}{10}$$

٨. الحالات الممكنة

$$C_3^{12} = 220$$

i) P (عدم ظهور كرات حمراء) $= \dfrac{C_3^9 \quad C_0^3}{C_3^{12}}$

$$= \frac{84}{220} = \frac{21}{55}$$

ii) P (كرة واحدة حمراء) $= \dfrac{C_1^3 \quad C_2^9}{C_3^{12}}$

$$= \frac{27}{55}$$

iii) P (كرة واحدة على الأقل حمراء) $= \dfrac{C_1^3 \; C_2^9}{C_3^{12}} + \dfrac{C_2^3 \; C_1^9}{C_3^{12}} + \dfrac{C_3^3 \; C_0^9}{C_3^{12}}$

$$= \frac{34}{55}$$

أو

$= 1-P$ (عدم ظهور كرة حمراء)

$= 1-\frac{21}{55}$

$= \frac{34}{55}$

iv) P (الكرات كلها من نفس اللون) $= \frac{C_3^5 + C_3^4 + C_3^3}{C_3^{12}}$

$= \frac{3}{44}$

v) P (عدم وجود كرتين من نفس اللون) $= \frac{C_1^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3}{C_3^{12}} = \frac{3}{11}$

٩. السعر = الاحتمال × قيمة الجائزة

$= \frac{1}{100} \times$ ٥٠

$= \frac{1}{2}$

∴ السعر العادل يجب أن يكون نصف دينار.

∴ سعر البطاقة غير عادل.

١٠. الاحتمال المطلوب

$P = \frac{45}{100} \cdot \frac{25}{100} \cdot \frac{30}{100}$

$= 0.03375$

.١١

i) نفس احتمال الحصول على اللون في الورقة الأولى

= ١/٢ لأن هناك لونين فقط أحمر وأسود

ii) نفس احتمال الورقة الأولى = $\frac{1}{52}$

الاحتمال المطلوب = احتمال أن تكون الورقتين

١ أو ٢ أو ... أو ١٠

$$= \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}\right) + \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}\right) + \ldots$$

$$= 10\left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}\right)$$

$$= \frac{10}{13^3}$$

$$= \frac{10}{169}$$

iii) $\frac{1}{13} = \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52}\right) 13 =$

.١٢ i. عدد الحالات الممكنة ٨

S = { ص ك ك، ص ك ص ، ص ص ك ، ص ص ص
ك ص ص ، ك ص ك ، ك ك ص ، ك ك ك }

عدد الحالات المواتية ٥

∴ الاحتمال المطلوب = $\frac{5}{8}$

.ii $P = \frac{2}{8}$

$= \frac{1}{4}$

١٣. احتمال كل من الاختيارات الثلاثة = (١/٣)

الاحتمال المطلوب هو احتمال الذهاب ماشياً ويتأخر أو الذهاب بالحافلة ويتأخر أو الذهاب بسيارته ويتأخر

$$P\ (\text{التأخير}) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{13}{36}\right)$$

١٤. احتمال اختيار أي صندوق = ١/٢

احتمال أن يكون قد سحب من الصندوق الأول ومعيب = $\frac{1}{2}\times\frac{5}{13}$

احتمال أن يكون قد سحب من الصندوق الثاني ومعيب = $\frac{1}{2}\times\frac{6}{17}$

$$P\ (\text{معيب}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{13}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{17}\right)$$

$$= 0.36878$$

١٥. $S = 2^4 = 16$

i) $P\ (\text{بنت واحدة}) = \frac{C_1^4}{16}$

ii) $P\ (\text{أكثر من بنتين}) = \frac{C_3^4 + C_4^4}{16}$

iii) $P\ (\text{ثلاث بنات على الأكثر}) = 1-\frac{C_4^4}{16}$

$$= \frac{15}{16}$$

أو بتطبيق قانون ثنائي الحدين $= \frac{C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4}{16}$

.١٦

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= 0.6 + 0.3 - 0.1$$

$$= 0.8$$

.١٧

$$P(AB) = P(A)\ P(B/A)$$

$$= P(B)\ P(A/B)$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{P(AB)}{P(B/A)} = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A/B)} = \frac{1/5}{1/3} = \frac{3}{5}$$

.١٨ لتكن

$P(D)$ = احتمال أن يكون المصباح معيبا

$P(M_1)$ = احتمال أن يكون المصباح من صنع M_1

$P(M_2)$ = احتمال أن يكون المصباح من صنع M_2

$P(M_3)$ = احتمال أن يكون المصباح من صنع M_3

بيانات المسألة تعطي الاحتمالات الآتية

$$P(M_1) = 0.3 \quad P(D/M_1) = 0.01$$

$$P(M_2) = 0.3 \quad P(D/M_2) = 0.03$$

$$P(M_3) = 0.4 \quad P(D/M_3) = 0.02$$

دعنا الآن نحسب الاحتمالات التالية

$P(M_1D) = P(M_1)\ P(D/M_1) = (0.3)\ (0.01) = 0.003$

$P(M_2D) = P(M_2)\ P(D/M_2) = (0.3)\ (0.03) = 0.009$

$P(M_3D) = P(M_3)\ P(D/M_3) = (0.4)\ (0.02) = 0.008$

هذه الاحتمالات جميعاً يمكن تمثيلها بيانيا.

باستخدام نظرية بيز

$$P(M_1 / D) = \frac{P(M_1D)}{P(M_1D) + P(M_2D) + P(M_3D)}$$

$$= \frac{0.003}{0.003 + 0.009 + 0.008} = \frac{3}{20}$$

$$P(M_2 / D) = \frac{P\ (N_2D)}{P\ (M_1D) + P\ (M_2D)\ + P(M_3D)}$$

$$= \frac{0.009}{0.020} = \frac{9}{20}$$

$$P(M_3 / D) = \frac{0.008}{0.020} = \frac{8}{20}$$

ويمكن تلخيص الاحتمالات السابقة بالجدول التالي:

الحادث	الاحتمال القبلي	الاحتمال الشرطي	الاحتمال المركب	الاحتمال البعدي
M_1	0.30	0.01	0.003	3/20
M_2	0.30	0.03	0.009	9/20
M_3	0.40	0.02	0.008	8/20
المجموع	**1.00**		**0.020**	**1.00**

١٩. باستخدام القانون الهايبرجيومترى

$$P\ (\text{شايب واحد}) = \frac{C_1^4\ C_4^{48}}{C_5^{52}}$$

$$= \frac{3243}{10829}$$

حل آخر هناك خمس حالات متنافية لوقوع هذا الحادث تختلف عن بعضها في ترتيب سحب ورقة الشايب، لنأخذ الحالة الأولى التي يظهر فيها الشايب من أول سحب في هذه الحالة يكون الاحتمال =

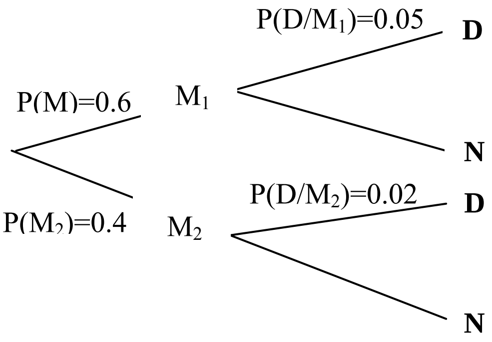
$$\frac{4}{52}\times\frac{48}{51}\times\frac{47}{50}\times\frac{46}{49}\times\frac{45}{48}=\frac{4243}{54145}$$

وحيث أن الحالات الخمس متماثلة فان الاحتمال المطلوب هو

$$5\times\frac{3243}{54145}=$$

$$=\frac{3243}{10829}$$

٢٠.



$$P(M_1D) = P(M_1)\,P(D/M_1)$$
$$= 0.60 \times 0.05 = 0.03$$

$$P(M_2D) = P(M_2)\,P(D/M_2)$$
$$= 0.40 \times 0.02 = 0.008$$

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1D)}{P(M_1D) + P(M_2D)_2}$$
$$= \frac{0.03}{0.03 + 0.008}$$
$$= \frac{0.03}{0.038} = \frac{30}{38}$$
$$= 0.789\,5$$

الفصـــــــل الـــثـاني

الفصـــل الثـــاني

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

RANDOM VARIABLES AND PROBABILITY DISTRIBUTIONS

مر معنا في الفصل السابق عدة تجارب مثل حذف زهرة النرد أو رمي قطعة النقد أو سحب كره أو سحب ورقة من أوراق اللعب ... الخ ، ان النتائج التي يمكن الحصول عليها بتجارب عشوائية، رقمية كانت كما في حالة النرد أو نوعية كما في الكرات وقطعة العملة وورق اللعب وغيرها تدعى بالمتغيرات العشوائية.

- المتغير العشوائي
هو المتغير الذي يتم الحصول على قيمته نتيجة لتجربه عشوائية

المتغير العشوائي يمكن أن يكون متقطعا DISCRETE أو متصلاً CONTINOUNS

المتغير المتقطع:

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة من قيم الأعداد الصحيحة مثل ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

أمثلة على المتغير المتقطع :

- عدد أفراد الأسرة في عينة إحصائية مكونه من عده أسر
- عدد الأهداف المسجلة لفريق رياضي خلال الدورى العام
- عدد السيارات المباعه في الشهر لإحدى شركات السيارات ... الخ

المتغير المتصل:

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ أي قيمة داخل مدى معين مثل مقاييس الطول والوزن والزمن والقيمة.

أمثلة على المتغير المتصل:

- المبيعات الشهرية من الحليب لإحدى مؤسسات الألبان .
- أطوال طلبة الجامعة .
- أوزان طلاب الصف الأول الابتدائي في إحدى المدارس.
- أثمان البرميل الواحد للنفط الكويتي خلال السنة الأخيرة ... الخ.

▪ التوزيـــعات الاحتماليــة المتقطعــة Discrete Probability Distributions

إذا رمينا زهره نرد فإنه يمكننا ان نمثل النتائج الممكنة واحتمالات كل منها بالجدول التالي:

الوجه	١	٢	٣	٤	٥	٦
الاحتمال	١/٦	١/٦	١/٦	١/٦	١/٦	1/6

وإذا رمينا زهرتي نرد وكنا مهتمين بمجموع وجهي الزهر فانه يمكننا أن نمثل النتائج الممكنة واحتمال كل منها بالجدول التالي:

المتغير العشوائي مجموع الوجهين	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

هذا الجدول الذي يتضمن قيم المتغير الشعوائي والاحتمالات المناظرة لها يسمى بالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع ، وهكذا فإن :

التوزيع الاحتمالي لمجموعة القيم المتقطعة التي يأخذها متغير عشوائي متقطع هو الجدول أو القائمة التي تتضمن جميع القيم الممكنة لهذا المتغير مع الاحتمال الخاص بكل منها.

- دالة كثافة الاحتمال **Probabily Density Function (P.D.F.)**

إذا كان لدينا متغير متقطع X يأخذ قيما مختلفة x_1 , x_2 , x_3 ... x_n باحتمال$P(X=x_i)$ حيث $i = 1, 2 ...n$ فإن هذا الاحتمال يسمى بالداله الاحتمالية أو كثافة الاحتمال ويرمز لها بالرمز $f(x_i)$.

وهكذا فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x هي الاحتمال بأن يأخذ x أي قيمة من قيمة الممكنة أي $P(X=xi)$ ويرمز لها بالرمز $f(x)$ على أن يتحقق ما يلي: i) $f(x) \geq 0$ ii) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

وتأخذ داله كثافة الاحتمال للمتغير المتقطع X الشكل التالي:

X = x	x_1 x_2 …………..x_n

f(x) = P (X=x)	$f(x_1)$ $f(x_2)$ ……….$f(x_n)$

مثـــال ١ :

إذا كان لدينا المتغير العشوائي المتقطع X وهو عدد مرات الحصول على وجه الكتابة عند رمي قطعة نقدية مرتين فإن :

الحالات الممكنة أو الفراغ العيني= { صـ صـ، صـ ك، ك صـ ، ك ك }

القيم الممكنة ل X هي ٠ ، ١ ، ٢

أذن

$$f(x) = P(X=x)$$
$$f(0) = P(X=0) = 1/4$$
$$f(1) = P(X=1) = 1/2$$
$$f(2) = P(X=2) = 1/4$$

ويكون التوزيع الاحتمالي لقيم X الممكنة هو كما يلي:

X = x	٠	١	٢
f(x) = P(X=x)	١/٤	١/٢	١/٤

ويمكن رسم هذا الجدول بيانيا كما يلي:

▪ دالـــة التوزيع الاحتمالي Probability Distribution

لكننا في الغالب لا نهتم فقط باحتمال أخذ المتغير العشوائي لقيمة واحدة من قيمة الممكنة وإنما نهتم أيضاً باحتمال أخذ المتغير X لقيمة أقل من أو تساوى قيمة ما من قيمة الممكنة وهذه الدالة ندعوها بداله التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي الاحتمال بأن X أقل من
أو تساوي x أي $P(X \le x)$ **ويرمز لها بالرمز F(x) ويكون**

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{xi \le x} f(xi)$$

▪ التوزيعات الاحتمالية المتصلة Continuous Probability Distributions

يمكننا أيضاً أن نعرف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل بأنه الجدول أو القائمة الذي يبين لنا القيم المختلفة لهذا المتغير المتصل والاحتمال الخاص بكل قيمة من هذه القيم.

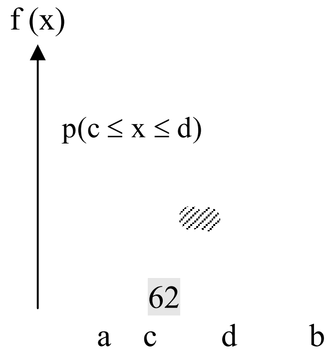
<u>مثـال ٢ :</u>

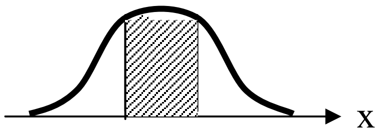
نفرض أن لدينا آلة ميكانيكية تملأ أكياسا من القهوة زنه كل كيس باوند واحد من القهوة ، ولكن لوجود خلل في أحد المراحل الميكانيكية يختلف الوزن من كيس إلى آخر ، فوزن الكيس هنا متغير عشوائي متصل والجدول التالي يعطي وزن ١٠٠ كيس مملوءه بهذه الطريقة :

قيمة المتغير العشوائي X	عدد الاكياس (التكرارات)	الاحتمال f (x)
0.90	1	0.01
0.95	7	0.07
0.99	25	0.25
1.00	32	0.32
1.01	30	0.30
1.05	5	0.05
	100	**1.00**

فلو أردنا أن نعرف قيمة احتمال اختيار كيس عشوائيا بوزن يتراوح ما بين أي قيمتين لنقل ٠.٩٥ و ١.٠٥ فان عدد القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي تكون غير محدودة. ولذلك لا يمكننا أن نعالج المشكلة في حالة المتغير المتصل كما هو الحال في حاله المتغير المتقطع. على كل حال فان مفهوم المساحة وخواصها تمكننا من تحديد الاحتمالات في حاله المتغيرات العشوائية المتصلة.

ليكن X متغيرا متصلاً يقع في المدى (a.b) أي $a \leq x \leq b$ كما في الشكل التالي





فان احتمال أن يقع المتغير العشوائي المتصل x في المدى (a, d) يرمز له بالرمز $P(c \le X \le d)$ ويعطي كما يلي:

$P(c \le x \le d)$ = المساحة المحصورة بين الدالة f(x) والمحور الأفقي والمحددة بـ x = c , x = d أي المساحة المظللة في الشكل .

تكون f(x) دالة كثافة الاحتمال للمتغير المتصل X إذا كان :

i) $f(x) \ge 0$ f(x) موجبه

ii) $\int_R f(x)\,dx = 1$ كامل المساحة تحت المنحنى = 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \qquad (a \le x \le b)$$

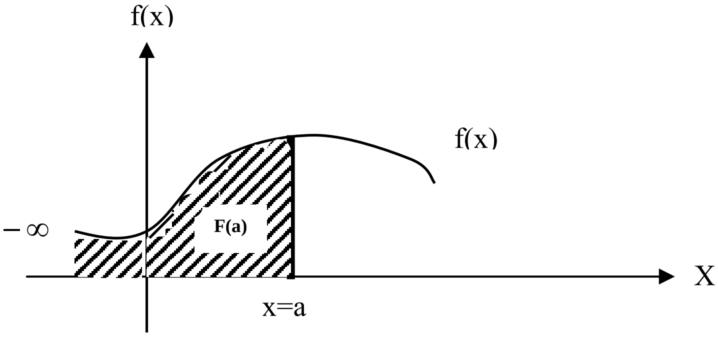
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad (-\infty \le x \le \infty)$$

▪ دالة كثافة الاحتمال التجميعية للمتغير العشوائي المتصل

هي الاحتمال بأن X أقل من او يساوي a أي $P(x \le a)$ ويرمز لها بالرمز F (x) وهكذا

$$F(x) = P(\bar{x} \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

وهي كما في الشكل التالي:



مثـــال ٣:

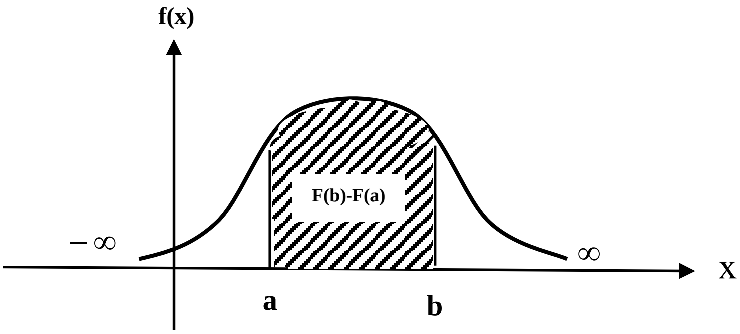
احتمال ان تقع X في المدى (a,b) يساوي

$$P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

$$= f(b) - f(a)$$

وبالرســم :



تمـــــارين

الفصـــــل الثـــاني

١- إذا كان c ثابت و x متغير عشوائي داله احتماله هي

$$f(x) = c\binom{5}{x}$$

$$x = 0, 1, \ldots, 5$$

فأوجـــد قيمة الثابت c

٢- إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السير في مدينة ما وكانت C ثابت وداله الاحتمال X هي على الصورة التالية :

X = x	٠	1	2	3	4	5
f(x) = P(X=x)	C	2C	3C	4C	1.5C	0.5C

أولا: أوجد قيمة الثابت C

ثانيا: أوجد:

i) $P(x < 3)$

ii) $P(0 < x \leq 4)$

iii) $P(0 < x < 2)$

ثالثا: اكتب داله التوزيع الاحتمالي لـ X

٣- إذا ألقيت قطعة نقدية حتى تم الحصول على وجه الكتابة وكانت X متغير عشوائي يمثل عدد المرات التي ألقيت بها قطعة النقد حتى تم الحصول على وجه الكتابة. أوجد داله احتمال المتغير X .

٤- أريد اختيار أحد اشرطه التسجيل (الكاسيت) من مجموعة من ١٠ أشرطه فإذا كان المتغير العشوائي X يمثل رقم الشريط المختار فأوجد داله الاحتمال لـ X .

٥- إذا كان X متغير عشوائي كثافة احتماله

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

و $0 \le x \le 2$

أوجـــد :

i) $P(0.5 < x < 1.5)$

ii) $P(x > 0.25)$

iii) $P(x < 0.75)$

iv) $P(x > 3)$

٦- إذا كانت

$$f(x) = \frac{2-x}{2}$$

$$0 < x < 2$$

و

أوجـــد :

i) $P(0.5 < x < 1)$

ii) $P(x > 1.5)$

iii) $P(x < 0.3)$

iv) $P(0 < x < 2)$

٧- في أحد الامتحانات الشفوية المكون من خمسة أسئلة ، إذا كان احتمال أن يجيب أحد الممتحنين على أي سؤال أجابه صحيحة هو ٠.٦ . ورمزنا لعدد الأسئلة التي يجيب عليها إجابات صحيحة قبل أول فشل له في الإجابة بالرمز x .

أوجـــد توزيع x الاحتمالي .

٨- دولاب عليه ثلاثة أرقام هي ٢ ، ٣ ، ٤ إذا أدرنا الدولاب مرتين بحيث يؤشر المؤشر في كل مرة على أحد الأرقام الثلاثة وإذا فرضنا أن x تمثل مجموع الرقمين الناتجين . أحصر النتائج الممكنة واستنتج توزيع x الاحتمالي.

٩- إذا كان احتمال أن ينجح الطالب في امتحان الإحصاء هو $\frac{1}{4}$ ، تتقدم للامتحان ثلاثة طلاب. إذا فرضنا بأن x تمثل عدد الناجحين . أحصر النتائج الممكنة واستنتج التوزيع الاحتمالي لـ x .

