

مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضي

لطلبة كلية العلوم الاقتصادية

دروس مع أمثلة وتطبيقات محلولة

الجزء الثاني : الإحصاء

الفصل التاسع : اختبارات الفروض

بو عبد الله صالح

أستاذ مساعد مكلف بالدروس بكلية العلوم الاقتصادية – جامعة المسيلة.

## فهرس محتويات الفصل

3	مفاهيم اختبارات الفروض وتطبيقاتها.....	الفصل 9
3	اختبار المتوسط	
3	الاختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط	
6	الاختبار أحادي الاتجاه للمتوسط	
8	استخدام S كمقدر ل $\sigma$ في اختبار المتوسط	
8	استخدام التوزيع t في اختبار المتوسط	
9	خلاصة	
9	ملحق	
11	اختبار النسبة واختبار التباين	
11	اختبار النسبة	
12	اختبار التباين	
13	اختبار المقارنة بين مجتمعين	
13	اختبار تساوي متوسطي مجتمعين	
14	اختبار تساوي تبايني مجتمعين	
15	اختبار التجانس واختبار التعديل	
15	اختبار التجانس	
15	اختبار التعديل	

## الفصل 9. اختبارات الفروض

### اختبار المتوسط - اختبار النسبة - اختبار التباين - اختبارات المقارنة بين مجتمعين - اختبار التجانس والتعديل

#### توطئة

غالبا ما يحتاج الباحث في مرحلة ما من بحثه إلى اختبار فرضية أو أكثر بخصوص المجتمع المدروس. من أمثلة ذلك: اختبار فرضية بخصوص معدل الدخل في منطقة معينة، اختبار فرضية نسبة شفاء لدواء معين، ... يتم ذلك بصياغة فرضية عن المجتمع المدروس (أو المجتمعات المدروسة) ومن ثم محاولة الحصول على دليل إحصائي ينفي أو يثبت هذه الفرضية وذلك من خلال بيانات عينة (أو أكثر) عشوائية بسيطة. في هذا الفصل<sup>1</sup> سنتناول كيفية اختبار فرضيات موضوعية حول معالم مجتمع أو أكثر. رياضيا تخص الفرضية أحد معالم المجتمع الإحصائي كالمتوسط، النسبة أو التباين، ونعتمد في إثباتها أو رفضها على خصائص إحصائية معانية مختارة، عادة ما تكون مناظرة لمعلمة المجتمع. من أجل ذلك يعتمد هذا الدرس، كما هو الحال بالنسبة للتقدير، على درس المعاينة.

#### 9-1-1. اختبار المتوسط

الاختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط  
الاختبار أحادي الاتجاه للمتوسط  
استخدام S كمقدر لتباين المجتمع في اختبار المتزسط  
اختبار المتزسط باستخدام توزيع t

الغرض من اختبار المتوسط هو اختبار فرضية أن متوسط المجتمع  $\mu$  (متوسط الدخل في بلد ما أو لفئة ما، متوسط وزن منتج معين، ... ) يساوي قيمة ما  $\mu_0$ . للقيام بالاختبار نستخرج عينة عشوائية بسيطة ونحسب فيها المتوسط  $m$ <sup>2</sup>. إذا كانت الفرضية صحيحة يفترض أن تكون  $m$  و  $\mu_0$  متقاربتين. اختبار الفرضية يكون بتقييم الفرق بين هاتين القيمتين، بحيث نرفضها إذا كان الفرق كبيرا. لتقييم الفرق بين القيمتين نحتاج إلى تحديد طبيعة التوزيع الاحتمالي ل  $M$  (و هو ما يعيدنا إلى نظريات توزيع المعاينة)، لحساب احتمال الفرق بين  $m$  و  $\mu_0$ .

#### 9-1-2. الاختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط.

لنتناول هذا المثال: نريد اختبار، بمستوى معنوية 5%، فرضية أن متوسط دخل الطالب في السنة الأولى من تخرجه يساوي القيمة 15000 دج التي هي متوسط الدخل في عينة من 100 خريج علما أن الانحراف المعياري للدخل هو 1500 وأن الدخل يتبع التوزيع الطبيعي. نحتاج إلى الخطوات التالية:

– صياغة الفرضيات،

<sup>1</sup> تضمن البرنامج فصلين حول موضوع اختبار الفروض، الأول مفاهيم أساسية والثاني تطبيقات اختبار الفروض؛ غير أننا نرى أن الفصل بين هذين الجزئين سوف يؤدي إلى تكرار الطرق للمفاهيم الأساسية. من جهة أخرى، يصعب شرح المفاهيم الأساسية بمعزل عن تطبيقاتها أي بمعزل عن بنود المبحث الثاني. لذلك فسوف نخوض مباشرة في تطبيقات اختبارات الفروض، وسوف نشرح المفاهيم الأساسية بالتدرج عندما تظهر الحاجة إليه.  
2 نرسم ب M للمتغيرة ع متوسط العينة، و نرسم ب m لقيمة المتغيرة.