حل تمارين الفصل الثاني

١-

$$\sum_{\text{all } x} f(x) = 1$$

$$\therefore \sum C \binom{5}{x} = 1$$

$$C \sum \binom{5}{x} = 1$$

$$C \ (1+5+10+10+5+1) = 1$$

$$C = 1/32$$

٢- **أولا:**

$$\sum_{\text{all } x} f(x) = 1$$

$$\therefore \quad C + 2C + 3C + 4C + 1.5C + 0.5C = 1$$

$$\therefore \quad C = 1/12$$

ثانياً:

i) $P(x < 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$= C + 2C + 3C$

$= 6C$

$= 6(1/12)$

$= 1/2$

ii) $P(0 < X \leq 4) = P(X=1) + P(X=2) +$

$P(X=3) + P(X=4)$

$= 2C + 3C + 4C + 1.5C$

$= 10.5. C$

$= 10.5 (1/12)$

$= 10.5/12$

أو

$= 1 – [(P (X=0) + P(X=5)]$

$= 1 – (C + 0.5 C)$

$= 10.5 C$

$= \frac{10.5}{12}$

iii) $P(0 < X <2) = P (X =1)$

$= 2 C$

$= 2/12 = 1/6$

ثالثاً : دالة التوزيع الاحتمالي ل x

$F(x) = P (X \leq x)$

$F(0) = P (X \leq 0) = 1/12$

$F(1) = P (X \leq 1) = 3/12$

$F(2) = P (X \leq 2) = 6/12$

$F(3) = P (X \leq 3) = 10/12$

$F(4) = P (X \leq 4) = 23/24$

$F(5) = P (X \leq 5) = 1$

-٣

$$f(x) = (1/2)^x$$

$$x = 1, 2, \ldots$$

-٤

X = x	1	2	3 ………….10
f(x) = P(X=x)	1/10	1/10	1/10 ……….. 1/10

$f(x) = 1/10 \qquad x = 1, 2, \ldots, 10$

-٥

i) $$P(0.5 < x < 1.5) = \int_{0.5}^{1.5.} 1/2 \; dx$$

$$= \left|\frac{x}{2}\right|_{0.5}^{1.5}$$

$$= ½$$

ii) $$P(x > 0.25) = \int_{0.25}^{2} 1/2 \; dx$$

$$= 7/8$$

iii) $$P(x < 0.75) = \int_{0.5}^{0.75} 1/2 \; dx$$

$$= 3/8$$

iv) $P(x > 3) = \int_{3}^{\infty} 1/2 \, dx$

$= 0$

$0 \le x \le 2$ لان

-٦

i) $P(05 < x < 1) = \int_{0.5}^{1} \frac{2-x}{2} \, dx$

$= \int_{0.5}^{1} 1 - \frac{x}{2} \, dx$

$= \int_{0.5}^{1} x^0 \, dx - \int_{0.5.}^{1} \frac{x}{2} \, dx$

$= \left| x \right|_{0.5}^{1} - \left| \frac{x^2}{4} \right|_{0.5}^{1}$

$= 1/2 - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$

ii) $P(x > 1.5) = \int_{1.5}^{2} \frac{2-x}{2} \, dx$

$= \frac{1}{16}$

iii) $P(x < 0.3) = \int_{0}^{0.3} \frac{2-x}{2} \, dx$

$= 0.2775$

iv) $P(0 < x < 2) = \int_0^2 \frac{2-x}{2}\, dx$

$= 1$

-٧

x	0	1	2	3	4	5
p(x)	0.4	$(0.6)^1$ (0.4)	$(0.6)^2$ (0.4)	$(0.6)^3$ (0.4)	$(0.6)^4$ (0.4)	$(0.6)^5$

-٨

x	4	5	6	7	8
p(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

-٩

$$P(x) = C_x^n \; p^x \, q^{n-x}$$

$$P(0) = \frac{27}{64} \quad , \quad P(1) = \frac{27}{64} \quad , \quad P(2) = \frac{9}{64}$$

$$P(3) = \frac{1}{64}$$

الفصـــــل الثالـــث

الفصل الثالث

أدلة توصيف التوزيعات الاحتمالية

التوقـــــع ، التبايـــن ، والتغـايـــر

يمكن عن طريق بعض المعلمات (البارامترات) أن نحدد صفات المجتمع الإحصائي وأن نقارن المجتمعات الاحصائيه بعضها ببعض ، ومن أهم هذه المعلمات : **التوقع** وهو يحدد مركز الموضع للمجتمع و**التباين** وهو مقياس الانتشار و**التغاير** وهو مقياس للارتباط بين متغيرين .

وفيما يلي نتناول دراسة هذه المعلمات :

- **التوقـع Expectation**

إذا كان x متغير عشوائي كثافة احتماله f(x) فيعرف المقدار

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

بالتوقع . وهذا المقدار سيكون ثابتاً (لانه تكامل محدود) ولكنه يعتمد على الثوابت التي تتضمنها دالة كثافة الاحتمال f(x)

وإذا كان المتغير x متقطعا يصبح التوقع في هذه الحالة يساوي

$$\sum_{\text{all } x} x\, P(x)$$

حيث P(x) الدالة الاحتمالية للمتغير x

سنرمز لتوقع x بالرمز E(X) حيث الحرف E يشير إلى عملية رياضية معينة تجرى على المتغير x ومضمونها :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \mu$$

أو

$$= \sum_{\text{all } x} xP(x) = \mu$$

حسب كون المتغير x متصلا أو متقطعاً.

كما يدعى التوقع $E(x)$ بالوسط الحسابي للتوزيع الاحتمالي ويستخدم الحرف الإغريقي μ (ميو) في الغالب للتعبير عن القيمة المتوقعة للمتغير x .

ويلاحظ من صيغة التوقع (في حالة المتغير المتقطع مثلاً) أنها تشبه أوزاناً $P(x)$ معلقة عند النقط x_i (٢ ، ١ ، ٠ ، = i) والتوقع يقابل حساب مركز ثقل هذه الأوزان وهي نقطه الاتزان .

إذا كان x متغيراً عشوائياً فان أي دالة في x (لنقل مثلاً $\varphi(x)$) هي الأخرى متغير عشوائي وتوقعه يساوي:

$$E[\varphi(x)] = \sum_{\text{all } x} \varphi(x) P(x)$$

$$= \int_{\text{Range } x} \varphi(x) f(x)\, dx$$

حسب كون x متقطعاً أو متصلاً .

لنأخـ ـ ذ $\varphi(x) = x^r$

يكـ ـ ون

$$E(x^r) = \sum_{\text{all } x} x^r P(x)$$

$$= \int_{Rx} x^r f(x)\,dx$$

ولنجعل $r = 1$

يكـ ـ ون

$$E(X) = \sum_{\text{all } x} x\ P(x) = \mu$$

$$= \int_{Rx} x\, f(x)\,dx = \mu$$

<u>مثـ ـال ١</u> :

ألقيت قطعة نقد معدنية ثلاث مرات متتالية فما هو التوقع الرياضي لعدد مرات ظهور "صورة"؟

الحـ ـل

يمكننا أن نمثل الفراغ العيني والاحتمالات المناظرة في الجدول التالي:

الحالات الممكنة	عدد ظهور الصورة	الاحتـمال
ص ص ص	٣	١/٨
ص ص ك	٢	١/٨
ص ك ص	٢	١/٨
ص ك ك	١	١/٨
ك ك ك	٠	١/٨
ك ك ص	١	١/٨
ك ص ك	١	١/٨
ك ص ص	٢	١/٨

تمثل عدد مرات الحصول على وجه صوره عندما القيت Xدع

معطاه في الجدول التالي: Xقطعه النقد ثلاث مرات داله الاحتمال للمتغير

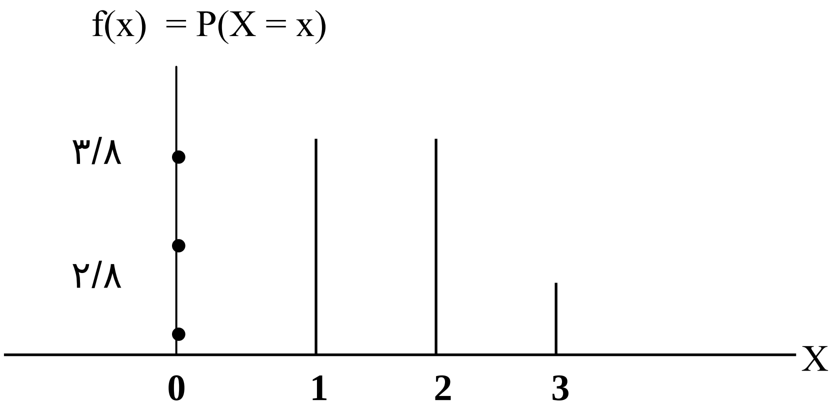
X = x	0	1	2	3
f(x) = P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} Xi \ P\ (xi)$$

$$= 0\,(\frac{1}{8}) + 1\,(\frac{3}{8}) + 2(\frac{3}{8}) + 3(\frac{1}{8})$$

$$= \frac{3}{2}$$

ويمكننا أن نمثل الدالة الاحتمالية المبينة في الجدول السابق بالرسم البياني التالي:



▪ خواص التوقـ ـع Properties of Expected Value

عبارة عن رمز يشير إلى عملية رياضية معينه Eرأينا أن دليل التوقع تجري على المتغير الإحصائي التالي لهذا الدليل ويمتاز هذا الدليل بالخواص التالية:

إذا كان a ثابت و x متغير عشوائي فإن

$$E(ax) = aE(X)$$

البرهـ ـ ـان:

$$E(ax) = \sum_{\text{all } x} ax\,P(x)$$

$$= a\sum_{\text{all } x} X\,P(x)$$

$$= a\,E(X)$$

أو

$$E(ax) = \int_{-\infty}^{\infty} a\,xf(x)\,dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= a\,E(x)$$

توقع الثابت يساوي الثابت

متغير عشوائي فإن X ثابت و aإذا كان

$$E(a) = a$$

البرهــــان :

$$E(a) = \sum_{all\ x} aP(x)$$
$$= a \sum P(x)$$
$$= a(1)$$
$$= a$$

نتيجــــة :

$$E(ax+b) = a E(x) + b$$

البرهــــان :

$$E(ax+b) = E(ax) + E(b)$$
$$= a E(x) + b$$

مثــال ٢ :

$$E(2x + 3) = 2 E(x) + 3$$

توقع التوقع يساوي التوقع

$$E[E(x)] = E(x)$$

البرهــــان:

بما أن التوقع قيمة ثابتة كما ذكرنا وبما أن توقع الثابت يساوي الثابت

أذن توقع التوقع يساوي التوقع.

فلو رمزنا إلى توقع $E(x)$ بالقيمة الثابتة z

فان $E(z) = z$

ومنها $E[E(x)] = E(x)$

٤- $E[(X - E(x)] = 0$

البرهـ ـ ـان :

$$E[(x - E(x) = E(x) - E(E(x)]$$
$$= E(x) - E(x)$$
$$= 0$$

نظريـ ـة ١ : إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين فان :

$$E(X \pm Y) = E(x) \pm E(Y)$$

أي أن توقع مجموع متغيرين يساوي مجموع توقعات المتغيرين

البرهـ ـان:

$$E(X \pm Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int (x \pm y) f(x.y)\, d\, xdy$$
$$= \int\int x f(x, y)\, dxdy \pm \int\int y f(x, y)\, dxdy$$
$$= \int x[\int f(x, y)dy]dx \pm \int y[\int f(x, y)\, dx]dy$$
$$= \int x f(x)\, dx \pm \int y f(y)\, dy$$
$$= E(X) \pm E(y)$$

نظريـ ـة ٢ : إذا كان X , Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان :

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

البرهـ ـ ـان :

$$E(X\,Y) = \int\int X\, Y f(x, y)\, d\, x\, d\, y$$

$$= \int\int xy\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy$$ ....لاستقلال

$$= \int x\, f(x)\, dx \int y\, f(y)\, dy$$

$$= E(X)\, E(Y)$$

مثـ ـال ٣ :

إذا كان X متغيرا عشوائيا دالته الاحتماليه هي:

$$f(x) = 2x$$

وأن $0 \le X \le 1$

فأوجـ ـد كـل مـن

$E(x+1)^2$ $E(x^2)$ $E(x)$

الحـ ـل:

$$E(x) = \int_0^1 x\ f(x)\ dx$$

$$= \int_0^1 x\ (2x)\ dx$$

$$= \int_0^1 2x^2\, dx$$

$$= 2\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1$$

$$= 2\left|\frac{1}{3} - 0\right|$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x^3 (2x)\, dx$$

$$= \int_0^1 2x^3\, dx$$

$$= 2 \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$E(x+1)^2 = E[x^2 + 2 \times + 1]$$

$$= E(x^2) + 2E(x) + 1$$

$$= ½ + 2(2/3) + 1$$

$$= ½ + 4/3 + 1$$

$$= \frac{17}{6}$$

- **التباين والانحراف المعياري Variance & Standard Deviation**

نعرف ان التبـاين والانحـراف المعيـاري هـي مقـاييس للتشـتت (Dispersion) أو لتوزيع تكراري ولكننا سنناقشهما الآن كمقاييس للتشـتت للتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي .

أن القيمة المتوقعه (أو الوسط الحسـابي) لتوزيـع احتمـالي لمتغيـر عشوائي ما تدلنا على مركز التوزيع الاحتمالي وتعطينا معلومات سريعة عـن

الوسط في المدى البعيد إذا ما استمر في إجراء تجربة ما أكثر ، ولكنها لا تعطينا أي معلومات عن مدى انتشار أو تشتت قيم المتغير العشوائي من تجربه إلى أخرى. وسنتطرق هنا إلى أكثر المقاييس شيوعاً واستعمالا مـن مقـاييس تشتت التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي وهي التباين والانحراف المعياري.

ان تباين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يقاس غالبا بنفس طريقـة قياسه في حالة التوزيع التكراري والفرق الوحيد هو أننا الآن نجد متوسط مربع انحرافات القيم عن القيمة المتوقعة بدلا من إيجاد متوسط مربع الانحرافات عن الوسط الحسابي للعينة أو التوزيع التكراري.

- <u>التبايـــن</u>

تباين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X هو متوسط مربع انحرافات قيم X عن القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي للمتغير X فإذا كان $E(x) = \mu$

وإذا رمزنا الى تباين X بـ σ_x^2 أو Var (x) فان

$$\sigma_x^2 = \mathbf{Var(x)} = \sum_{\text{all } x} (x-\mu)^2 \, p(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, f(x) \, dx$$

حسب كون المتغير متقطعا أو متصلاً

$$= \mathbf{E\,[(x-u)^2]}$$

$$= \mathbf{E\,[x - E\,(x)]^2}$$

أي أن التباين هو عبارة عن توقع مربع انحرافات القيم عن توقعها.

وهكذا نلاحظ أن قيم X الداخلة في حساب التباين هي القيم المربعة لـ X وإنما يقيمها المربعة وكي نحصل على مقياس للتشتت بنفس قيم X فان التباين لا يقيس التشتت بنفس قيم X فأننا نجد الجذر التربيعي الموجب للتباين وهو ما يدعى بالانحراف المعياري.

- **<u>الانحراف المعياري</u>**

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X هو الجذر التربيعي الموجب لتباين X ويرمز له بالرمز σ_x ويساوي:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{E(x-\mu)^2}$$

ننصح الطلاب بالعودة إلى طرق حساب التباين والانحراف المعيـاري للتوزيع التكراري قبل المضي قدما في هذا الجزء.

<u>مثـال ٤</u> :

بالعودة إلى مثال (١) وهو إلقاء قطعه نقد ثلاث مرات ، دع x هـي المتغير العشوائي عد مرات ظهور الوجه صورة. الجدول التالي يعطـي دالـة الاحتمال للمتغير x وكيفية حساب كل من التباين σ_x^2 والانحراف المعيـاري σ_x.

X = x	f(x) = P(X=x)	Xf(x)	$(x-E(x))^2$	$[x-E(x)]^2 f(x)$
0	1/8	0	$(0-3/2)^2 = 9/4$	9/32
1	3/8	3/8	$(1-3/2)^2 = 1/4$	3/32
2	3/8	6/8	$(2-3/2)^2 = 1/4$	3/32
3	1/8	3/8	$(3-3/2)^2 = 9/4$	9/32
		E(x) $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$		$\sigma_x^2 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

وهكذا فأن $\sigma_x^2 = \frac{3}{4}$ التباين

الانحراف المعياري $\sigma_x = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نظريـــة: إذا كان X متغيريــا عشــوائيا توقعــه $\mu = E(x)$ وتباينــه
فإن $Var(x) = \sigma_X^2$

$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$= E(x^2) - \mu^2$$

البرهـــان :

$$\sigma^2 = E[(x - E(x)]^2$$
$$= E[(x^2 - 2xE(x) + \{E(x)\}^2]$$
$$= E(x^2) - 2\{E(x)\}^2 + \{E(x)\}^2$$
$$= E(x2) - [E(x)]^2$$

مثـ ـ ـال ٥ :

بالعودة إلى المثال السابق وهو رمي قطعه نقد ٣ مرات فان الجـ دول التالي يعطي طريقه حساب التباين والانحراف المعياري لـ x باستخدام النظرية السابقة

$[\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$

X = x	f(x)	xf(x)	$x^2f(x)$
0	1/8	0	$(0)^2 = (1/8) = 0$
1	3/8	3/8	$(1)^2 (3/8) = 3/8$
2	3/8	6/8	$(2)^2 (3/8) = 12/8$
3	1/8	1/8	$(3)^2 (1/8)= 9/8$
		$E(x)=\frac{3}{2}$	$E(x^2) = \frac{24}{8} = 3$

وهكذا فان التباين يساوي

$$\sigma^2 = E(x2) - [E(x)]^2$$
$$= 3 - (\frac{3}{2})^2$$
$$= \frac{3}{2}$$

والانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي الموجب للتباين =

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

▪ خـــواص التبايــن Properties of Variance

هناك عده خواص للتباين وهذه الخواص تسهل علينا حساب التباين لأي داله في المتغير العشوائي X وأهم الخواص هي:

١) إذا كان a ثابت و X متغير عشوائي فإن

$$Var\,(ax) = a^2\,Var\,(x)$$

البرهـــــان :

$$Var\,(ax) = E\,[ax - E\,(ax)]^2$$

$$= E\,[ax - a\,E\,(x)]^2$$

$$= a^2 E\,[x - E\,(x)]^2$$

$$= a^2 var\,(x)$$

<u>مثــال ٦</u> :

إذا كان تباين x يساوي ٠.٥ فما هو تباين المتغيرات التالية:

i) $2X$

ii) $\frac{X}{2}$

<u>الحـــل</u>:

i) $Var\,(2x) = 4\,Var\,(x)$

$$= 4\,(0.5)$$

$$= 2$$

$$ii) \quad Var\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{1}{4} \; Var(x)$$

$$= \frac{1}{4}(0.5)$$

$$= 0.125$$

٢) تباين الثابت يساوي صفر

إذا كان a ثابت فان

$$Var(a) = 0$$

البرهـــان :

$$Var(a) = E[a - E(a)]^2$$

$$= E(a - a)^2$$

$$= E(0^2)$$

$$= 0$$

نتيجـــة :

$$Var(x \pm a) = Var(x)$$

البرهـــان :

$$Var(x \pm a) = Var(x) \pm Var(a)$$

$$= Var(x) \pm 0$$

$$= Var(x)$$

وهكذا فان إضافة أي قيمة أو طرح أي قيمة ثابته إلى أو من المتغيـر العشوائي لا تؤثر على التباين لهذا المتغير.

مثـــال ٧ : إذا كان تباين المتغير x يساوي ٥ فما هو تباين كل من :

i) $x + 3$

ii) $x - 6$

الحـــل :

i) $Var(x + 3) = Var(x) = 5$

ii) $Var(x - 6) = Var(x) = 5$

٣) إذا كان X ، Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان :

$$Var(x+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$$Var(x - y) = Var(x) + Var(y)$$

أي أن تباين مجموع متغيرين عشوائين مستقلين أو الفرق بينهما يساوي مجموع تباينيهما.

البرهـــــان :

$$Var(X \pm Y) = E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2$$

$$= E[\{X - E(x)\} \pm \{Y - E(y)\}]^2$$

$$= E[\{X - E(x)\}^2 + \{Y - E(y)\}^2 \pm 2\{X - E(x)\}\{Y - E(y)\}]$$

$$= E\{X - E(x)\}^2 + E\{Y - E(y)\}^2 \pm 2E[\{X - E(x)\}\{Y - E(y)\}]$$

$$= Var(x) + Var(Y) \pm 2E[\{X - E(x)\}\{Y - E(Y)\}]$$

وهكذا فعلينا أن نثبت بأن الحد الأخير يساوي صفر بما أن الحادثين مستقلين يكون الحد الخير مساوياً

$$= 2\,[\,E\,\{x - E(x)\}\;E\{Y - E(y)\}]$$

$$= 2\,[(0)\,(0)]$$

$$= 0$$

$$\therefore\ Var\,(X \pm Y) = Var\,(x) + Var\,(Y)$$

ويمكن تعميم هذه القاعده على أي عدد غير محدود من المتغيرات المستقله أي أن :

$$Var\,(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots \pm x_n) = Var\,(x_1) + Var(x_2) + \ldots + Var\,(x_n)$$

- **التغايـــر Covariance**

وهو مقياس للارتباط بين متغيرين Y, X فاذا كانت f(xy) داله كثافة احتمال هذين المتغيرن معا فان تغاير المتغيرين Y, X يعرف رياضياً كما يلي :

$$Cov\,(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\int [X - E\,(x)]\,[Y - E(y)]\,f\,(xy)\,dxdy$$

$$= E\,[\{X - E(x)\}\{Y - E(y)\}]$$

- التغايـــر

وهكذا فان التغاير للمتغيرين Y, X (والذي يرمز له بالرمز C أو Cov) هو عباره عن توقع حاصل ضرب انحرافي المتغيرين عن مركزيهما أي يساوي :

$$\mathbf{Cov\ (x, Y) = E\ [(x-\mu_x)\ \ (Y-\mu_y)]}$$

- **خـــواص التغايـــــر**

١- تغاير X, X هو تباين X أي

$$\text{Cov}\ (x, x) = \text{Var}\ (x)$$

البرهـــان:

بوضع X بدل Y في معادله التغاير أعلاه نصل إلى المطلوب

٢- إذا كان b , a ثابتين فان :

$$\text{Cov}\ (ax, by) = ab\ \text{Cov}\ (x,y)$$

البرهـــان:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\ (ax,\ by) &= E\left[\{ax - E(ax)\}\{by - E(by)\}\right] \\ &= ab\ E\ \{x - E(x)\}\{Y - E(y)\} \\ &= ab\ \text{cov}\ (x, y) \end{aligned}$$

٣- اذا كان a ثابت فان

$$\text{Cov}\ (x, a) = 0$$

البرهـــان :

$$\text{Cov}(x, a) = E[\{x - E(x)\}\{a - E(a)\}]$$
$$= E[\{x - E(x)\}\{0\}]$$
$$= 0$$

٤-

$$\text{Cov}(x_1 + x_2, y) = \text{Cov}(x_1, y) + \text{Cov}(x_2, y)$$

البرهـــان:

$$\text{Cov}(x_1 + x_2, y) = E[\{(x_1 + x_2) - E(x_1 + x_2)\}\{Y - E(y)\}]$$
$$= E[\{x_1 - E(x_1)\}\{y - E(y)\}] + E[\{x_2 - E(x_2)\}\{y - E(y)\}]$$
$$= \text{Cov}(x_1, y) + \text{Cov}(x_2, y)$$

٥- في حاله أي متغيرين x_2 , x_1 فان

$$\text{Var}(x_1 + x_2) = \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2\text{Cov}(x_1, x_2)$$
$$\text{Var}(x_1 - x_2) = \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) - 2\text{Cov}(x_1, x_2)$$

البرهـــان:

$$\text{Var}(x_1 + x_2) = E[(x_1 + x_2) - E(x_1 + x_2)]^2$$
$$= E[\{x_1 - E(x_1)\} + \{x_2 - E(x_2)\}]^2$$
$$= E[x_1 - E(x_1)]^2 + E[x_2 - E(x_2)]^2 + 2E[\{x_1 - E(x_1)\}\{x_2 - E(x_2)\}]$$
$$= \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2\,\text{Cov}(x_1, x_2)$$

وبالمثل في حاله تباين الفرق بين متغيرين أي في حاله

$Var(x_1 - x_2)$

٦- أذا كان x_1 , x_2 متغيرين مستقلين فان

$$Cov(x_1, x_2) = 0$$

البرهـــان :

$$Cov(x_1, x_2) = E[\{x_1 - E(x_1)\}\{x_2 - E(x_2)\}]$$

$$= E[x_1 x_2 + E(x_1) E(x_2) - x_1 E(x_2) - x_2 E(x_1)$$

$$= E(x_1) E(x_2) + E(x_1) E(x_2) - E(x_1) E(x_2) - E(x_1) E(x_2)$$

$$= 0$$

وبما أن المتغيرين مستقلين يكون

$$E(x_1 x_2) = E(x_1) E(x_2)$$

▪ معامـــل الارتبـــاط

- **يعـرف المقـدار**

$$\frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(x) Var(y)}} = \rho$$

بمعامل الارتباط بين المتغيرين الإحصائيين Y , X

ويكون هذا المعامل صفرا إذا كان التغاير بين Y , X يساوي صفر.

ومعامل الارتباط يقع في المدى

$$1 \geq \rho \geq -1$$

وهكـذا فـإن

$$\rho^2 \leq 1$$

تمـــارين

الفصــل الثالــث

١) إذا كان $E(x) = \mu$ فأثبت أن :

i) $E(x-\mu) = 0$

ii) $E(x-c)^2 = E(x-\mu)^2 + (\mu-c)^2$

حيث C أي ثابت .

٢) إذا كانت احتمالات أن يوجد شخص واحد أو شخصان أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ أشخاص في الدرجة الأولى للطائرة هي على الترتيب :

٠.٠٥ ، ٠.٤٣ ، ٠.٢٧ ، ٠.١٢ ، ٠.٠٩ ، ٠.٠٤

فما هو عدد الأشخاص المتوقع وجودهم في الدرجه الأولى للطائرة ؟

٣) أثبت أن المقدار $E(x-a)^2$ يكون في نهايته الصغرى عندما يكون الثابت a يساوي E(x) .

٤) إذا كان لدينا المتغيرين المستقلين Y , X كثافة احتمالهما هي:

$0 \le X \le 1 \qquad f(x) = 12x^2(1-x)$

$0 \le Y \le 1 \qquad f(y) = 2Y$

أوجد توقع المقدار

$$\frac{Y}{x^2} + \frac{x}{Y}$$

٥) إذا كان X متغير عشوائي وسطه الحسابي ١٠ وتباينه ٦ أوجد قيمة

$$E(x^2 + 3x)$$

٦) الجدول التالي يعطي التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات المباعة من قبل أحد بائعي السيارات خلال شهر:

عدد السيارات	الاحتمـــال
٠	٠.٠١
١٠	٠.٠٥
٢٠	٠.٣٩
٣٠	٠.٤٥
٤٠	٠.١٠
المجمـــــــوع	**١.٠٠**

أوجـــد:

i) متوسط عدد السيارات المباعه خلال الشهر.

ii) تباين عدد السيارات المباعه خلال الشهر.

٧- الجدول التالي يبين عدد التلفزيونات الملونه المباعه عادة في احد المحلات أسبوعياً والاحتمال المناظر لكل منها:

عـدد التلفزيونات	الاحتمـــال
٠	٠.١٣
٤	0.27
٦	٠.٣٩
٨	٠.٢١

٠.٠٧	٤٠
١.٠٠	**المجـــــوع**

أوجـــد :

i) متوسط المبيعات الأسبوعية

ii) تباين الوسط الحسابي للمبيعات الأسبوعية

٨) أشتري شخص بطاقة يانصيب ، يستطيع أن يربح الجائزة الأولـى وهـي ٤٠٠٠ دينار أو الجائزة الثانية وهـي ٣٠٠٠ دينـار باحتمـال ٠.٠٠٥ ، ٠.٠٠٨ على الترتيب فما هو السعر المناسب لهذه البطاقة؟

٩) ذهب شخص لشراء سياره فـاذا كـان سـيختار السـيارة A أو B أو C باحتمال ٠.٤ و ٠.٣ و ٠.٣ على الترتيب وكان ثمن السـيارة A ٢٠٠٠ دينار والسيارة B ٢٥٠٠ دينار والسيارة C ٣٠٠٠ دينار فما هو المبلـغ المتوقع أن يدفعه هذا الشخص؟

١٠) شركة تعمل في ثلاثة مشاريع مستقلة هي A ,B , C والعائدات المتوقعه للمشاريع الثلاثة هي ١٠٠.٠٠٠ ، ٥٠.٠٠٠ ، ٢٥.٠٠٠ علـى الترتيـب والتباينات هي ١٠.٠٠٠ ، ٥٠٠٠ ، ٣.٠٠٠ دينار على الترتيب فما هو:

i) اجمالي العائدات المتوقعة من المشاريع الثلاثة .

ii) اجمالي التباين.

١١) إذا كانت X هي عدد الأخطاء المطبعية في صفحة وأن

$$f(0) = 0.9$$
$$f(1) = 0.05$$
$$f(2) = 0.03$$
$$f(3) = 0.02$$

فما هو عدد الأخطاء المتوقع في ٢٠٠ صفحة ؟

١٢) إذا كان C ثابت و X متغير عشوائي داله احتماله

$$f(x) = cx$$

$$x = 3, 4, 5, 6$$

أوجـ ـ د :

i) قيمة الثابت C

ii) توقع X

iii) تباين X

١٣) أثبت أن

$$Cov(x, y) = E(xy) - \mu_x \mu_y$$

١٤) إذا علمت أن داله كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين y,x هي

$$f(x, y) = x + y \qquad 0 \le X \le 1$$

$$0 \le X \le 1$$

أوجـ ـ د

i) تغاير y, x أي $Cov(x, y)$

ii) معامل الارتباط y , x أي (x, y)

حـل تمـارين الفصـل الثالـث

(١

i) $E(x-\mu) = E[(x-E(x)] = E(x) - E(x)$

$$= 0$$

ii) $E(x-C)^2 = E(x^2-2cx + C^2)$ - الطرف الأيسر

$$= E(x^2) - 2CE(x) + C^2$$

$$= E(x^2) - 2C\mu + C^2$$

- الطرف الأيمن

$$E(x-\mu)^2 + (\mu-c)^2 = E(x^2 - 2\mu x + \mu^2) + \mu^2 - 2\mu C + C^2$$

$$= E(x)^2 - 2\mu^2 + \mu^2 + \mu^2 - 2\mu C + C^2$$

$$= E(x^2) - 2\mu c + C^2$$

$\therefore$ يكون الطرفان متساويين وهو المطلوب

(٢

X = x	f(x)	x f(x)
1	0.05	0.05
2	0.43	0.86
3	0.27	0.81
4	0.12	0.48
5	0.09	0.45
6	0.04	0.25

$$E(X) = \sum_{allx} XP(x)$$

$= 2.89$

وهو المطلوب

٣) يكون المقدار في نهايته الصغرى إذا كانت المشتقه الأولى له تساوي الصفر

$$E(x-a)^2 = \underbrace{E(x^2) - 2\,a\,E\,(x) + a^2}_{Z}$$

a) بالنسبة لـ Zنشتق هذا المقدار (

$$\frac{dz}{da} = 0\text{-}2\,E\,(x) + 2a$$

$$= 0 - 2\,a + 2a$$

$$= 0$$

حيث $a = E\,(x)$

$\therefore$ المقدار في نهايته الصغرى

٤)

$$E\left(\frac{Y}{X^2} + \frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{Y}{X^2}\right) + E\left(\frac{X}{Y}\right)$$

$$= E\,(Y)\,E\left(\frac{1}{X^2}\right) + E(X)E\left(\frac{1}{Y}\right)$$

لأنهما مستقلان

الآن نجد كل توقع على حده ونعوض الناتج في المعادله أعلاه

$$E(Y) = \int_0^1 Y\, f(Y)\, dy$$

$$= \int_0^1 Y\ (2Y)\, dy$$

$$= 2\int_0^1 Y^2\, dY$$

$$= 2 \left| \frac{Y^3}{3} \right|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{X^2} \left\{12\ X^2 (1 - X) \right\} dX$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{X^2} \left\{12\ X^2 - 12\, X^3) \right\} dx$$

$$= 12\int_0^1 (1\text{-}X)\, dX$$

$$= 12 \left| X - \frac{X^2}{2} \right|_0^1$$

$$= 12 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 6$$

$$E(X) = \int_0^1 X \left\{12 X^2 (1-X)\right\} dX$$

$$= 12\int_0^1 X^3 - X^4 \; dx$$

$$= 12 \left| \frac{X^4}{4} - \frac{X^5}{5} \right|_0^1$$

$$= 12\left(\tfrac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_0^1 \frac{1}{Y} (2Y)\, dy$$

$$= \int_0^1 2\, dy$$

$$= 2$$

$$E\left(\frac{Y}{X^2} + \frac{X}{Y}\right) = E(Y)\; E\left(\frac{1}{X2}\right) + E(X)\, E\left(\frac{1}{Y}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)(6) + \left(\frac{3}{5}\right)(2)$$

$$= 5.2$$

٥)

$E(X^2 + 3X) = E(X^2) + 3E(X)$ 1

$Var(x) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 2

$6 = E(X^2) - (10)^2$

$E(X^2) = 106$ 3

نعـوض ٣ فـي ١

$E(X^2 + 3X) = 106 + 3(10)$

$= 106 + 30$

$= 136$

٦)

عدد السيارات X – x	f(x)=P(X=x)	X f(x)	X^2 f(x)
0	0.01	0	0
10	0.05	0.50	5
20	0.039	7.80	156
30	0.45	13.50	405
40	0.10	4.00	160

$E(x) = \sum_{allx} Xp(x)$ $\qquad$ $E(x^2) = \sum_{allx} x^2 P(x)$

$= 25.8$ $\qquad$ $= 726$

$$V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$
$$= 726 - 665.64$$
$$= 60.36$$

٧)

X	P(X)	XP (X)	X^2 P(x)
2	0.13	0.26	0.52
4	0.27	1.08	4.32
6	0.32	1.92	11.52
8	0.21	1.68	13.44
10	0.07	0.70	7.00

$E(x) = \sum XP(x)$ $\qquad$ $E(x^2) = \sum x^2 p(x)$

$= 5.64$ $\qquad$ $= 36.80$

$$V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$
$$= 36.80 - 31.8096$$
$$= 4.9904$$
$$\cong 5$$

٨) السعر المناسب يساوي قيمة التوقع

$$E(x) = \sum_{allx} X\ P\ (X)$$

$$= 4000\ (0.005) + 3000\ (0.008)$$

$$= 20 + 24$$

$$= 44$$

٩) المبلغ المتوقع أن يدفعه هو توقع الأسعار الثلاثة

$$E(x) = \sum_{allx} XP(x)$$

$$= 2000\ (0.4) + 2500(0.3) + 3000(0.3)$$

$$= 800 + 750 + 900$$

$$= 2450$$

١٠) بما أن المشاريع مستقلة يكون إجمالي العائدات المتوقعة هو

i) $E\ (X_1 + X_2 + X_3) = E\ (X_1) + E(X_2) + (X_3)$

$$= 100000 + 50000 + 25000$$

$$= 175000$$

ii) $V\ (X_1 + X_2 + X_3) = V\ (X_1) + V(X_2) + V\ (X_3)$

$$= 10000 + 5000 + 3000$$

$$= 18000$$

١١) عدد الأخطاء المتوقعة في الصفحة الواحدة =

$$E(x) = \sum_{allx} X\ P\ (X)$$

$$= 0\ (0.9) + 1\ (0.05) + 2\ (0.03) + 3\ (0.02)$$

$$= 0 + 0.05 + 0.06 + 0.06$$

$$= 0.17$$

عدد الأخطاء المتوقعة في ٢٠٠ صفحة هو مجموع توقعات الـ ٢٠٠ صفحة لأنها حوادث مستقلة

$$= 200\ (0.17) = 34$$

١٢)

i) $$\sum_{allx} f\ (x) = 1$$

$$\therefore \sum C\,X = 1$$

$$C \sum X = 1$$

$$C\ (3 + 4 + 5 + 6) = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{18}$$

ii) $$E\ (x) = \sum_{allx} X\ P(X)$$

$$= \sum X\ CX$$

$$= C \sum x^2$$

$$= \frac{1}{18}\ (9 + 16 + 25 + 36)$$

$$= \frac{43}{9}$$

iii) $V(X) = E(X^2) - \{E(x)\}^2$

$$= E(X^2) = \sum_{allx} X^2 P(X)$$

$$= C \sum X^3$$

$$= \frac{1}{18}(27 + 64 + 125 + 216)$$

$$= \frac{216}{9}$$

$$Var(x) = \frac{216}{9} - \left(\frac{43}{9}\right)^2$$

$$= \frac{1944 - 1849}{81}$$

$$= \frac{95}{81}$$

١٣) أثبت أن

$$Cov(x, Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

البرهــــان:

$$Cov(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$$

$$= E(xy - x\mu_y - \mu_x y + \mu_x \mu_y)$$

$$= E(xy) - \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y + \mu_x \mu_y$$

$$= E(XY) - \mu_x \mu_y$$

وهو المطلــوب

١٤)

$$Cov(x, y) = E(xy) - E(x)\,E(y)$$

∴ حتى نجد التغاير لابد أن نجد أولاً توقع X وتوقع Y وتوقع XY .

حتى نحصل على E(x) , E (y) نبحث عن E(x+y)

$$E(x+y) = \int_0^1\!\!\int (x+y)\ f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1\!\!\int x\ f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1\!\!\int x\ f(xy)\,dx\,dy$$

$$= \underbrace{\int_0^1 [x\int_0^1 f(xy)\,dy]\ dx}_{E(x)} + \underbrace{\int_0^1 y[\int_0^1 f(xy)\,dx]\ dy}_{E(y)}$$

$$= \int_0^1 [x\int_0^1 (x+y)\,dy]\ dy + \int_0^1 y[\int_0^1 (x+y)\,dx]\ dy$$

$$= \int_0^1 x \left| xy + \frac{y^2}{2} \right|_0^1 dy + \int_0^1 y \left| \frac{x^2}{2} + yx \right|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 x\underbrace{\left(x + \frac{1}{2} \right)}_{f(x)}dx + \int_0^1 y\underbrace{\left(y + \frac{1}{2} \right)}_{f(x)}dy$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right)dx + \int_0^1 \left(y^2 + \frac{y}{2} \right)dy$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right|_0^1 + \left| \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4} \right|_0^1$$

$$= \frac{7}{12} + \frac{7}{12}$$

أي أن

$$E(x) = \frac{7}{12}$$

$$E(Y) = \frac{7}{12}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$f(y) = y + \frac{1}{2}$$

الآن نحسب E(xy)

$$E(xy) = \int_0^1\int xy\, f(xy)\, dxdy$$

$$= \int_0^1\int xy\,(x+y)\, dxdy$$

$$= \int_0^1\int x^2y + xy^2\, dxdy$$

$$= \int_0^1 [\int_0^1 x^2y\, dx]\, dy + \int_0^1 [\int_0^1 xy^2\, dx]\, dy$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{x^3y}{3} \right|_0^1 dy + \int_0^1 \left| \frac{xy^3}{3} \right|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}\, ydy + \int_0^1 \frac{1}{3}\, xdx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 ydy + \frac{1}{3}\int_0^1 xdx = \frac{1}{3}\left| \frac{Y^2}{2} \right|_0^1 + \frac{1}{3}\left| \frac{X^2}{2} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$
\begin{aligned}
Cov(x, y) &= E(xy) - E(x)\,E(y) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{49}{144} \\
&= \frac{1}{144}
\end{aligned}
$$

ii) لحساب معامل الارتباط لابد من حساب $v(x)$, $V(y)$

$$V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$

$$
\begin{aligned}
E(x^2) &= \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx \\
&= \left| \frac{X^4}{4} + \frac{X^3}{6} \right|_0^1 \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

$$Var(x) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$V(y) = \frac{11}{144}$$

$$\rho(x,y) = \frac{Cov\,(x,y)}{\sqrt{V(x)\,V(y)}} = \frac{-1/144}{\sqrt{\frac{11}{144}\cdot\frac{11}{144}}} = \frac{-1/144}{11/144} = -\frac{1}{11}$$

الفصـــــل الـــرابـــع

الفصــل الرابـــــع

التوزيعات الاحتمالية المنقطعه

THE DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

- **مقدمـــــــة**

هنـاك عدة توزيعات احتماليـة متقطعة منها توزيع برنولي ، توزيـع ثنائي الحديـن، توزيع ثنائي الحدين السالـب، توزيـع كثير الحدود، توزيـع الهيبروجيومتريك وتوزيع بواسون، ولكننا سندرس في هذا الفصل فقط توزيـع ثنائي الحدين وتوزيع بواسون نظرا لما لهذين التوزيعين من تطبيقات واسعة في التجارة والاقتصاد.

- **توزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution**

في كثير من التطبيقات الاقتصادية والتجارية كثيرا ما نكون معنيـين بدراسـة الاختبارات التي يكون لها نتيجتين ممكنتين فقط وهما ما تدعيان عادة بالنجاح أو الفشل، مثل هذه الاختبارات تعرف بالاختبارات ثنائية الحدين ، مثل اختبار ما إذا كان أحد المصابيح الكهربائية التي ينتجها مصنع ما سليما أو معيبا . ويقـال للتجربة التي تتكون من عدة اختبارات ثنائية الحدين بالتجربة ثنائية الحدين مثل سؤال ١٠٠ طالب ما إذا كانوا يدخنون أم لا . ويجب أن يتحقق في أي تجربـة ثنائية الحدين الشروط الأربعة التالية:

١. عدد الاختبارات محدود.
٢. لكل اختبار فقط نتيجتين ممكنتين وهما النجاح أو الفشل.