- تحديد قاعدة القرار،
- حساب القيمة الجدولية للمتغيرة،
- حساب القيمة الفعلية للمتغيرة،
- اتخاذ القرار.

### 1-2-1-9. تحديد الفرضيات (الصفيرية والبديلة):

الخطوة الأولى في الاختبار هو تحديد الفرضية المراد اختبارها، وتسمى الفرضية الصفيرية أو فرضية العدم  $H_0$ ، والفرضية التي ستقبل في حالتي عدم قبول<sup>1</sup> أو رفض الفرضية الصفيرية وتسمى الفرضية البديلة  $H_1$ . في مثالنا نكتب الفرضيتان كما يلي:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

يؤدي الاختبار إما إلى رفض  $H_0$  ونكتب  $RH_0$  وفي هذه الحالة نقبل الفرضية البديلة  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ،

أو إلى عدم رفض الفرضية الصفيرية ونكتب  $R'H_0$ .

$\mu_0$  القيمة الافتراضية ل  $\mu$  هي في هذه الحالة 15000 لذلك نكتب الفرضيات كما يلي:

$$H_0 : \mu = 15000 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq 15000$$

عادة ما تكون  $\mu_0$  محددة بناء على بيانات عينة عشوائية بسيطة ( $\mu_0 = m$ )، وفي هذه الحالة يمكن استخدام الخاصية  $M \sim N(\mu, \sigma_m)$  لإجراء اختبار صدقية  $H_0 : \mu = \mu_0$  بتقييم الفرق بين  $\mu_0$  و  $m$  أي المسافة  $(\mu_0 - m)$ ، حيث نعلم أنه إذا كانت  $H_0 : \mu = \mu_0$  صحيحة فإن :

$$P(\mu_0 - 1.64(\sigma_m) \leq m \leq \mu_0 + 1.64(\sigma_m)) = 0.90$$

$$P(\mu_0 - 1.96(\sigma_m) \leq m \leq \mu_0 + 1.96(\sigma_m)) = 0.95$$

$$P(\mu_0 - 2.58(\sigma_m) \leq m \leq \mu_0 + 2.58(\sigma_m)) = 0.99$$

وبصفة عامة نكتب:

$$P[\mu_0 - z_{1-\alpha/2}(\sigma_m) \leq m \leq \mu_0 + z_{1-\alpha/2}(\sigma_m)] = 1 - \alpha$$

أو حسب الكتابة الأكثر شيوعاً:

$$P(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

حيث:

-  $Z_{cal} = (m - \mu_0)/\sigma_m$  تسمى متغيرة القرار أو  $z$  المحسوبة، حيث  $Z_{cal} \sim N(0, 1)$ .

-  $\sigma_m$  هو خطأ المعاينة حيث:  $\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$  في حالة المعاينة بالإرجاع (أو  $n \leq 0.05N$ ) و

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

و إذا كان المجتمع محدود و المعاينة نفاذية.

<sup>1</sup> عدم القبول لا يعني بالضرورة الرفض، لذلك ينبغي التمييز بينهما.

–  $1 - \alpha/2$  : المساحة على يسار  $Z$ .

–  $n$  : حجم العينة.

إذا كان  $m$  خارج المجال الذي احتمالته  $1 - \alpha$  نرفض الفرضية الصفرية  $H_0 : \mu = \mu_0$  التي حدد على أساسها هذا المجال ونقبل بالتالي الفرضية البديلة  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ . تسمى هذه (الخطئة) قاعدة القرار.