٣. احتمال النجاح يكون ثابت في كل الاختبارات ولا يختلف من اختبار لآخر.

٤. الاختبارات مستقلة بعضها عن بعض.

من خلال المثال التالي سوف نوضح ونشتق التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ثنائي الحدين في تجربة ثنائية الحدين وهو ما يعرف باسم التوزيع ثنائي الحدين.

<u>مثـــال ١:</u>

لو كانت n هي عدد الاختبارات في التجربة ثنائية الحدين وهـي إلقاء قطعة عمله معدنية وكانت P هي احتمال الحصول على الوجه صوره (أي النجاح) و (1-P) ويرمز لها بالرمز q هي احتمال عدم ظهور الوجه صوره (أي الفشل) أي هي احتمال ظهور الوجه كتابه في كل اختبار:

<u>أولاً:</u> لو جعلنا ١ = n

فإن مجموعة الحالات الممكنة تكون

S = (ص و ك)

حيث ص ترمز إلى الوجه صوره

ك ترمز إلى الوجه كتابه

دع X تمثل المتغير العشوائي عدد مرات ظهور الوجه صوره

فتكون القيم الممكنة لـ X هي ٠ ، ١

P هي احتمال ظهور الصوره

q= (I-P) هي احتمال ظهور الكتابة

فيكون التوزيع الاحتمالي للمتغير x على الشكل التالي:

جـدول ١

التوزيع ثنائي الحدين

n = ١

X = x	**f (x) = P (X = x)**
0	f (0) = P (ك) = q
1	f (1) = P (ص) = P
المجموع	**q + P = 1**

ثانياً : لو جعلنا n = ٢

فان مجموع الحالات المكنة تكون

S = (ص ص ، ص ك ، ك ص ، ك ك)

حيث ص ص تعني الأولى صورة والثانية صورة

ك ك تعني الأولى كتابة والثانية كتابة

ص ك تعني الأولى صورة والثانية كتابة

ك ص تعني الأولى كتابة والثانية صورة

أي أن عدد الحالات الممكنة ٤ حالات

وتكون احتمالات هذه الحالات هي

qq , qp, pq, pp

حيث أن الاختبارات مستقلة

وتكون قيم x الممكنة هي ٠ ، ١ ، ٢

ويكون التوزيع الاحتمالي لـ x كما في الجدول التالي:

جـــدول (٢)

توزيع ثنائي الحدين

n = 2

X = x	**f(x) = P (X = x)**
0	f (0) = P (ك ك) = P (ك) P (ك) = qq = q^2
1	f (1) = P (ص ك) + P (ك ص) = P (ص) P (ك) + P (ك) P (ص)
	= Pq + qP = 2qP
2	f (2) = P (ص ص) + P (ص) P (ص) = PP = P^2
المجموع	$\mathbf{q^2 + 2qP + P^2 = (q+P)^2 = 1}$

<u>ثالثاً</u> : لو جعلنا n تساوي ٣

فإن مجموعة الحالات الممكنة تكون

{ ص ص ص، ك ص ص، ص ك ص، ك ك ص، ص ص ك، ك ص ك، ص ك ك، ك ك ك } = S

أي أن مجموع الحالات الممكنة = ٨ حالات

وتكون الاحتمالات المناظرة لهذه الحالات هي

qqq, qqP, qPq, qPP, Pqq, PqP, PPq, PPP

وتكون قيم x الممكنة هي ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

ويكون التوزيع الاحتمالي لـ x كما في الجدول التالي:

جـــدول ٣

توزيع ثنائي الحدين

n = 3

X = x	**f(x) = P (X = x)**
0	f (0) = P (ك ك ك) = P (ك) P (ك) P (ك) = q^3
1	f (1) = P (ك ك ص) + P (ك ص ك) + P (ك ص ص) $= q^2 p + q^2 p + q^2 p = 3 q^2 p$
2	f (2) = P (ك ص ص) + P (ص ك ص) + P (ك ص ص) $= qp^2 + qp^2 + qp^2 = 3qp^2$
3	f (3) = P (ص ص ص) = P (ص) P (ص) P (ص) = p^3
المجموع	$\mathbf{q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + P^3 = (q+p)^3 = 1}$

نلاحظ من الجداول الثلاثة السابقة أن عدد الحالات الممكنة هو :

إذا كانت n تساوي ١ فان الحالات الممكنة = ٢^{١} = ٢

إذا كانت n تساوي ٢ فان الحالات الممكنة = ٢^{٢} = ٤

إذا كانت n تساوي ٣ فان الحالات الممكنة = ٢^{٣} = ٨

وبتعميم هذه النتيجة يكون عدد الحالات الممكنة بتجربـة ثنائيـة الحـدين يساوي 2^n إذا كانت التجربة مكونه من n اختبار. إذا ما اسـتمرينا فـي زيادة عدد الاختبارات n فاننا بصورة عامـة نسـتطيع أن نطبـق نفـس الطريقة كما في الجداول الثلاثة السابقة ولكن العمليات الحسابية سـتكون طويلة ومملة ولا بد من طريقة عامة تسهل لنا ذلك.

والآن نستطيع القول بأن احتمال الحصول على الوجه صورة x مرة بالضبط في تجربة ثنائية الحدين تتكون من n اختبار (القاء قطعة عملـه) عندما يكون ترتيب الصورة والكتابة معينة أو مبينة هو احتمـال وقـوع الحادث (ظهور الوجه صورة) x مرة وعدم وقوعة $(n-x)$ مرة وذلك في حالات مختلفة.

احتمال وقوع الحادث (صورة) x مرة هو P^x

احتمال عدم وقوع الحادث $n-x$ مرة هو q^{n-x}

ومن قاعدة ضرب الاحتمالات يكون احتمال وقوع الحادث x مرة هو p^x q^{n-x}

وعدد الحالات المواتية لوقوع الحادث يمكننا حسابه بالتوافيق وهو يساوي توافيق x من n أي

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

وهكذا يكون الاحتمال المطلوب وهو الحصول على الوجه صوره x مرة بالضبط من n اختبار مساوياً إلى :

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

مثـــلاً ، لو كانت n تساوي ٣ تكون احتمالات ظهور الوجه صوره ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ مرات هي على التوالي :

$$(3^3)\ p^3\ ,\ (2^3)\ p^2\ q\ ,\ (1^3)\ pq^2\ ,\ (0^3)\ q3$$

$$p^3\ ,\ 3p^2q\ ,\ 3pq^2\ ,\ q^3$$

وهي نفس الاحتمالات التي حصلنا عليها في جدول (٣)

ويلاحظ أن القيم الناتجة عن القانون

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$x = 0, 1, \ldots.., n$$

هي نفسها قيم الحد x في مفكوك ثنائي الحدين

$$(q+p)^n$$

حيـــث

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} pq^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{x} p^x q^{n-x} + \ldots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q + p^n$$

ومن هنا جاءت تسمية هذا التوزيع الاحتمالي بالتوزيع ثنائي الحدين

وباختصار فان توزيع ثنائي الحدين هو:

التوزيع ثنائي الحدين:

هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع x والـذي يمثل عدد مرات النجاح في n اختبـار ثنـائي الحـدين ، ويعطي هذا التوزيع بالصيغة

$$\mathbf{f(x)} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث :

i) $x = 0, 1, \ldots, n$

ii) p هي احتمال النجاح في كل اختبار

iii) q هي احتمال الفشل في كل اختبار

iv) $p + q = ١$

مثـال ٢ :

طلب من أحد منتجي الكراسي (المقاعد) المدرسية أن يضع في كل غرفة دراسة بعض المقاعد الخاصة بالأعسرين (الايسرين). إذا كان يعلم أن ١٠% من السكان أعسرين ما هو احتمال ان غرفة لعشرين طالبا:

i) لا تحتوي على أي عسر

ii) اثنان منهم اعسران

iii) أكثر من أثنين منهم أعسرين

الحـــل: دع x تمثل عدد الاعسرين الموجودين في هذه الغرفة

تكون القيم الممكنة لـ x هي ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ٢٠

دع p تساوي احتمال أن يكون الفرد اعسرا

q تساوي احتمال أن لا يكون الفرد اعسرا

$\therefore \quad p = 0.10$

$q = 1\text{-}P \quad = 0.90$

$n = 20$

i) p (لا تحتوي على اعسر) = f(0)

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$f(0) = \binom{20}{0} p^0 q^{20}$$

$$= (q)^{20} = (0.90)^{20}$$

$$= 0.122$$

ii) P (اثنان اعسران) $= f(2)$

$$f(2) = \binom{20}{2} p^2 \; q^{18}$$

$$= 190\,(0.01)^2\,(0.90)^{18}$$

$$= 190\,(0.01)\,(0.9)^{18}$$

$$= 0.285$$

iii) P (الكثر من اثنين) $= p(x > 2) = 1 - p(x \le 2)$

$$= 1 - \{p(x=0) + p(x=1) + p(x=2)\}$$

$$= 1 - \{(0.9)^{20} + 20\,(0.1)\,(0.9)^{19} + 0.285\}$$

$$= 1 - \{0.122 + 0.270 + 0.285\}$$

$$= 0.323$$

- توقع التوزيع ثنائي الحدين

بالعودة إلى المثال السابق وهو تجربة إلقاء قطعة عملـة n مـرة وبجعل n تساوي ١ فان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (١) والتوقع لهذا التوزيـع محسـوب في جـدول (٤) التالي:

جــدول (٤)

توقع توزيع ثنائي الحدين

n = 1

X	f (x)	x f (x)
0 1	q p	0 p
المجمـــوع		$\mu = \sum_{0}^{1} xf(x) = p$

وبجعل n تساوي ٢ فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صوره معطى في الجدول (٢) والتوقـع (أو الوسـط الحسابي) لهذا التوزيع محسوب في جدول (٥) التالي:

جــدول (٥)

توقع توزيع ثنائي الحدين

n = 2

X	f(x)	x f (x)
0 1 2	q^2 2pq p^2	0 2qp $2p^2$
المجمـــوع		**E(x) = 2p (q+p) =2p**

وبجعل n تساوي ٣ فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـوائي x هو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (٣) والتوقـع (أو الوسط الحسابي) لهذا التوزيع يمكن حسابه كما في جدول (٦) التالي:

جـــدول (٦)

توقع توزيع ثنائي الحدين

$n = 3$

X	f(x)	X f (x)
0	q^3	0
1	$3p^2q$	$3q^2 p$
2	$3qp^2$	$6q p^2$
3	P^3	$3p^3$
المجمـــوع		$\mu = E(x) = 3p(q^2 + 2qp + p^2)$ $= 3p (q + p)^2 = 3p$

وهكذا فاننا نلاحظ بأن الوسط الحسابي (أو التوقع) للتوزيع ثنائي الحدين هو :

P إذا كانت n تساوي ١

2p إذا كانت n تساوي ٢

3p إذا كانت n تساوي ٣

ويمكننا الآن أن نعمم هذه النتيجة فنقول بأن توقع التوزيع ثنائي الحدين يساوي n p لـ n من الاختبارات.

> **- توقع التوزيع ثنائي الحدين**
> **إذا كان p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل في كل اختبار فإن عدد مرات النجاح المتوقعة من n اختبار**

ويمكننا أن نبرهن ذلك أيضاً باستخدام تعريف التوقع كما يلي

$$\mu = E(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{x\, n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,[(n-1)-(x-1)]!} p^x q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!\; p^{x-1}\; q^{(n-1)-(x-1)}}{(x-1)!\,[(n-1)-(x-1)]!}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} P^{x-1} q^{(n-1)-(x-1)}$$

$$= np\,(q+p)^{n-1}$$

$$= np$$

<u>مثـال ٣</u> : إذا ألقيت قطعة نقدية ١٠٠ مرة فما هو عدد المرات المتوقعة لظهور الوجه صورة؟

<u>الحـل:</u> دع x تمثل المتغير العشوائي وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة وهكذا فإن x لها توزيع ثنائي الحدين بـ

$$P = \frac{1}{2}$$

$$n = 100$$

وتوقع التوزيع ثنائي الحدين = np

$$\mu = E(x) = np = 100\left(\frac{1}{2}\right) = 50$$

وهـــو المطلـــوب

o تباين التوزيع ثنائي الحدين

بالعودة إلى مثال (١) وهو تجربة إلقاء قطعة نقد n مرة وباستخدام قانون التباين $\sigma_x^2 = \sum (x-\mu)^2 f(x)$ وبجعـل n تأخـذ القـيم ١، ٢، ٣ نستطيع أن نصل إلى صيغة عامة لتباين التوزيع ثنائي الحدين.

بجعل n تساوي ١ يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (١) وتوقع هـذا التوزيع كما حسب في الجدول (٤) وهو p وأما تباين هذا التوزيع فـيمكن حسابه كما في جدول (٧) التالي:

جـــدول (٧)

تباين التوزيع ثنائي الحدين

$n = 1$

X	f(x)	x - μ	$(x-\mu)^2 f(x)$
0	q	0-p	$q^2 q$
1	p	1-p	$(1-p)^2 p$
المجمـوع			$\sigma_x^2 = p^2q + q^2p$ $= pq(p+q) = pq$

وبجعل n تساوي ٢ فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في جدول (٢) وتوقع هـذا التوزيع هو 2p كما حسب في جدول (٥) وأما تباين هذا التوزيع فـيمكن الوصول إليه كما في جدول (٨) التالي:

جـــدول (٨)

تباين التوزيع ثنائي الحدين

n = 2

X	**f(x)**	**x – u**	**$(x\text{-}u)^2\ f(x)$**
0	q^2	-2p	$4p^2\ q^2$
1	2pq	1-2p	$(1-2p)^2\ 2pq$
2	p^2	2-2p	$4(1-p)^2\ p^2$
المجمـوع			$\sigma_x^2 = 4p^2q^2 + (1-2p)^2\ 2pq + 4(1-p)^2\ p^2$ $= 4p^2q^2 + (1-4p+4p^2)\ 2pq + 4q^2\ p^2$ $= 8p^2q^2 + 2pq - 8p^2q + 8p^2\ q$ $= 8p^2\ q\ (q-1+p) + 2p\ q$ $= 8p^2\ q\ (0) + 2p\ q$ $= 2pq$

وبجعل n تساوي ٣ فان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشـوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في جدول (٣) وتوقـع هـذا التوزيع كما حسب في جدول (٦) هو 3p ويمكننا بنفس الطريقة أن نصل إلى تباين هذا التوزيع يساوي 3pq عندما n تساوي ٣

وهكذا يكون تباين التوزيع ثنائي الحدين يساوي:

pq عندما n تساوي ١

2pq عندما n تساوي ٢

3Pq عندما n تساوي ٣

ويمكننا تعميم هذه النتيجة بالقول بان تباين التوزيع ثنائي الحدين يسـاوي npq لـ n اختبار

- تباين التوزيع ثنائي الحدين
إذا كان p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل في كل اختبار فإن تباين التوزيع الاحتمالي لـ n اختبار هو

ويمكننا برهنه ذلك أيضا باستخدام قوانين التوقع والتباين كما يلي

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{x^2\, n!\, p^x\, q^{n-x}}{x!\,(n-x)!}$$

وبالتعويض محل x^2 بـ $x(x-1)+x$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{[x(x-1)+x]\,n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{x(x-1)\;n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x-0}^{n} \frac{xn!}{x!(n-x)!} p^x\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n(n-1)\,(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!}\; p^x\, q^{(n-2)-(x-2)} + E(x)$$

$$= n\,(n\text{-}1)\; p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!}\; p^{x-2}\, q^{(n-2)-(x-2)} + np$$

$$= n\,(n\text{-}1)\; p^2\;\; (q+p)^{n-2} + np$$

$$= n^2\, p^2 - np^2 + np$$

$$\sigma_x^2 \quad = E\,(x2) - [E(x)]^2$$

$$= n^2\, p^2 - np^2 + np - n^2\, p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np\,(1-p)$$

$$= npq$$

وهكذا فان $\sigma^2 = npq$

والانحراف المعياري للتوزيع ثنائي الحـدين يسـاوي الجـذر التربيعـي الموجب للتباين

$$\sigma \;=\; \sqrt{\sigma^2} \;=\; \sqrt{npq}$$

مثـال ٤ :

بالعودة إلى مثال ٣ وهو إلقاء قطعة نقد ١٠٠ مره فما هو التباين والانحراف المعياري لعدد مرات ظهور الوجه صورة؟

الحـ ـل:

دع x تمثل المتغير العشوائي وهو عدد مرات ظهور الوجه صوره وهكذا فان x لها توزيع ثنائي الحدين فيه

$$P = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$n = 100$$

التباين $= \sigma_x^2 = npq$

$$= 100 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 25$$

الانحراف المعياري $= \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25} = 5$

- **توزيع بواسـ ـ ـ ـ ـون**

يستخدم توزيع بواسون في التجارب التي تكون نتيجتهـا وقـوع الحدث موضع الاهتمام عددا صحيحاً من المرات خلال وحده زمنية محددة (مثل الدقيقة أو الساعة أو اليوم ... الخ) أو على وحده أو منطقة محـددة من الحيز (مثل الطول أو المساحة) ، بينما يستخدم توزيع ثنائي الحـدين

لمعرفة عدد مرات وقوع الحدث موضع الاهتمام في عدد محدد من الاختبارات . ومن أمثلة تطبيقات توزيع بواسون:

أ) المسائل التي تحتاج إلى الانتظار أو المرتبطه بالزمن مثل :

- عدد حوادث السير في أسبوع بمدينة ما.
- عدد القطارات التي تغادر المحطة في الساعة.
- عدد المراجعين في أحد مراكز الخدمة في اليوم.
- عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها الراديوتاكسي في الدقيقة.

ب) المسائل التي ترتبط بمناطق الفراغ أو الحيز مثل المسائل المرتبطة بمراقبة الجودة ومنها :

- عدد العيوب الموجودة في قطعة قماش محددة المساحة
- عدد العيوب الموجودة في سلك للهاتف طوله كيلومتران
- عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة التي ترتكبها إحدى السكرتيرات

وهكذا فان المتغير البواسوني هو متغير متقطع ياخذ قيمة من القيم صفر أو ١ أو ٢ أو ... في فترة زمنية متصلة أو في حيز أو منطقة متصلة ويجب أن يحقق الشروط الثلاثة التالية:

١- عدد مرات النجاح مستقلة في فترتين متتاليتين من الزمن أو منطقتين متصلتين من الحيز.

٢- احتمال النجاح خلال فترة قصيرة من الزمن أو منطقة صغيرة من الحيز يتناسب مع طول هذه الفترة أو منطقة هذا الحيز.

٣- احتمال نجاحين أو أكثر خلال فترة زمنية قصيرة أو منطقة من الحيز صغيرة يكون صغيراً جداً بحيث يمكن إهماله.

والتوزيع الاحتمالي لمتغير بواسون العشـوائي يـدعي بتوزيـع بواسون ويعطي حسب التعريف التالي:

- **توزيع بواسون**

إذا كانت X هي متغير بواسون العشوائي وان القيم الممكنة لـ X هي ٠، ١، ٢، ... فان التوزيع الاحتمالي لـ X يدعى بتوزيع بواسون. ويعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^{x}}{x!}$$

حيث

x = ٠، ١، ٢ ، ...

e = ثابت قيمته ٢.٧١٨٢٨

λ = متوسط عدد مرات النجاح في الفترة الزمنية أو منقطة الحيز المحددة وتسمى معلمة التوزيع.

<u>مثـال ٥:</u>

افترض أن متوسط عدد الزبائن في الدقيقة الذين يدخلون احد المحلات التجارية هو ثلاثة زبائن ، باستخدام توزيع بواسون أوجد احتمال ان أربعة زبائن بالضبط سيدخلون المحل خلال دقيقة معينة.

الحــل:

دع x تمثل المتغير العشوائي عدد الزبائن الذين يدخلون المحل في الدقيقة فيكون لـ x توزيع بواسوني متوسطة λ تساوي ٣ . باستخدام صيغة توزيع بواسون:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \ \lambda^{x}}{x!}$$

$$p(x=4) = f(4) = \frac{e^{-3} \ (3)^{4}}{4!}$$

$$= \frac{0.05 \ (81)}{24}$$

(حيث ٠.٠٥ = e^{-3})

$$= \frac{135}{800}$$

$$= 0.16875$$

مثـال ٦:

إذا كان متوسط عدد العيوب في شريحة زجاجية كبيرة هو واحد لكل ٢٠ قدم مربع فما هو احتمال ان شريحة ٣ × ١٠ قدم :

i) لا تحتوي على عيوب.

ii) تحتوي على عيب واحد على الأقل.

الحـــل:

دع x تمثل عدد العيوب في الشريحة ٣ × ١٠

فيكون لـ x توزيع بواسوني معلمته هي

$$\lambda = \frac{3 \times 10}{20} = 1.5$$

أي أن متوسط عدد العيوب في الشريحة ٣ × ١٠ هو ١.٥

وبتطبيق صيغة بواسون:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \ \lambda^{x}}{x\,!}$$

i) $P\,(x=0) = f(0) = \dfrac{e^{-1.5}\,(1.5)^{0}}{0\,!} = e^{-1.5} =$

0.223

ii) p (عيب واحد على الأقل) = 1-p (x=0) =

1 - 0.223

= 0.777

- **توقع وتباين توزيع بواسون**

إذا كانت x تمثل متغير بواسوني وبالتالي لها توزيع بواسون

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \ \lambda^{x}}{x\,!}$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\lambda > 0$$

فان توقع وتباين متغير بواسون العشوائي x يساوي معلمة التوزيع أي يساوي λ أي أن:

$$\mu_x = E(x) = \lambda$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \lambda$$

البرهـ ـان:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \ f \ (x)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} x \ \frac{e^{-\lambda} \ \lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \ \lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= \lambda \, e^{-\lambda} \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

ومن المعروف في التفاضل والتكامل أن

$$e^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots = \sum_{x=0}^{1} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\therefore \ E(x) = \lambda \, e^{-\lambda} \, e^{\lambda} = \lambda$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{x^2 \ e^{-\lambda} \ \lambda^x}{x!}$$

بتعويض X^2 بالقيمة $X(X-1)+X$ ينتج

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{[x(x-1)+x]\ e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{[x(x-1)\ e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{x\, e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \frac{x\, e^{-\lambda} \lambda^{x}}{(x-2)!} + E(x)$$

$$= \lambda^{2} e^{-\lambda} \sum_{2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^{2} e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^{2} + \lambda$$

var (x) = E (x2) – [E (x)]2

$$= (\lambda^{2} + \lambda) - \lambda^{2}$$

$$= \lambda$$

تماريـن

الفصـــل الرابـع

١) صندوق بداخله ٢٠ مصباحاً كهربائيا منها ٥ تالفة ، سحبنا ٤ مصابيح بطريقة عشوائية مع الإعادة أحسب احتمال :

i) الحصول على مصباح واحد معيب (تالف) (٢٧/٦٤)

ii) الحصول على مصباح واحد على الأقل معيب (تالف) (١٧٥/٢٥٦)

٢) إذا كان الامتحان يتكون من ١٠ أسئلة وكان احتمال أن يجيب الطالب على أي سؤال عشوائي هو ٠.٢ أوجد الاحتمالات التالية:

i) احتمال الا يجيب الطالب على أي سؤال (٠.١٠٧٤)

ii) أن يجيب على سؤال أو اكثر (٠.٨٩٢٦)

iii) أن يجيب على ٣ أسئلة فقط (٠.٢)

٣) إذا كان ٠.١٥ من إنتاج إحدى الشركات من التلفزيونات الملونه معيبا ، شحن ١٥ جهازا إلى أحد العملاء . فإذا اعتبرنا كل جهاز تجربـة مستقلة فما هو احتمال :

i) أن لا يكون من بين الشحنه أي تلفزيون معيب (٠.٠٨٧٣)

ii) أن يكون واحدا أو أقل معيبا (٠.٣١٨٥)

٤) إذا القينا حجر النرد ٤ مرات وكانت k تمثل عدد مرات ظهور الوجه ستة في هذه الرميات الأربع أوجد التوزيع الاحتمالي لـ k .

٥) أسره لديها ٥ أطفال فإذا كان احتمال أن يكون الطفل ولـدا يسـاوي احتمال أن يكون بنتا ويساوي ١/٢ ، فما هو احتمال :

i) أن يكون جميع الأطفال من نفس الجنس (١/١٦)

ii) أن يكون لدى الأسرة على الأقل ولدا واحدا وبنتا واحدة (١٥/١٦)

٦) علبة من بذور الورد ثلثها يعطي ورداً أحمرا والبـاقي يعطـي وردا أبيضاً ، فإذا زرعنا ٧ بذرات من هذه العلبة فأحسب احتمال :

i) ان لا نحصل على أي ورده حمراء (١٢٨/٢١٨٧)

ii) أن نحصل على ورده واحده حمراء (٤٤٨/٢١٨٧)

iii) ان لا نحصل على أي ورده بيضاء (١/٢١٨٧)

٧) إذا كان في المتوسط هاتفا واحدا من بين كل ٤ هواتف يكون مشغولا في منطقة تجارية في مدينة ما بين الساعة الحادية عشـره والسـاعة الثانية عشره وان تسعة أرقام عشوائية طلبت في ذلك الوقـت أوجـد احتمال:

i) أن جميع الهواتف المطلوبة غير مشغولة (٠.٠٧٥)

ii) أن واحدا فقط مشغولا (٠.٢٢٥)

iii) أن اثنين أو أكثر من الهواتف المطلوبة مشغولة
(٠.٧٠٠)

٨) شخصان ألقى كل منهما قطعة نقد خمس مرات إحسب احتمال أنهمـا حصلاً على نفس العدد من الصور.
(٦٣/٢٥٦)

٩) إذا كان احتمال التهديف للاعب كره سلة في كل رمية هو ١/٥ فما هو احتمال الحصول على ٤ أهداف على الأقل من ٢٥ رميه.
(٠.٧٦٦)

١٠) في أحد الامتحانات الشفوية احتمال أن تجيب نوال على سؤال اجابه صحيحة هو ١/٣ فما هو احتمال أن يكون السؤال الخـامس هـو أول سؤال تجيب عليه إجابة صحيحة (١٦/٢٤٣).

١١) افترض أن ٠.٣٠ من الطلبة يدخنون ، اختيرت عينه عشوائية من ٦ أشخاص ، ما هو احتمال أن اثنين منهم على الأقل يدخنون؟ (٠.٥٨)

١٢) إذا كانـت درجـة الثقــة فـي الترانزيزتـــور هـــي ٠.٩٠ . راديويـه ١٠ ترانزيزتورات ، ما هو احتمال وقوع خلل
(٠.٦٥١٣)

١٣) أوجد قيم المعلمات n , p للتوزيع ثنائي الحدين الذي وسـطه ٩ وتباينـــــــــــــــــــــــــــــــه

١٨/٥ (p = ٣/٥ ، n = ١٥)

١٤) أوجد كل من توقع وتباين التوزيع ثنائي الحدين الذي فيه $p = 0.2$ ، $n = 35$

($\mu = 7 \quad \sigma^2 = 5.6$)

١٥) كتاب مؤلف من ٢٣٢ صفحة ، به ٢٣٢ خطأ مطبعي موزعه عشوائيا أحسب احتمال ان صفحة ما :

i) بها بالضبط خطأين ($e^{-1/2} = 0.1839$)

ii) بها أقل من خطأين ($2e^{-1} = 0.7356$)

١٦) إذا كان متوسط عدد حوادث العمل في مصنع ما هو ٤ حوادث شهريا فما هو احتمال :

i) أن لا يقع أي حادث في شهر معين ($e^{-4} = 0.018$)

ii) ان يقع ثلاثة حوادث على الأكثر في شهر معين (٠.٤٢٦)

١٧) إذا كان متوسط عدد المراجعين في أحد مراكز الخدمة هو اثنان كل خمس دقائق وإذا كان عدد المراجعين يتبع توزيع بواسون، فما هو احتمال:

i) أن لا يصل أي مراجع خلال خمس دقائق ($e^{-2} = 0.135$)

ii) أن أكثر من ٤ مراجعين وصلوا خلال ١٠ دقائق (٠.٣٨٢)

١٨) ما هو احتمال أن يتلقى أحد السنترالات أربع مكالمات هاتفية خلال دقيقتين إذا كان متسوط عدد المكالمات الهاتفية التي تصل السنترال هو مكالمتان في الدقيقتين؟ (٠.٠٩)

١٩) إذا كان متوسط عدد الأخطاء المطبعية التي ترتكبها إحدى السكرتيرات هو ٤ أخطاء في الصفحة ، فما هو احتمال:

i) أن تطبع صفحه بدون أخطاء (e^{-4}=0.018)

ii) أن ترتكب خطأين على الأقل في كتابة أحد الصفحات (0.91)

٢٠) إذا كان متوسط عدد العيوب في شريحه زجاجية كبيره هو واحد لكل عشرة أقدام مربعة فما هو احتمال أن شريحه ٦ × ١٠ قدم:-

i) سوف تكون بدون عيوب (e^{-6}=0.0025)

ii) سيكون بها على الأقل عيب واحد (0.9975)

٢١) في مصنع لإنتاج أشرطه التسجيل تحدث شروخ في الأشرطة المنتجة عشوائياً بمتوسط شرخ كل ٢٠٠ متر أحسب احتمال أن يكون في شريط طوله ٥٠٠ متر.

i) شرخين على الأكثر (0.543)

ii) على الأقل ثلاث شروخ (0.457)

22) تحدث عيوب في تغطيه رقائق من الصلب بالكروم بمعدل واحد في كل ٢م^{٢} ، ما احتمال أن تكون رقيقه أبعادها ٣م × ٧م .

i) خاليه من العيوب (٠.٠٠٠٠١)

ii) بها على الأكثر عيب واحد (٠.٠٠٠١٢٦٦)

حل تمارين الفصل الرابع

١) دع المتغير x يدل على عدد المصابيح التالفة المسحوبة

فتكون قيم x الممكنة هي ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .

دع p تمثل احتمال سحب مصباح تالف عندئذ $p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

المتغير x هنا ثنائي الحدين وذلك لان السحب يتم بالإعادة

واحتمال سحب مصباح تالف لا يتغير من اختبار إلى أخر بل

ثابت ويساوي $\frac{1}{4}$

i) $n = 4$

$x = 1$

$p = \frac{1}{4}$

$q = \frac{3}{4}$

وباستخدام صيغة التوزيع ثنائي الحدين نحصل على :

$$P(x=1) = f(1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$$

$$= \frac{4!}{1!\ 3!}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{27}{64}\right)$$

$$= \frac{27}{64}$$

(ii

$$P(x \geq 1) = p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + p(x=4)$$

$$= 1 - p(x=0)$$

$$= 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$= 1 - 81/256 = 175/256$$

٢) دع x تمثل عدد الأسئلة التي يجيب عليها الطالب فتكون قيم x الممكنة هي ٠ ، ١ ، ... ، ١٠

وهكـذا

$$n = 10$$

$$p = 0.2$$

$$q = 0.8$$

وباستخدام صيغه التوزيع ثنائي الحدين

i) $f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$$p(x=0) = f(0) = \binom{10}{0} (0.2)^0 (0.8)^{10}$$

$$= (0.8)^{10}$$

$$= 0.1074$$

ii) $p(x \geq 1) = f(1) + f(2) \ldots +$
$f(10)$

$= 1 - f(0)$

$= 1 - (0.8)^{10}$

$= 0.8926$

iii) $p(x = 3) = f(3) = \binom{10}{3} (0.2)^3 (0.8)^7$

$= 120 (0.008) (0.8)^7$

$= 0.2013$

$\cong 0.2$

٣) دع x تمثل عدد الأجهزة المعيبه المشحونه للعميل . فتكون قيم x الممكنة هي ١٥، ... ، ٢ ، ١ ، ٠

p = ٠.١٥ احتمال أن يكون الجهاز معيبا

q = ٠.٨٥ احتمال أن يكون الجهاز سليما

n = ١٥

i) $p(x = 0) = f(0) = \binom{15}{0} (0.15)^0 (0.85)^{15}$

$= (0.85)^{15}$

$= 0.0873$

ii) $p(x \leq 1) = p(x = 0) + p(x = 1)$

$= f(0) + f(1)$

$$= \binom{15}{0} (0.15)^0 (0.85)^{15} + \binom{15}{1} (0.15)^1 (0.85)^{14}$$

$$= 0.0873 + 15\,(0.15)\,(0.85)^{14}$$

$$= 0.0873 + 0.2312$$

$$= 0.3185$$

٤) القيم الممكنة لـ k هي :

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

n = ٤

احتمال الحصول على الوجه سته $p = \frac{1}{6}$

$q = \frac{5}{6}$

$$p\,(K = k) = f\,(k) = \binom{4}{K} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

والجدول التالي يعطي التوزيع الاحتمالي للمتغير K

القاء حجر النرد ٤ مرات

K	P_k	P_k
0	$(5/6)^4$	0.4823
1	$4(1/6)\,(5/6)^3$	0.3858
2	$6(1/6)^2\,(5/6)^2$	0.1157
3	$4(1/6)^3\,(5/6)$	0.0154
4	$(1/6)^4$	0.0008

٥) دع x تمثل عدد الأولاد من بين الأطفال فتكون قيم x الممكنة هي
٠ ، ١ ، ... ، ٥

n = ٥

$p = \frac{1}{2}$ احتمال أن يكون الطفل ولدا

$q = \frac{1}{2}$ احتمال أن يكون الطفل بنتا

i)

احتمال أن يكون لدى الأسره ولدا واحدا وبنتا واحده على الأقل هو احتمال أن يكون لديها ولد أو اثنين أو ثلاثه أو أربعة ، أي أن لا يكون لديها ٥ أولاد أو ٥ بنات.

فيكون الاحتمال المطلوب يساوي

$$P = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$
$$= \binom{5}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \binom{5}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^4$$
$$= \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} = \frac{15}{16}$$

أو

الاحتمال المطلوب = ١- (احتمال الخمسة اولاد + احتمال الخمسة بنات)

$$= 1 - [P(5) + P(0)]$$
$$= 1 - \left[\frac{1}{32} + \frac{1}{32}\right] = \frac{15}{16}$$

ii)

الاحتمال المطلوب يساوي احتمال كلهم أولاد + احتمال كلهم بنات

$$P = P(0) + P(5)$$
$$= \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}$$

٦) دع x تمثل عدد الوردات الحمراء التي تحصل عليها من زرع ٧ بذرات ، فتكون قيم x الممكنة هي ٠ ، ١ ، ٢ ، ٧

دع p احتمال الحصول على ورده حمراء

q احتمال عدم الحصول على ورده حمراء

$$p = \frac{1}{3}$$
$$q = \frac{2}{3}$$

i) $$p(0) = f(0) = \binom{7}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^7$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{128}{2187} = 0.05853$$

ii) $$p(1) = f(1) = \binom{7}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^6$$
$$= 7\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{448}{2187} = 0.2048$$

iii) $$p(7) = f(7) = \binom{7}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^0$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187} = 0.0005$$

٧) دع x تمثل عدد الهواتف المشغوله ، فتكون قيم x الممكنة هي ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ٩

$n = ٩$

$p = \frac{1}{4}$

$q = \frac{3}{4}$

i) احتمال أن جميع الهواتف المطلوبة غير مشغوله هو احتمال أن يكون صفر منها مشغولاً

$$P(x = 0) = f(0) = \binom{9}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^9$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^9$$

$$= 0.075$$

ii) احتمال أن واحدا فقط مشغولا

$$P(x = 1) = f(1) = \binom{9}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^8$$

$$= 0.225$$

iii) احتمال أن اثنين أو اكثر مشغوله

$$P(x \geq 2) = p(x = 2) + p(x = 3) + \ldots + p(x = 9)$$

$$= 1 - [p(x = 0) + p(x = 1)]$$

$$= 1 - 0.075 - 0.225$$

$$= 0.7$$

٨) د ع x تمثل عدد مرات الحصول على وجه الصوره عند القاء قطعه عمله ٥ مرات ، فتكون قيم x الممكنة لكل شخص هي

٠،١ ، ٢ ... ٥

$n = 5$

$p = q = 1/2$

يحصلان على نفس العدد من الصور إذا حصل كل منهما على صفر أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أي

(٥ و ٥) أو (٤ و ٤) أو (٣ و ٣) أو (٢ و ٢) أو (١ و ١) أو (٠ و ٠)

احتمال الحصول على كل حالة من هذه الحالات يساوي

$$\left[\binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^2$$

فمثلاً

$$\begin{aligned}(0\ ,\ 0) &= P(0)\ \ p(0)\\ &= \left[\left\{\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}\left\{\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}\right]\\ &= \left[\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^2\end{aligned}$$

∴ احتمال أن يحصلا على نفس العدد من الصور هو

$$P = \left[\left\{\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}^2 + \left\{\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}^2 + \left\{\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}^2 + \left\{\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}^2\right.$$

$$+\left\{\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}^2+\left\{\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}^2 \Bigg]$$

$$=\left(\frac{1}{2^{10}}\right)+25\left(\frac{1}{2^{10}}\right)+100\left(\frac{1}{2^{10}}\right)+100\left(\frac{1}{2^{10}}\right)+25\left(\frac{1}{2^{10}}\right)+\left(\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$=\frac{252}{2^{10}}=\frac{252}{1024}=\frac{63}{256}$$

٩) دع x تمثل عدد الأهداف المتحققه من ٢٥ رميه ، فتكون قيم x الممكنة هي ٠ ، ١ ، ... ٢٥

$q = \frac{4}{5}$ ، $p = \frac{1}{5}$ ، n = ٢٥

احتمال الحصول على أربعة أهداف على الأقل هو احتمال الحصول على أربعة أهداف أو أكثر وهو

$$P = (x = 4) + p\,(x = 5) + \ldots + p\,(x = 25)$$

$$= 1 - [p\,(x = 0) + p\,(x = 1) + p\,(x = 2) + p\,(x = 3)]$$

$$= 1 - \left[\binom{25}{0}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{25}+\binom{25}{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{24}+\binom{25}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{23}+\binom{25}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^{22}\right]$$

$$= 1-(0.0037777 + 0.0236110 + 0.0708336 + 0.1357644)$$

$$= 0.766$$

١٠) احتمـال أن يكون السؤال الخامس هو أول سؤال يجاب عليـه إجابة صحيحة هو احتمال أن يجاب على الأسئلة الأربعة الأولـى

بإجابات خاطئة ويجاب على السؤال الخامس إجابة صحيحة ويساوي:

$$p = \left[\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]\left[\binom{1}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^0\right]$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{3} = \frac{16}{3^5} = \frac{16}{243}$$

أو

$$P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{243}$$

(١١) دع x تمثل عدد المدخنين فتكون قيم x الممكنة هي: ٠ ، ١ ، ... ٦

احتمال أن يكون الطالب مدخنا هو احتمـال النجـاح = p = ٠.٣٠

احتمال أن يكون الطالب غير مدخن هو احتمال الفشـل = q = ٠.٧٠

n = ٦

احتمال أن اثنين من العينة على الأقل مدخنون هو احتمـال ان يكون عدد المدخنين ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ هو

$$P(x \geq 2) = 1 - p(x < 2)$$

$$= 1 - [p(x = 0) + p(x = 1)]$$

وهكـذا

$$P = 1- [\binom{6}{0}(0.3)^0 (0.7)^6 + \binom{6}{1}(0.3)^1 (0.7)^5]$$

$$= 1 - (0.117649 + 0.302526)$$

$$= 0.579825$$

١٢) يقـع الخلل إذا اختـل أو تلف ترانزيزتـور واحـ ـد علـى الأقـل دع x تمثل المتغير عدد الترانزيزتورات التالفه وتكون قيم x الممكنة هي

(٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ١٠)

احتمال النجاح = احتمال وقوع خلل = p = ٠.١

احتمال الفشل = احتمال عدم وقوع خلل = q = ٠.٩

n = ١٠

احتمال وقوع خلل = واحد ناقص احتمال عدم وقوع خلل = واحد ناقص احتمال أن تكون كلها تعمل

$$P = 1 - \binom{10}{0} (0.1)^0 (0.9)^{10} = 1 - (0.9)^{10}$$

$$= 0.6513$$

١٣) الوسط الحسابي أو التوقع للتوزيع ثنائي الحدين يساوي np والتباين للتوزيع ثنائي الحدين يساوي npq

$$np = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$$

$$npq = \frac{18}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بتعويض (١) في (٢)

$$9q = \frac{18}{5}$$

$$q = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

$$p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

بتعويض قيمة P في (١)

$$n = 9 \div \frac{3}{5} = \frac{45}{3} = 15$$

١٤)

n = ٣٥

p = ٠.٢

q = ٠.٨

التوقع = np

التباين = npq

$$\mu = np$$

$$\therefore \mu = 35\,(0.2) = 7$$

$$\sigma^2 = npq$$

$$\sigma^2 = 7\,(0.8) = 5.6$$

١٥) دع x تمثل عدد الأخطاء في الصفحة الواحدة ، فيكون لـ x توزيع بواسون بمتوسط خطأ واحد في كل صفحة

$$\lambda = \frac{232}{232} = 1$$

(i

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$p(x = 2) = f(2) = \frac{e^{-1} (1)^2}{2!}$$

$$= e^{-1}/2 = 0.1839$$

حيـث

$$e^{-1} = 0.368$$

(ii

$$P(x < 2) = \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-1} (1)^x}{x!}$$

$$= e^{-1} \left(1 + \frac{1}{11}\right)$$

$$= 2 e^{-1}$$

$$= 0.736$$

١٦) دع x تمثل عدد الحوادث في الشهر المعين فيكون لها توزيع بواسون الذي معلمته = ٤

(i

$$f(0) = \frac{e^{-4} (4)^0}{0!}$$

$$= e^{-4}$$

$$= 0.018$$

(ii

$$P(x \le 3) = \sum \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^x}{x!}$$