### 2-2-1-9. تحديد قاعدة القرار

تكتب قاعدة القرار في المثال الذي بين أيدينا، وهي قاعدة اختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط (أنظر الرسم الموالي)، كما يلي:

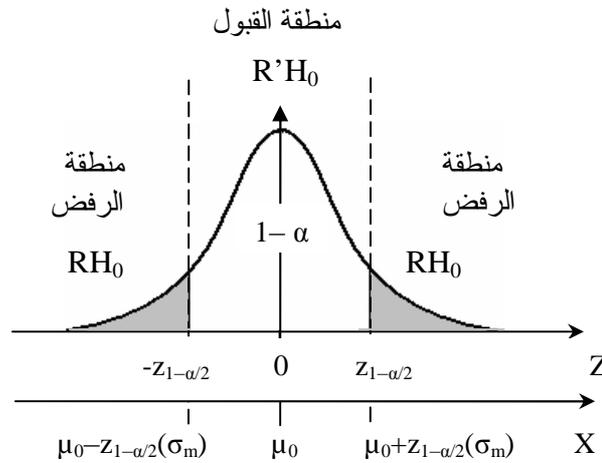
$$\begin{cases} z_c = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} \notin \left[ -z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \rightarrow RH_0 \\ z_c = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} \in \left[ -z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \rightarrow \bar{RH}_0 \end{cases}$$

بمعنى: نرفض الفرضية الصفرية إذا كان  $z_c \notin [-z_{1-\alpha/2} ; z_{1-\alpha/2}]$  ولا نرفضها إذا كانت  $z_c$  تنتمي إلى المجال المذكور. تسمى القيمة المحسوبة.

ويمكن أن تكتب قاعدة القرار بطرق أخرى لها نفس الدلالة منها:

$$\begin{cases} \left| \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \rightarrow RH_0 \\ \left| \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} \right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \bar{RH}_0 \end{cases}$$

الرسم الموالي يبين في أي حالة يمكن رفض الفرضية الصفرية وفي أي حالة لا يمكن ذلك.



رسم 9-1 منطقتي القبول والرفض في حالة قاعد القرار الثنائية

لاحظ:

- الوصول إلى قرار خاطيء يكون إما بقبول الفرضية  $H_0$  بينما هي خاطئة أو رفضها بينما هي صحيحة: فقد تكون الفرضية  $H_0$  صحيحة بينما نتوصل بسبب قيمة  $m$  بعيدة عن  $\mu_0$  إلى رفضها، ويسمى هذا الخطأ من النوع الأول، ويكتب:  $P(RH_0 / H_0) = \alpha$ ، أو قد تكون الفرضية  $H_0$  خاطئة بينما نتوصل بسبب قيمة  $m$  قريبة من  $\mu_0$  إلى قبولها، ويسمى هذا الخطأ من النوع الثاني (أنظر الملحق) ويكتب:  $P(R'H_0 / H_1) = \beta$
- $\beta$  غير  $1 - \alpha$  على عكس ما قد يبدو إلى الأذهان، فالحدثان  $RH_0 / H_0$  و  $R'H_0 / H_1$  ليسا حدثان متعاكسان وإنما الحدث المعاكس ل  $RH_0 / H_0$  هو  $R'H_0 / H_0$ .
- يمكن تقليص احتمال أحد الخطأين على حساب الثاني، ولكن لا يمكن تقليص احتمال كلا الخطأين معا إلا بزيادة حجم العينة.

3-2-1-9 حساب  $Z_{tab}$  أي  $Z$  الجدولية:

وهي في حالتنا (اختبار ثنائي بمستوى معنوية 5%) :

$$Z_{tab} = Z_{1-\alpha/2} = Z_{1-0.05/2} = Z_{1-0.025} = Z_{0.975}$$

ومن الجدول نجد أن  $Z_{0.975} = 1.96$ .

4-2-1-9 حساب  $Z_{cal}$  أي  $Z$  الفعلية أو المحسوبة أي متغيرة القرار:

وهي المتغيرة المعيارية ل  $M$ :

$$Z_{cal} = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} = \frac{15800 - 15000}{1500/\sqrt{100}} = 5,33$$

5-2-1-9 القرار:

نقرر قبول أو رفض  $H_0$  حسب قاعدة القرار. وفي حالتنا نرفض  $H_0$  لأن  $Z_{cal} > Z_{tab}$  ونقبل  $H_1$  أي أن متوسط دخل الخريج حديث التوظيف ليس 15000 دج.

3-1-9 الاختبار أحادي الاتجاه للمتوسط.

يتميز الاختبار الثنائي عن الأحادي في الفرضية البديلة. هذه الأخيرة هي عدم مساواة في الاختبار الثنائي وأكبر تماما أو أصغر تماما (حسب كون الاختبار من اليمين أم من اليسار) في الاختبار الأحادي، وهذا يترتب عليه تغيير في قاعدة القرار. يوجد نوعان من الاختبار أحادي الاتجاه:

1-3-1-9 الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين.

لنرجع إلى المثال السابق مع تغيير محدد هو أننا نريد اختبار ما إذا كان متوسط الدخل للخريج 15000 دج أم أكثر (اختبار من اليمين).