$= p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3)$

$f(0) = e^{-4} = 0.018$

$f(1) = \frac{e^{-4}\, 4}{1!} = 0.072$

$f(2) = \frac{e^{-4}\, (4)^2}{2!} = 0.144$

$f(3) = \frac{e^{-4}\, (4)^3}{3!} = 0.192$

$f(x \le 3) = 0.426$

١٧) دع x هي المتغير وهي عدد المراجعين

متوسط عدد المراجعين في الدقيقة = $\frac{2}{5} = \lambda$

متوسط عدد المراجعين في ٥ دقائق = ٢

متوسط عدد المراجعين في ١٠ دقائق = ٤

$\therefore$ ٢ = λ في خمس دقائق

٤ = λ في عشر دقائق

i) $P(x = 0) = f(0) = \frac{e^{-2}\, 2^0}{0!}$

$= e^{-2}$

$= 0.135$

ii) $\lambda = 4$ $\qquad P(x > 4) = 1 - P(x \le 4)$

$$P(x \le 4) = \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!}$$

$$= P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4)$$

$$f(0) = e^{-4} = 0.018$$

$$f(1) = e^{-4}(4) = 0.072$$

$$f(2) = \frac{e^{-4}(4)^2}{2!} = 8\,e^{-4} = 0.144$$

$$f(3) = e^{-4}\left(\frac{64}{6}\right) = 0.192$$

$$f(4) = \frac{e^{-4}(4)^4}{4!} = \frac{64}{6}\ e^{-4} = 0.192$$

$$0.618$$

$$\therefore\ P(x > 4) = 1 - P(x \le 4)$$

$$= 1 - 0.618$$

$$= 0.382$$

١٨) دع x تمثل المتغير عدد المكالمات الهاتفية التي تصل خلال دقيقتين فيكون لها توزيع بواسون بمعلمه ٢ = λ

$$P(x = 4) = f(4) = \frac{e^{-2}\ 2^4}{4}$$

$$= \frac{2}{3}\ e^{-2}$$

$$= \frac{2(0.135)}{3} = \frac{270}{3}$$

$$= 0.090$$

١٩) دع x تمثل المتغير عدد الأخطاء المرتكبة في الصفحة فيكون

لـ x توزيع بواسون بمعلمه $\lambda = 4$

i) $P(x = 0) = f(0) = \dfrac{e^{-2}\ 2^{4}}{0!}$

$= e^{-4} = 0.018$

ii) $P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)$

$= 1 - [P(X = 0) + (P(X = 1)]$

$= 1 - (0.018 + 4e^{-4})$

$= 1 - (0.018 + 0.072)$

$= 0.91$

٢٠) دع x تمثل عدد العيوب في الشريحه ٦ × ١٠ قدم

يكون لـ x توزيع بواسون الذي معلمته $\lambda = \dfrac{(6)\ (10)}{10} = 6$

$f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!}$

i) $P(x = 0) = f(0) = e^{-6} =$

0.0025

ii) $P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1)$

$= 1 - P(x = 0)$

$= 1 - f(0)$

$= 1 - 0.0025 = 0.9975$

٢١) دع x تمثل عدد الشروخ في الـ ٥٠٠متر

$$\therefore \lambda = \frac{500}{200} = 2.5$$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

i) $P(x \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

$f(0) = e^{-2.5}$

$f(1) = e^{-2.5}$

$$f(2) = \frac{e^{-2.5} (2.5)^2}{2} = 3.126\, e^{-2.5}$$

$P(x \leq 2) = 6.625\ e^{-2.5} = (6.625)(0.082) = 0.543$

ii) $P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3)$

$= 1 - \{f(0) + f(1) + f(2)\}$

$= 1 - 0.543$

$= 0.457$

٢٢) دع x تمثل عدد العيوب في الرقيقة 3 × ٧ م

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} \qquad\qquad 11.5 = \frac{21}{2} = \lambda$$

i) $P(x = 0) = f(0) = e^{-11.5} = 0.00001$

ii) $P(x \le 1) = f(0) + f(1)$

$f(1) = e^{-11.5}\ 11.5$

$f(0) + f(1) = 12.5\ e^{-11.5} = 0.0001266$

الفصـــــــل الخامس

الفصـل الخامـس

التوزيع الطبيعي

The Normal Distribution

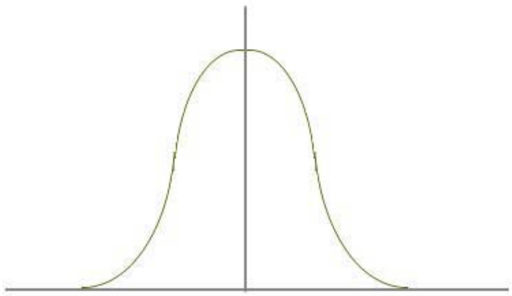
يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتماليـة وأكثرهـا استعمالا على الاطلاق ، بل انه يحتل موضع الصداره فـي الاحتمـالات والاحصاء ، وقد اشتق اسمه من أن كثيرا من التوزيعات "الطبيعية" تأخـذ شكلا قريبا منه ، كذلك فإن معظم التوزيعات البيومتريه (كتوزيعات الطول والوزن) وتوزيعات أخطاء المشاهدات (الفروق بين القيم الحقيقيه والقـيم المشاهده) تأخذ شكلا قريبا منه ، ويستخدم هذا التوزيع فـي كثيـر مـن التجارب الصناعية واختبارات الجوده وله استخدامات واسعه في اختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعاينه وغيرها.

كان أول من اكتشفت هذا التوزيع العالم دي موافر De Moiver عام ١٧٣٣ ومن بعده العالم غوس Gauss في عام ١٨٠٩ ويعرف هـذا التوزيع أيضاً باسمه أي توزيـع غـوس Gauss Distribution ولهـذا التوزيع خواصه الرياضية ويمكن ان يكون تقريبـا أو حالـة خاصـة لتوزيعات أخرى مثـل توزيع ثنائي الحدين.

منحنى هذا التوزيع يدعى بالمنحنى الطبيعي ، وعندما نتكلم عـن منحنى توزيع نظري فأننا نقصد منحنى دالـة كثافـة احتمـال المتغيـر العشوائي الذي لـه هذا التوزيع ، ومنحنى التوزيع الطبيعي متماثل حـول خط راسي يمر بالوسط الحسابي الذي يساوي بسبب التماثـل كـلا مـن الوسيط والموال. وهو ناقوسي الشكل له قمه واحده ويمتد طرفاه إلى ما لا

نهاية يمينا ويسارا (فيقترب طرفاه من المحور الأفقـي ولكنهمـا لا يلتقيان معه) ومع ذلك فان المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح كما هو الحال في المساحة تحت منحنى داله كثافـة احتمـال أي متغيـر عشوائي متصل أخر.

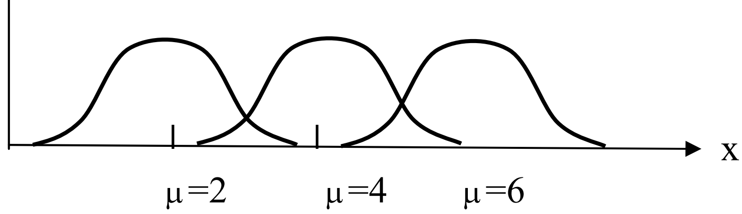
والشكل ١ يمثل المنحنى :



شكل ١
التوزيع الطبيعي

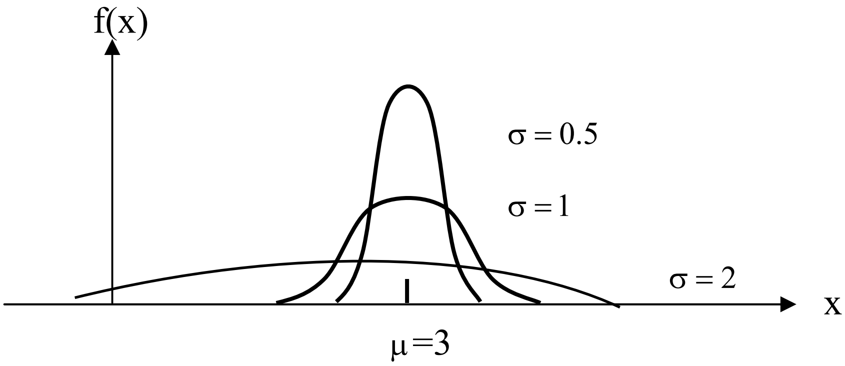
هناك عدد لا نهائي من المنحنيات الطبيعية ولكنها تختلـف عـن بعضها البعض حسب قيمـة كـل مـن الوسـط الحسـابي (التوقـع) μ والانحراف المعياري σ ، وقد تتفق منحنيات طبيعيـة فـي الانحـراف المعياري ولكنها تختلف في الوسط الحسابي كما هو في الشكل ٢ ، أو قـد تتفق بالوسط الحسابي وتختلف بالانحراف المعياري كما هو في الشكل ٣

ا



شكل ٢

منحنيات طبيعية لها نفس الانحراف المعياري مع اختلاف الوسط الحسابي



شكل ٣

منحنيات طبيعية لها نفس الوسط الحسابي مع اختلاف الانحراف المعياري

- **بعض خواص المنحنى الطبيعي**

١) المنحنى الطبيعي متماثل حول الوسط الحسابي μ أي أن المنحنى على يسار الوسط الحسابي يماثل المنحنى على يمينه.

٢) الوسط الحسابي في المنتصف ويقسم المساحه تحت المنحنى إلى قسمين متساويين.

٣) مجموع المساحه تحت المنحنى تساوي واحد.

٤) مهما كانت قيمة μ و σ فإن للمنحنى الطبيعي الخواص التالية:

أ- حوالي ٦٨.٢٦% من المساحه يقع بين القيمتين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$

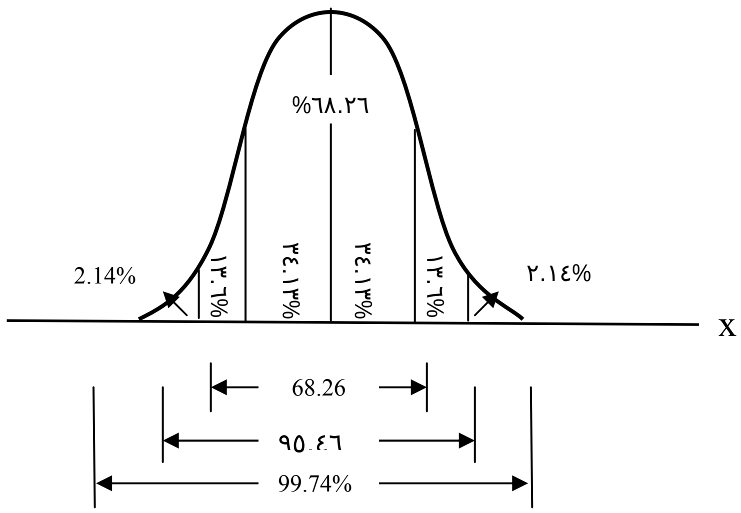
ب- حوالي ٩٥.٤٦% من المساحه يقع بين القيمتين μ-٢σ و
μ+ ٢σ

ج- حوالي ٩٩.٧٤% من المساحة يقع بين القيمتين μ - ٣σ و ٣σ
μ+

د- حوالي ٩٥% من المساحة يقع بين القيمتين μ-١.٩٦σ و ١.٩٦σ
μ+

هـ- حوالي ٩٩% من المساحة يقع بين القيمتين μ-٢.٥٨σ و
μ+ ٢.٥٨σ

كما هو موضح في الشكل ٤ التالي:



يقال للمتغير العشوائي المتصل x بانه موزع طبيعيا إذا كانت داله كثافة الاحتمال له معطاه بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث

$-\infty > x < \infty$

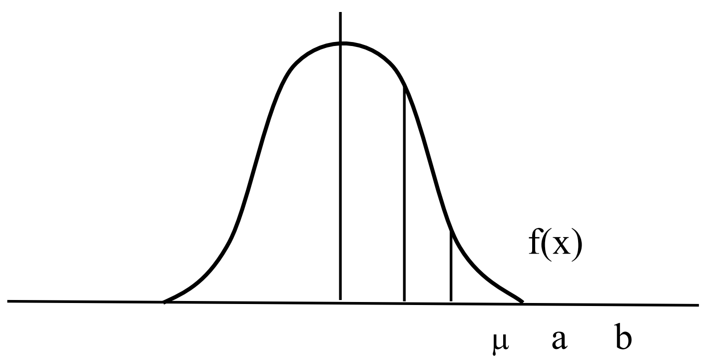
μ هي الوسط الحسابي للمتغير الطبيعي

e ثابت قيمته ٢.٧١٨٢٨

π هي النسبة التقريبية وتساوي ٣.١٤١٥٩

ويكتب التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسـابي μ وتباينـه σ^2 (فيكون انحرافه المعياري يساوي σ) يكتب بالرمز $N(\mu ، \sigma^2)$ فمـثلا $N(20,4)$ تعني متغيرا طبيعيا له وسط حسابي (توقع) يساوي ٢٠ وتباين يساوي ٤ (أي انحراف معيار يساوي ٢).

بما أن $f(x)$ داله كثافة احتمال يكون مجمـوع المسـاحة تحـت منحنى هذه الداله مساويا لواحد صحيح واحتمال أن متغيراً عشوائيا متصلا وسطه μ وتباينه σ^2 يقع بين قيمتين محددتين مثل a , b هو $p(a < x < b)$ ويساوي المساحة المحصوره بين منحنى الداله $f(x)$ والقيمتين $x = a , x = b$



الشكل ٥

- **التوزيع الطبيعي القياسي أو المعياري The Standard Normal Distribution**

يطلق اسم المتغير الطبيعي المعياري أو القياسي على المتغير الطبيعي الذي وسطه الحسابي صفر وتباينه واحد أي على المتغير N(0.1) ويرمز له بالرمز z وتكون داله كثافة احتماله هي

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$-\infty < z < \infty$$

وبما أن f (z) داله كثافة احتمال فان مجموع المساحة تحت منحنى f (z) تساوي ١

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz = 1$$

ويكون احتمال وقوع المتغير العشوائي الطبيعي المعياري z بين القيمتين z = a، z = b هو المساحة المحصوره بين منحنى داله كثافة الاحتمـال f (z) والقيمتين المحددتين z = a ، z = b أي يساوي

$$P(a < z < b) = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \, dz$$

لقد حسبت المساحة (أو الاحتمالات) تحت المنحنى الطبيعي المعياري وهي معطاه في الجدول ٢ بالملحق.

لحساب احتمال وقوع المتغير الطبيعي المتصل بين قيمتين محددتين علينا أن نحسب المساحة المحصوره بين منحنى دالـه كثافـة الاحتمـال f (x) والقيمتين المحددتين لـ X ولما كانت f(x) تتضمن معلمتين هما الوسط

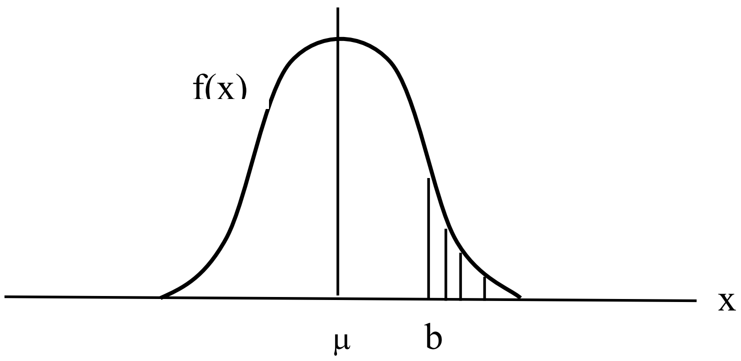
الحسابي μ والتباين σ^2 وهما ما يمكنهما أن يأخذا قيما غير محدوده وإن المتغير العشوائي متغير متصل وبالتالي يمكنه ان يأخذ هو أيضاً قيما غير محدوده داخل أي مدى فإنه من غير الممكن حساب المساحات الواقعه تحت المنحنى الطبيعي لقيم مختلفه لكل من μ , σ^2 , x ولكننـا نسـتطيع التغلب على هذه الصعوبة بتحويل المتغير الطبيعـي $N(\mu ، \sigma^2)$ إلـى متغير معياري N(0.1) وهو ما يمكن حساب المساحه تحت منحناه وهـي معطاه كما أسلفنا في الجدول ٢ بالملحق.

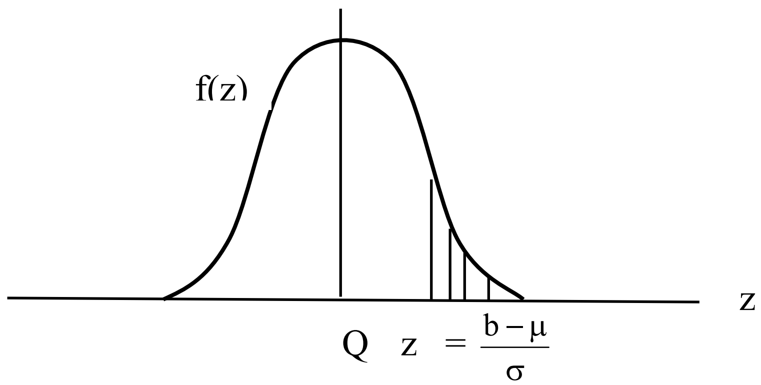
تحويل المتغير الطبيعي $N(\mu ، \sigma^2)$ إلى المتغير الطبيعي القياسي N(0.1)

إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعي $N(\mu ، \sigma^2)$ فإن المتغير العشوائي $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ يكون لـه التوزيـع الطبيعـي المعيـاري N(0.1) أي يكون له توزيعاً طبيعيا معياريا وسطه الحسابي صفر وتباينه ١ وان أي متغير طبيعي وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2 يمكن تحويله إلـى متغير طبيعي معياري بكتابه $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ وبهذا يتحول التوزيـع الطبيعـي إلى توزيع طبيعي معياري يمكن حساب المساحة المحصوره تحت منحناه كما في الشكل ٦.

إذا كانت b قيمة معينة من قيم x فان

$$P(x \le b) = P(x - \mu \le b - \mu)$$
$$= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$





الشكل ٦

تحويل المتغير ($N(\mu ، \sigma^2)$ إلى z

المساحة غير المظلله تحت المنحنى هي

$$P(X \le b) = P\left(Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

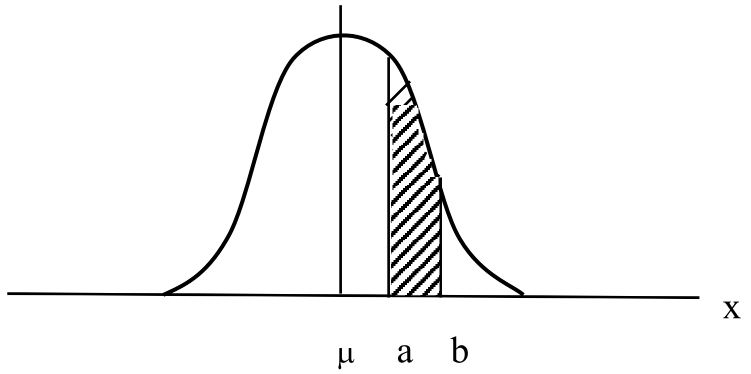
ويكون أيضا

$$P(X > b) = 1 - P(X \le b)$$
$$= 1 - P\left(Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

وإذا كانت $a < b$ (كما في شكل ٧) فان

$$P(a \le X \le b) = P\left(Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

أي تساوي المساحة إلى يسار b ناقص المساحة إلى يسار a



شكـل ٧

ومن خاصية التماثل لمنحنى داله كثافة الاحتمال حول الصفر نجد أن

$$\text{i)}\quad \int_{-\infty}^{x} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)\,dz + \int_{o}^{x} f(z)\,dz$$

$$= \tfrac{1}{2} + \int_{o}^{x} f(z)\,dz$$

$$\text{ii)}\quad \int_{-\infty}^{-x} f(z)\,dz = \int_{x}^{\infty} f(z)\,dz$$

$$= \tfrac{1}{2} - \int_{o}^{x} f(z)\,dz$$

ولذلك يكتفي في الجداول المحسوبة لقيم المساحات أو الاحتمـالات تحـت المنحنى الطبيعي المعياري بحساب الاحتمالات المختلفة لقـيم x الموجبـه ومنها يمكن استنتاج الاحتمالات لقيم x السالبة.

أمثلـ ـة :

مثـ ـال ١:

إذا كانت X متغير عشوائي طبيعي له التوزيع (٤ ، ٣) N فمـ ـا هو احتمال أن تقع X بين القيمتين ٣ ، ٥؟

الحـ ـل :

نحول التوزيع إلى توزيع معياري

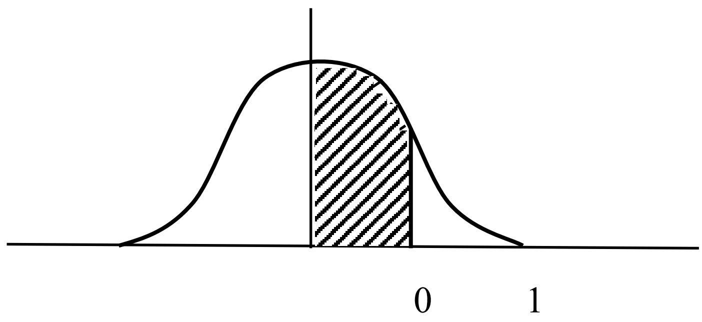
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$z_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$p\ (3 < x < 5) = p\ (0 < z < 1)$$

وتساوي المساحه بين $z = 0$ و $z = 1$ وهي كما في الشكل التالي



وهي من الجدول ٢ بالملحق تساوي ٠.٣٤١٣

مثـال ٢:

إذا كان المغير العشوائي X له التوزيع الطبيعي ($N(\mu,\sigma^2)$

اوجد :

i) $P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma)$

ii) $P(\mu-2\sigma < x < \mu+2\sigma)$

iii) $P(\mu-3\sigma < x < \mu+3\sigma)$

الحـــل:

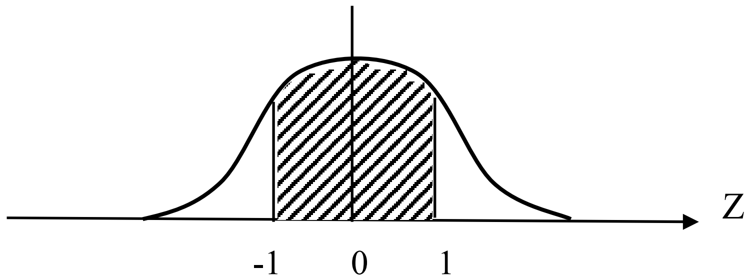
i) $z_1 = \dfrac{(\mu-\sigma)-\mu}{\sigma} = -1$

$z_2 = \dfrac{(\mu+\sigma)-\mu}{\sigma} = 1$

$\therefore\ P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = P(-1 < z < 1)$

وهو عبارة عن المساحة بين $z = -1$ و $z = 1$

= المساحة بين $z = 1$ و $z = 0$ + المساحة بين $z = 0$ و $z = 1$



ونتيجة لتماثل المنحنى على يمين ويسار الوسط الحسابي $\mu = 0$ فان المساحة بين $z = -1$ و $z = 0$ تساوي المساحة بين $z = 0$ و $z = 1$ كما في الشكل أعلاه وتساوي من الجدول ٠.٣٤١٣.

$$\therefore\ P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0.3413 + 0.3413$$
$$= 0.6826$$
$$= 68.26\ \%$$

وهذا يعني أن ٦٨.٢٦% من مجموع المساحة تحت المنحنى تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي.

ii) $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma)$

$$z_1 = \frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma} = -2$$

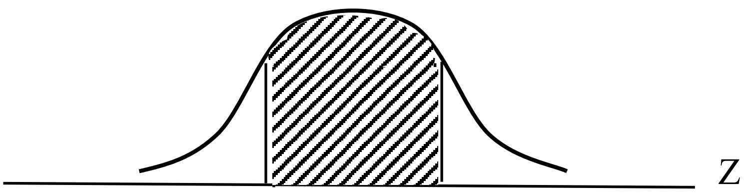
$$z_2 = \frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma} = 2$$

$$\therefore\ P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(-2 < z < 2)$$

وتساوي المساحة المحصوره بين $z = -2$ و $z = 0$ + المساحة المحصورة بين $z = 0$ و $z = 2$ ومن الجدول

$$= 0.4773 + 0.4773$$
$$= 0.9546$$
$$= 95.46\ \%$$

أي أن ٩٥.٤٦% من مجموع المساحة تحت المنحنى تقع ضمن انحرافين معياريين من الوسط الحسابي صفر .



-2 2

iii) $z_1 = \frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} = -3$

$z_1 = \frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} = 3$

$\therefore\ P\,(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = P(-3 < z < 3)$

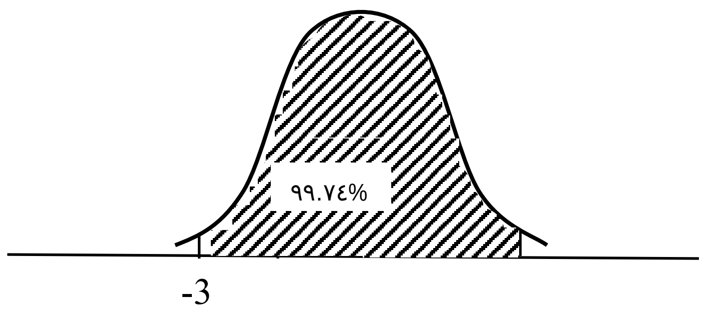
وتساوي المساحة المحصوره بين 3- = z و 0 = z + المساحة المحصورة بين 0= z و 3 = z ومن الجدول:

$= 0.4987 + 0.4987$

$= 0.9974$

$= 99.74\%$

أي أن ٩٩.٧٤% من مجموع المساحة تحـت المنحنـى تقـع ضـمن ٣ انحرافات معياريه عن الوسط الحسابي .



تمارين الفصل الخامس

التوزيع الطبيعي

١. من التوزيع الطبيعي المعياري أوجد الاحتمالات التالية:

i) $P(٠ < z < ٠.٧)$ (٠.٢٥٨٠)

ii) $P(٠ < z < ١.٢)$ (٠.٣٨٤٩)

iii) $P(-١ < z < ٠)$ (٠.٣٤١٣)

iv) $P(-٠.٨٢ < z < ٠.٩٦)$ (٠.٦٢٥٤)

v) $P(z < -٠.٦)$ (٠.٢٧٤٢)

vi) $P(z > -١.١)$ (٠.٨٦٤٣)

٢. أوجد المساحة تحت $z = -٠.٥$

٣. إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعي $N(2, 1)$ أوجد :

i) $P(x > ٤)$ (٠.٠٢٢٧)

ii) $P(٠ < x < ٢)$ (٠.٤٧٧٣)

٤. إذا كانت أطوال طلاب احدى الجامعات موزعه طبيعيا ولها التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٦٨.٥٠ بوصه وانحرافـه المعياري ٢.٣ بوصه:

i) ما هو احتمال ان طول أي طالب من الجامعة يزيد عن ٦ أقدام (٧٢ بوصه) (٠.٠٦٤٣).

ii) ما هي نسبة الطلبه في الجامعة الذين تتراوح أطوالهم بين ٧٠ و ٧٢ بوصه (٠.١٩٣٥)

٥. إذا كانت أطوال ٣٠٠٠ طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكـان الوسط الحسابي لهذه الأطـوال يسـاوي ١٧٠سـم والانحـراف المعياري لها يساوي ٥سم :

i) أوجد نسبة الطلبة الذين أطوالهم أكثر من ١٨٥سم.

ii) أوجد عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن ١٨٥سم.

iii) إذا كانت نسبة الطلبة الذين أطوالهم فـوق المتوسـط وأقل من طول معين وليكن x هو ٠.٢٨٨١ فما هـو هذا الطول؟.

٦. إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعـي الـذي وسـطه الحسابي ٨٠ وانحرافه المعياري ٠.٣٠ فأوجد:

i) $P\ (X \leq ٨٠.٣٦)$

ii) العدد C إذا كان $P\ (X \leq C) = ٠.٩٥$

٧. مصنع ينتج نوعا من الأبر مفروض أن يكون قطر كل منها $\frac{1}{4}$ سم وبالخبره وجد أن أقطار الأبر من انتاج هذا المصنع لهـا توزيع طبيعي وسطه الحسـابي ٢.٥مـم وانحرافـه المعيـاري ٠.٠٠٢٥مم ، فما هي النسبة المئوية للأبر التي يتراوح قطرهـا بين ٢.٤٩٥١ و ٢.٥٠٤٩مم؟

٨. إذا كان متوسط أجر العامل ٤ دنانير في الساعة بانحراف معياري ٠.٥٠ دينار وإذا كانت الأجور تتبع توزيعا طبيعيا فما هي نسـبة العمال الذين يتقاضون أجرا ما بين ٢.٥ و ٣ دنانير في الساعة؟

٩. إذا كان متوسط عمر المصباح الكهربائي ١٥٠٠ ساعة بـانحراف معياري ٥٠ ساعة ويتبع توزيعا طبيعيا فما هو احتمال :

i) ان مصباحا سيحترق قبل ١٤٠٠ ساعة.

ii) إن مصباحا سيعيش أكثر من ١٥٥٠ ساعة.

iii) إنا مصباحا سيعيش ما بين ١٤٥٠ و ١٥٥٠ ساعة.

١٠. صندوق من التفاح وزن التفاحه منه يساوي ١٠ أونـس (OUNCES) بانحراف معيـاري ١.٥ أونـس وأوزان التفـاح موزعه طبيعيا فما هي نسبة التفاحات التي يقع وزنها بين ٧.٩ و ١٢.٤ أونس؟

١١. إذا كانت نفقات إحدى الشركات في السنة لها التوزيع الطبيعي الذي وسطه ١٠٠ مليون دينار وانحرافه المعياري ٥ ملايين دينار :

i) ما هو احتمال ان نفقات الشركة ستزيد عن ١٠٠ مليون دينار.

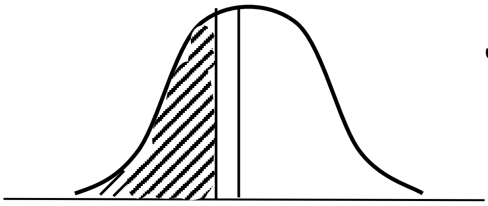
ii) ما هو احتمال ان نفقات الشركة ستقل عن ١٠٠ مليون دينار.

iii) ما هو احتمال ان نفقات الشركة ستكون بين ١٠٠ و ١١٠ مليون دينار.

حل تمارين الفصل الخامس

(التوزيع الطبيعي)

١. نجد الاحتمالات المطلوبة من الجدول ٢ بالملحق مباشره.

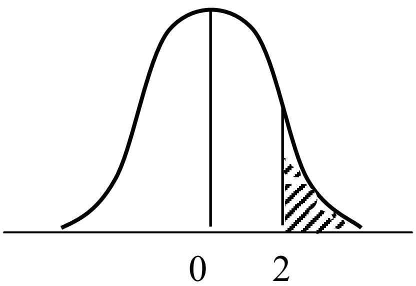


٢. المســاحة المطلوبــة هــي المساحة المظللــة فــي الشــكل والمحصورة بــين ∞- و ٠.٥- وهي تماثل المســاحة مــن ٠.٥ حتى ∞ نــاقص المســاحة مــن صفر حتى ٠.٥ ومن الجدول =

٠.٥ – ٠.١٩١٥ = ٠.٣٠٨٥

٣. نحول التوزيع الطبيعي إلى توزيع معياري

i) $z = \frac{z - \mu}{\sigma}$



$$z = \frac{4 - 2}{1} = 2$$

$$\therefore \; P(X > 4) = P(z > 2)$$

$$= 0.5 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

Z -0.5

ii) $Z_1 = \frac{0 - 2}{1} = -2$

$$Z_2 = \frac{2 - 2}{1} = 0$$

$$\therefore \quad P(0 < X < 2) = P(z > 2) = P(-2 < z < 0)$$

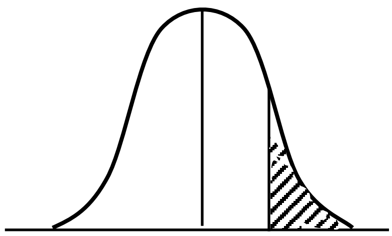
$$= P(0 < z < 2)$$

=

0.4773

.٤

.i



$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{72 - 68.5}{2.3} = \frac{3.5}{2.5}$$

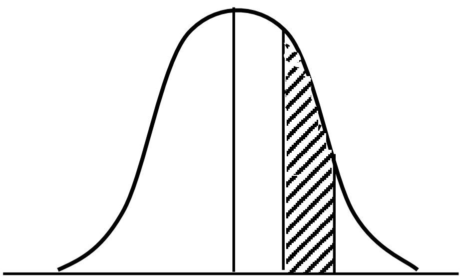
$$= 1.52$$

$$\therefore \; p(x > 72) = p(z > 1.52)$$

$$= 0.5 - 0.4357$$

$$= 0643$$

.ii



$$z_1 = \frac{70 - 68.5}{2.3} = 0.65$$

$$z_2 = \frac{72 - 68.5}{2.3} = 1.52$$

$$\therefore \; P(70 < x < 72) = P(0.65 < z < 1.52)$$

$= 0.4357 - 0.2422$

$= 0.1935$

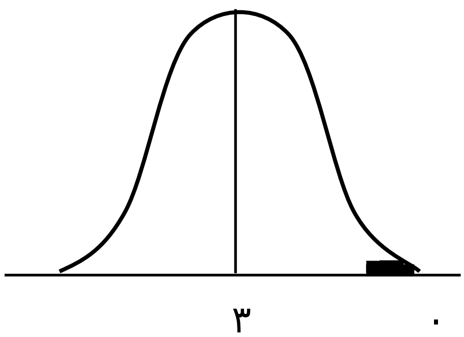
.i .٥

$z = \frac{185 - 170}{5} = 3$

$\therefore P(x > 185) = P(z > 3)$

$= 0.5 - 0.4987$

$= 0.0013$



.ii

$3000 = \% \, 100$

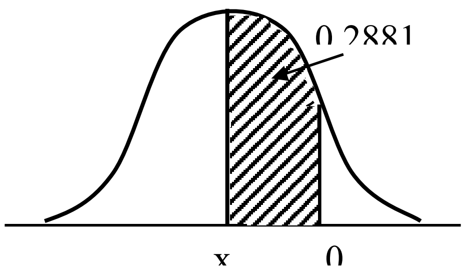
$x = \% \, 0.13$

$x = \frac{(0.0013)(3000)}{0.100}$

$= 3.9 \cong 4$

.iii

$z = \frac{x - 170}{5}$

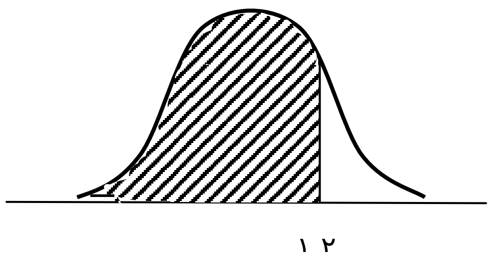


ومن الجدول ان قيمة z المناظره للمساحة ٠.٢٨٨١ هي ٠.٨

$\therefore 0.8 = \frac{\chi - 170}{5}$

$x = 174$

٦. i.



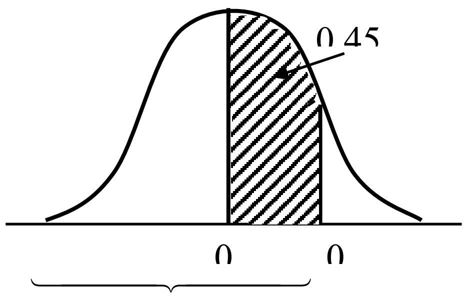
$$Z = \frac{80\text{-}36\text{-}80}{0.3} = 1.2$$

$$\therefore\ p\ (x \le 80.36) = p(z \le 1.2)$$

$$= 0.5 + 0.3849$$

$$= 0.8849$$

ii.



كامل هذه المساحة = ٠.٩٥

$$z = \frac{c - 80}{0.3}$$

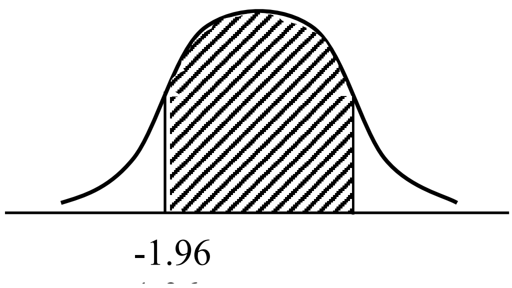
من الجدول نجـد أن قيمـة z المقابلــة للمســاحة (٠.٥٠ – ٠.٩٥) أي للمساحة ٠.٤٥ هي ١.٦٤

أخذنا المساحـة تحت ٠.٤٥ لان الجـداول معطـاة من الصفر حتى ∞ وليس من ∞– حتى ∞

$$\therefore\ \frac{c - 80}{0.3} = 1.64$$

$$\therefore\ c = 80.492$$

٧.



$$z_1 = \frac{2.4951 - 2.5}{0.0025} = 1.96$$

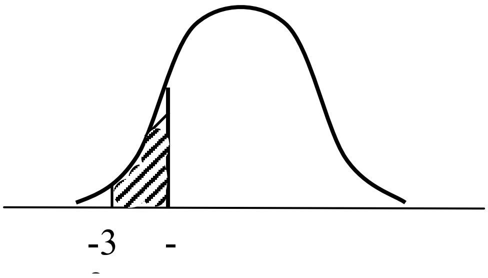
$$z_2 = \frac{2.5049 - 2.5}{0.0025} = 1.96$$

$\therefore$ P (2.4951 < x < 2.5049) = P (-1.96 < z < 1.96)

$$= 2\ (0.4750)$$

$= 0.95$

.٨



$z_1 = \frac{2.5 - 4}{0.5} = -3$

$z_2 = \frac{3 - 4}{0.5} = -2$

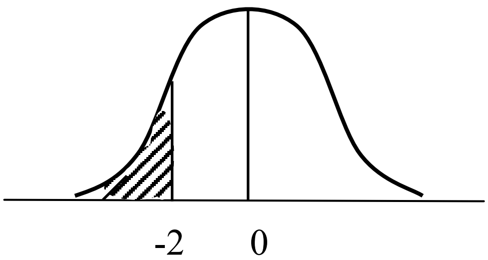
$\therefore p(2.5 < x < 3) = p(-3 < z < -2)$

$= p(2 < z < 3)$

$= 0.4987 - 0.4773$

$= 0.0214$

.i .٩



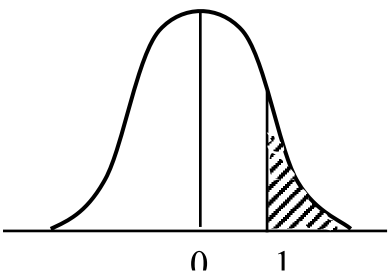
$z = \frac{1400 - 1500}{50} = -2$

$\therefore p(x < 1400) = p(z < -2)$

$= 0.5 - 0.4773$

$= 0.0227$

.ii



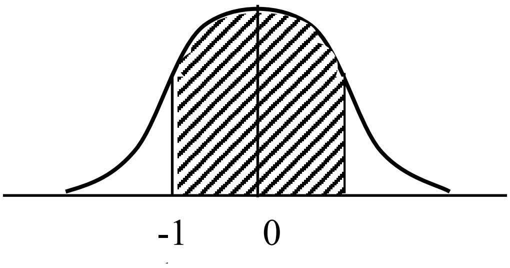
$z = \frac{1550 - 1500}{50} = 1$

$\therefore p(x > 1550) = p(z > 1)$

$= 0.5 - 0.3413$

$= 0.1587$

.iii



$$z_1 = \frac{1450 - 1500}{50} = -1$$

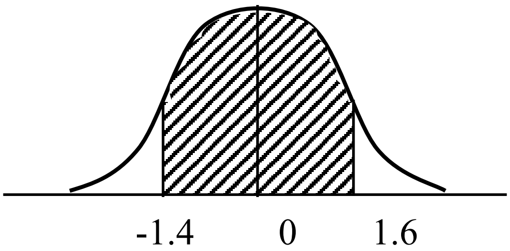
$$z_2 = \frac{1550 \quad - 1500}{50} = 1$$

$\therefore$ p (1450 < x < 1550) = p (-1 < z <١)

$= 2\ (0.3413)$

$= 0.6826$

.١٠



$$z_1 = \frac{7.9 - 10}{1.5} = 1.4$$

$$z_2 = \frac{12.4 \ - 10}{1.5} = 1.6$$

$\therefore$ p (7.9 < x < 12.4) = p (-1.4 < z < 1.6)

$= 0.4192 + 0.4452$

$= 0.8644$

.١١

.i

$$z = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$p (x > 100) = p (z > 0) = 0.5$

.ii

$$z = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$p (x < 100) = p (z > 0) = 0.5$

.iii

$$z_1 = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$$z_2 = \frac{100 - 100}{5} = 2$$

$\therefore p(100 < x < 110) = p(0 < z < 2)$

$= 0.4773$

تمارين عامة على

الاحتمـالات

١- لتكن التجربة العشوائية هي اختيار عائلة لها ٣ أطفـال وتسـجيل هؤلاء الأطفال حسب الجنس وتسلسل الولادة. أحسب احتمـال ان يكون للعائلة ولدين.

(٣/٨)

٢- إذا كان A_1 ، A_2 حادثين في الفراغ العينـي S وكـان ٠.٥ = $P(A_1)$ و $P(A_2)$ = ٠.٧ و ٠.٣ = $P(A_1 A_2)$:

i) هل A_1 و A_2 حادثين شاملين

(لا لان مجموع احتماليهما لا يساوي واحد)

ii) أوجد $P(A_1$ أو $A_2)$ (٠.٩)

iii) أوجد $P(A_2 - A_1)$ (٠.٢)

iv) أوجد $P(A_1 - A_2)$

(مستحيل)

٣- إذا كان A و B حادثين في الفراغ العينـي S وكـان ٠.٤ = P(A) و P(B) = ٠.٧ و ٠.٣ = P(AB) احسب احتمال :

i) وقوع أحد الحادثين A أو B (٠.٨)

ii) وقوع A أو B وليس كليهما
(٠.٥)

iii) عدم وقوع A (٠.٦)

iv) وقوع A وعدم وقوع B (٠.١)

٤- القي حجرا نرد مره واحده أوجد احتمالات الحوادث التالية :

i) A1 مجموع الرقمين الظاهرين ٧ (٦/٣٦)

ii) A2 مجموع الرقمين الظاهرين أكثر من ١٠
(٣/٣٦)

iii) A3 مجموع الرقمين الظـاهرين أقـل مـن أو يسـاوي ٥
(١٠/٣٦)

iv) A4 العدد ٢ ظهر مره واحده على الأقل
(١١/٣٦)

٥- في نفس التمرين السابق احسب الاحتمالات الاتية:

i) المجموع زوجي على فرض أن الحجر الأول ٦ (٣/٦)

ii) الحجر الثاني ٦ على فرض أن مجموع زوجي
(٣/١٨)

iii) المجموع زوجي إذا علمت أن المجموع أقل من ٥ (٤/٦)

iv) الحجر الثاني ٦ على فرض ان الأول ٤ (١/٦)

v) المجموع فردي إذا علمت أن الحجر الأول فردي (٩/١٨)

٦- يوجه صيادان بندقيتيهما معا إلى غزال فاذا كانت فرصة كل منهما في إصابة الغزال هي $\frac{1}{3}$ فأحسب احتمال إصابة الغـزال .

(٥/٩)

٧- إذا كانت A تنسخ ٢٠% من خطابات المعهد وكانت ٥٠% مـن خطاباتها بدون أخطاء بينما تنسخ B الباقي وكانـت ٩٠% مـن خطاباتها بدون أخطاء. فإذا سحب خطاب من خطابـات المعهـد فاحسب احتمال أن يكون الخطاب بدون أخطاء.

(٠.٨٢)

٨- في السؤال السابق إذا كان الخطاب المسحوب خطابا فيه أخطـاء فما هو احتمال أن تكون A هي التي كتبته؟

(١٠/١٨=٠.٥٥٥٥)

٩- إذا كان احتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء = ٠.٤٠ كم يكون احتمال :

i) ان ينجح طالب واحد من بين ٥ طلاب (٠.٢٥٩٢)

ii) ان ينجح طالب واحد على الأقل (٠.٩٢٢٢٤)

iii) ان ينجح ٤ طلاب على الأكثر (٠.٩٨٩٧٦)

iv) ان لا ينجح أحد (٠.٠٧٧٧٦)

١٠- ما هو احتمال ان نحصل على مجموع ٥ ثلاث مرات من رمي زهرتي نرد ٦ مرات؟

(٠.١٧٣٤٢)

١١- إذا كان احتمال إصابة الصاروخ للهدف ٠.٣ ما هو عـدد الصواريخ اللازم إطلاقها كي يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل ٨٠%.

الحـــل: احتمال الخطأ = ٠.٧

احتمال الصواريخ تخطئ = $(٠.٧)^n$

المطلوب هو ٠.٨ < $1-(0.7)^n$

$(0.7)^n > -٠.٢$

$(0.7)^n < ٠.٢$

$(0.7)^1 = 0.7$, $(0.7)^2 = 0.49$

$(0.7)^3 = 0.743$, $(0.7)^4 = 0.2401$

(0.7)5 = 0.16807

$\therefore$ n = ٥ عدد الصواريخ

المـــلاحـــــق

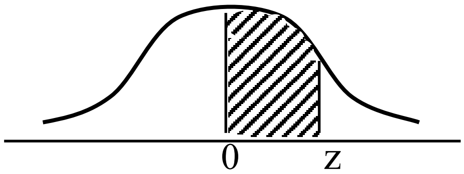
ملحـق رقـم (١)

قيم الداله الاسية السالبة e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
٠.٠	١.٠٠٠	٢.٠	٠.١٣٥	٤.٠	٠.٠١٨	٦.٠	٠.٠٠٢٥	٨.٠	٠.٠٠٠٣٤
٠.١	٠.٩٠٥	٢.١	٠.١٢٢	٤.١	٠.٠١٧	٦.١	٠.٠٠٢٢	٨.١	٠.٠٠٠٣٠
٠.٢	٠.٨١٩	٢.٢	٠.١١١	٤.٢	٠.٠١٥	٦.٢	٠.٠٠٢٠	٨.٢	٠.٠٠٠٢٨
٠.٣	٠.٧٤١	٢.٣	٠.١٠٠	٤.٣	٠.٠١٤	٦.٣	٠.٠٠١٨	٨.٣	٠.٠٠٠٢٥
٠.٤	٠.٦٧٠	٢.٤	٠.٠٩١	٤.٤	٠.٠١٢	٦.٤	٠.٠٠١٧	٨.٤	٠.٠٠٠٢٣
٠.٥	٠.٦٠٧	٢.٥	٠.٠٨٢	٤.٥	٠.٠١١	٦.٥	٠.٠٠١٥	٨.٥	٠.٠٠٠٢٠
٠.٦	٠.٥٤٩	٢.٦	٠.٠٧٤	٤.٦	٠.٠١٠	٦.٦	٠.٠٠١٤	٨.٦	٠.٠٠٠١٨
٠.٧	٠.٤٩٧	٢.٧	٠.٠٦٧	٤.٧	٠.٠٠٩	٦.٧	٠.٠٠١٢	٨.٧	٠.٠٠٠١٧
٠.٨	٠.٤٤٩	٢.٨	٠.٠٦١	٤.٨	٠.٠٠٨	٦.٨	٠.٠٠١١	٨.٨	٠.٠٠٠١٥
٠.٩	٠.٤٠٧	٢.٩	٠.٠٥٥	٤.٩	٠.٠٠٧	٦.٩	٠.٠٠١٠	٨.٩	٠.٠٠٠١٤
١.٠	٠.٣٦٨	٣.٠	٠.٠٥٠	٥.٠	٠.٠٠٦٧	٧.٠	٠.٠٠٠٩	٩.٠	٠.٠٠٠١٢
١.١	٠.٣٣٣	٣.١	٠.٠٤٥	٥.١	٠.٠٠٦١	٧.١	٠.٠٠٠٨	٩.١	٠.٠٠٠١١
١.٢	٠.٣٠١	٣.٢	٠.٠٤١	٥.٢	٠.٠٠٥٥	٧.٢	٠.٠٠٠٧	٩.٢	٠.٠٠٠١٠
١.٣	٠.٢٧٣	٣.٣	٠.٠٣٧	٥.٣	٠.٠٠٥٠	٧.٣	٠.٠٠٠٧	٩.٣	٠.٠٠٠٠٩
١.٤	٠.٢٤٧	٣.٤	٠.٠٣٣	٥.٤	٠.٠٠٤٥	٧.٤	٠.٠٠٠٦	٩.٤	٠.٠٠٠٠٨
١.٥	٠.٢٢٣	٣.٥	٠.٠٣٠	٥.٥	٠.٠٠٤١	٧.٥	٠.٠٠٠٥٥	٩.٥	٠.٠٠٠٠٨
١.٦	٠.٢٠٢	٣.٦	٠.٠٢٧	٥.٦	٠.٠٠٣٧	٧.٦	٠.٠٠٠٥٠	٩.٦	٠.٠٠٠٠٧
١.٧	٠.١٨٣	٣.٧	٠.٠٢٥	٥.٧	٠.٠٠٣٣	٧.٧	٠.٠٠٠٤٥	٩.٧	٠.٠٠٠٠٦
١.٨	٠.١٦٥	٣.٨	٠.٠٢٢	٥.٨	٠.٠٠٣٠	٧.٨	٠.٠٠٠٤١	٩.٨	٠.٠٠٠٠٦
١.٩	٠.١٥٠	٣.٩	٠.٠٢٠	٥.٩	٠.٠٠٢٧	٧.٩	٠.٠٠٠٣٧	٩.٩	٠.٠٠٠٠٥

ملحـق رقـم (٢) / المساحات تحت المنحنى الطبيعي

(A هي اساحة ت انح ا صورة ب ٠ , ٢)



Z	A	Z	A	Z	A	Z	A
0.00	0.0000	0.47	0.1808	0.94	0.3264	1.41	0.4207
.01	.0040	.48	.1844	.95	.3289	1.42	.4222
.02	.0080	.49	.1879	.96	.3315	1.43	.4236
.03	.0120	.50	.1915	.97	.3340	1.44	.4251
.04	.0160	.51	.1950	.98	.3365	1.45	.4265
.05	.0199	.52	.1985	.99	.3389	1.46	.4279
.06	.0239	.53	.2019	1.00	.3413	1.47	.4292
.07	.0279	.54	.2054	1.01	.3438	1.48	.4306
.08	.0319	.55	.2088	1.02	.3461	1.49	.4319
.09	.0359	.56	.2123	1.03	.3485	1.50	.4332
.10	.0398	.57	.2157	1.04	.3508	1.51	.4345
.11	.0438	.58	.2190	1.05	.3531	1.52	.4357
.12	.0478	.59	.2224	1.06	.3554	1.53	.4370
.13	.0517	.60	.2258	1.07	.3577	1.56	.4382
.14	.0557	.61	.2291	1.08	.3599	1.55	.4394
.15	.0596	.62	.2324	1.09	.3621	1.56	.4406
.16	.0636	.63	.2357	1.10	.3643	1.57	.4418
.17	.0675	.64	.2389	1.11	.3665	1.58	.4430
.18	.0714	.65	.2422	1.12	.3686	1.59	.4441
.19	.0754	.66	.2454	1.13	.3708	1.60	.4452
.20	.0793	.67	.2486	1.14	.3729	1.61	.4463
.21	.0832	.68	.2518	1.15	.3749	1.62	.4474
.22	.0871	.69	.2549	1.16	.3770	1.63	.4485
.23	.0910	.70	.2580	1.17	.3790	1.64	.4495
.24	.0948	.71	.2612	1.18	.3810	1.65	.4505
.25	.0987	.72	.2642	1.19	.3830	1.66	.4515
.26	.1026	.73	.2673	1.20	.3849	1.67	.4525
.27	.1064	.74	.2704	1.21	.3869	1.68	.4535
.28	.1103	.75	.2734	1.22	.3888	1.69	.4545
.29	.1141	.76	.2764	1.23	.3907	1.70	.4554
30	.1179	.77	.2794	1.24	.3925	1.71	.4564
.31	.1217	.78	2823	1.25	.3944	1.72	.4573
.32	.1255	.79	.2852	1.26	.3962	1.73	.482
.33	.1293	.80	.2881	1.27	.3980	1.74	.4591

.34	.1331	.81	.2910	1.28	.3997	1.75	.4599
.35	.1368	.82	.2939	1.29	.4015	1.76	4608
.36	.1406	.83	.2967	1.30	.4032	1.77	.4616
.37	.1443	.84	.2996	1.31	.4049	1.78	.4625
.38	.1480	.85	.3023	1.32	.4066	1.79	.4633
.39	.1517	.86	.3051	1.133	.4082	1.80	.4641
.40	.1554	.87	.3079	1.34	.4099	1.81	.4649
.41	.1591	.88	.3106	1.35	.4115	1.82	.4656
.42	.1628	.89	.3133	1.36	.4131	1.83	.4664
.43	.1664	.90	.3159	1.37	.4147	1.84	.4671
.44	.1700	.91	.3186	1.38	.4162	1.85	.4678
.45	.1736	.92	.3212	1.39	.4177	1.86	.4686
.46	.1772	.93	.3238	1.40	.4192	1.87	.4693

... يتبــــع

Z	A	Z	A	Z	A	Z	A
1.88	0.4700	2.41	0.4920	2.94	0.4984	3.47	0.4997
1.89	.4706	2.42	.4922	2.95	.4984	3.48	.4998
1.90	.4713	2.43	.4925	2.96	.4985	.49	.4998
1.91	.4719	2.44	.4927	2.97	.4985	3.50	.4998
1.92	.4726	2.45	.4929	2.98	.4986	3.51	.4998
1.93	.4732	2.46	.4931	2.99	.4986	3.52	.4998
1.94	.4738	2.47	.4932	3.00	.4987	3.53	.4998
1.95	.4744	2.48	.4934	3.1	.4987	3.54	.4998
1.96	.4750	2.49	.4936	3.2	.4987	3.55	.4998
1.97	.4756	2.50	.4938	3.3	.4988	3.56	.4998
1.98	.4762	2.51	.4940	3.4	.4988	3.57	.4998
1.99	.4767	2.52	.4941	3.5	.4989	3.58	.4998
2.00	.4773	2.53	.4943	3.6	.4989	3.59	.4998
2.01	.4778	2.54	.4945	3.7	.4989	3.60	.4999
2.02	.4783	2.55	.4946	3.8	.4990	3.61	.4999
2.03	.4788	2.56	.4948	3.9	.4990	3.62	.4999
2.04	.4793	2.57	.4949	3.10	.4990	3.63	.4999
2.05	.4798	2.58	.4951	3.11	.4991	3.64	.4999
2.06	.4803	2.59	.4952	3.12	.4991	3.65	.4999
2.07	.4808	2.60	.4953	3.13	.4991	3.66	.4999
2.08	.4812	2.61	.4955	3.14	.4992	3.67	.4999
2.09	.4817	2.62	.4956	3.15	.4992	3.68	.4999
2.10	.4821	2.63	.4957	3.16	.4992	3.69	.4999
2.11	.4826	2.64	.4959	3.17	.4992	3.70	.4999
2.12	.4830	2.65	.4960	3.18	.4993	3.71	.4999
2.13	.4834	2.66	.4961	3.19	.4993	3.72	.4999
2.14	.4838	2.67	.4962	3.20	.4993	3.73	.4999

2.15	.4842	2.68	.4963	3.21	.4993	3.74	.4999
2.16	.4846	2.69	.4964	3.22	.4994	3.75	.4999
2.17	.4850	2.70	.4965	3.23	.4994	3.76	.4999
2.18	.4854	2.71	.4966	3.24	.4994	3.77	.4999
2.19	.4857	2.72	.4967	3.25	.4994	3.78	.4999
2.20	.4861	2.73	.4968	3.26	.4994	3.79	.4999
2.21	.4865	2.74	.4969	2.27	.4995	3.80	.4999
2.22	.4868	2.75	.4970	3.28	.4995	3.81	.4999
2.23	.4871	2.76	.4971	3.29	.4995	3.82	.4999
2.24	.4875	2.77	.4972	3.30	.4995	3.83	.4999
2.25	.4878	2.78	.4973	3.31	.4995	3.84	.4999
2.26	.4881	2.79	.4974	3.32	.4996	3.85	.4999
2.27	.4884	2.80	.4974	3.33	.4996	3.86	.4999
2.28	.4887	2.81	.4975	3.34	.4996	3.87	.5000
2.29	.4890	2.82	.4976	3.35	.4996	3.88	.5000
2.30	.4893	2.83	.4977	3.36	.4996	3.89	.5000
2.31	.4896	2.84	.4977	3.37	.4996		
2.32	.4898	2.85	.4978	3.38	.4996		
2.33	.4901	2.86	.4979	3.39	.4997		
2.34	.4904	2.87	.4980	3.40	.4997		
2.35	.4906	2.88	.480	3.41	.4997		
2.36	.4909	2.89	.4981	3.42	.4997		
2.37	.4911	2.90	.4981	3.43	.4997		
2.38	.4913	2.91	.4982	3.44	.4997		
2.39	.4916	2.92	.4983	3.45	.4997		
2.40	.4918	2.93	.4983	3.46	.4997		

تمارين عامة على الاحتمـالات

تمارين عامة على

الاحتمـالات

١- لتكن التجربة العشوائية هي اختيار عائلة لها ٣ أطفـال وتسـجيل هؤلاء الأطفال حسب الجنس وتسلسل الولادة. أحسب احتمـال ان يكون للعائلة ولدين.

(٣/٨)

٢- إذا كان A_1 ، A_2 حادثين في الفراغ العينـي S وكـان ٠.٥ = $P(A_1)$ و $P(A_2) = ٠.٧$

و ٠.٣ = $P(A_1 A_2)$:

i) هل A_1 و A_2 حادثين شاملين

(لا لان مجموع احتماليهما لا يساوي واحد)

ii) أوجد (A_2 أو A_1) P (٠.٩)

iii) أوجد (A_2 - A_1) P (٠.٢)

iv) أوجد (A_1 - A_2) P

(مستحيل)

٣- إذا كان A و B حادثين في الفراغ العينـي S وكـان ٠.٤ = P(A) و P(B) = ٠.٧

و ٠.٣ = P(AB) احسب احتمال :

i) وقوع أحد الحادثين A أو B (٠.٨)

ii) وقوع A أو B وليس كليهما
(٠.٥)

iii) عدم وقوع A (٠.٦)

iv) وقوع A وعدم وقوع B (٠.١)

٤- القي حجرا نرد مره واحده أوجد احتمالات الحوادث التالية :

i) A1 مجموع الرقمين الظاهرين ٧ (٦/٣٦)

ii) A2 مجموع الرقمين الظاهرين أكثر من ١٠
(٣/٣٦)

iii) A3 مجموع الرقمين الظـاهرين أقـل مـن أو يسـاوي ٥
(١٠/٣٦)

iv) A4 العدد ٢ ظهر مره واحده على الأقل
(١١/٣٦)

٥- في نفس التمرين السابق احسب الاحتمالات الاتية:

i) المجموع زوجي على فرض أن الحجر الأول ٦ (٣/٦)

ii) الحجر الثاني ٦ على فرض أن مجموع زوجي
(٣/١٨)

iii) المجموع زوجي إذا علمت أن المجموع أقل من ٥ (٤/٦)

iv) الحجر الثاني ٦ على فرض ان الأول ٤ (١/٦)

v) المجموع فردي إذا علمت أن الحجر الأول فردي (٩/١٨)

٦- يوجه صيادان بندقيتيهما معا إلى غزال فاذا كانت فرصة كل منهما في إصابة الغزال هي $\frac{1}{3}$ فأحسب احتمال إصابة الغـزال .

(٥/٩)

٧- إذا كانت A تنسخ ٢٠% من خطابات المعهد وكانت ٥٠% مـن خطاباتها بدون أخطاء بينما تنسخ B الباقي وكانـت ٩٠% مـن خطاباتها بدون أخطاء. فإذا سحب خطاب من خطابـات المعهـد فاحسب احتمال أن يكون الخطاب بدون أخطاء.

(٠.٨٢)

٨- في السؤال السابق إذا كان الخطاب المسحوب خطابا فيه أخطـاء فما هو احتمال أن تكون A هي التي كتبته؟

(١٠/١٨=٠.٥٥٥٥)

٩- إذا كان احتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء = ٠.٤٠ كم يكون احتمال :

i) ان ينجح طالب واحد من بين ٥ طلاب (٠.٢٥٩٢)

ii) ان ينجح طالب واحد على الأقل (٠.٩٢٢٢٤)

iii) ان ينجح ٤ طلاب على الأكثر (٠.٩٨٩٧٦)

iv) ان لا ينجح أحد (٠.٠٧٧٧٦)

١٠- ما هو احتمال ان نحصل على مجموع ٥ ثلاث مرات من رمي زهرتي نرد ٦ مرات؟ (٠.١٧٣٤٢)

١١- إذا كان احتمال إصابة الصاروخ للهدف ٠.٣ ما هو عـدد الصواريخ اللازم إطلاقها كي يكون احتمال إصابة الهـدف علـى الأقل ٨٠%.

الحـــل: احتمال الخطأ = ٠.٧

احتمال الصواريخ تخطئ = $(0.7)^n$

المطلوب هو ٠.٨ < $1-(0.7)^n$

$(0.7)^n > -0.2$

$(0.7)^n < 0.2$

$(0.7)^1 = 0.7$, $(0.7)^2 = 0.49$

$(0.7)^3 = 0.743$, $(0.7)^4 = 0.2401$

(0.7)5 = 0.16807

$\therefore$ n = ٥ عدد الصواريخ