أ- الفرضيات:  $H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$

في هذه الحالة  $\mu_0 = 15000$  لذلك نكتب :  $H_0 : \mu = 15000 \leftrightarrow H_1 : \mu > 15000$

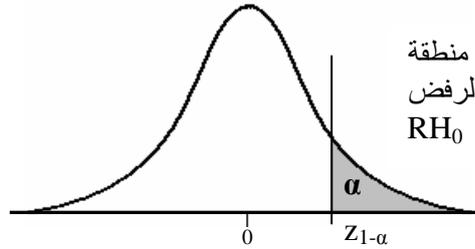
$$\left\{ \begin{array}{l} z_{ca} = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} > z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \\ z_c = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} \leq z_{1-\alpha} \rightarrow \bar{R}H_0 \end{array} \right. \quad \text{ب- قاعدة القرار:}$$

ج- حساب  $z_{tab}$  الجدولية: (اختبار على اليمين بمستوى معنوية 5%) :

$$z_{tab} = z_{1-\alpha} = z_{1-0.05} = z_{0.95} = 1.645$$

$$z_{cal} = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} = \frac{m - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{15800 - 1500}{1500 / \sqrt{100}} = 5.33 \quad \text{د- حساب } z_{cal} \text{ أو اختصارا } z_c \text{ الفعلية:}$$

ه- القرار: نرفض  $H_0$  لأن  $z_{cal} > z_{tab}$  ونقبل  $H_1$  أي أن متوسط دخل الخريج حديث التوظيف ليس 15000 دج وإنما هو أكبر.



رسم 9-2. منطقة الرفض للاختبار أحادي الاتجاه من اليمين

الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار 2-3-1-9

نعود إلى مثالنا ونفترض أن متوسط العينة كان 14200 دج ونريد أن نختبر ما إذا كان متوسط الدخل مساويا أم أقل من 15000 دج.

أ- الفرضيات :  $H_0 : \mu = 15000 \leftrightarrow H_1 : \mu < 15000$

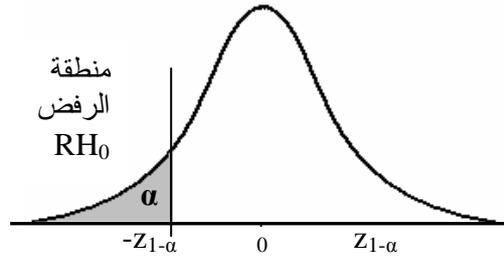
$$\left\{ \begin{array}{l} z_{cal} = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} < -z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \\ z_{cal} = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} \geq -z_{1-\alpha} \rightarrow \bar{R}H_0 \end{array} \right. \quad \text{ب- قاعدة القرار:}$$

ج- حساب  $z_{tab}$ : (اختبار على اليسار بمستوى معنوية 5%) :

$$z_{tab} = -z_{1-\alpha} = -z_{1-0.05} = -z_{0.95} = -1.645$$

$$z_{cal} = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} = \frac{m - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{14200 - 1500}{1500 / \sqrt{100}} = -5.33 \quad \text{د- حساب } z_{cal} :$$

ه- القرار: نرفض  $H_0$  لأن  $z_{cal} < z_{tab}$  ونقبل  $H_1$  أي أن متوسط دخل الخريج حديث التوظيف أقل من 15000 دج .



رسم 2 منطقة الرفض للاختبار أحادي الاتجاه من اليسار

4-1-9. استخدام S كمقدر ل  $\sigma$  في اختبار المتوسط.

في الواقع غالبا ما يكون الانحراف المعياري للمجتمع مجهولا ونحتاج بالتالي إلى استخدام الانحراف المعياري للعينة (S) عند حساب  $\sigma_m$  (أنظر درس التقدير)، حيث نعوض العبارة

$$\sigma_m = \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \quad \text{أو} \quad \sigma_m = \frac{S}{\sqrt{n-1}} \quad \text{ب} \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

في هذه الحالة نستخدم التوزيع ستودنت إلا إذا كانت العينة كبيرة فنستخدم التوزيع الطبيعي.

مثال: في المثال السابق نفترض أن الانحراف المعياري للدخل الشهري للطالب مجهول، لكن الانحراف المعياري للعينة  $S = 1600$ . كيف يمكن اختبار ما إذا كان الدخل الشهري أقل من 15000 دج؟

الخطوات أ، ب وج تبقى بدون تغيير.

$$\text{د- حساب } z \text{ الفعلية: } z_{cal} = \frac{m - \mu_0}{\sigma_m} = \frac{m - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}} = \frac{14200 - 1500}{1600 / \sqrt{100-1}} = -4.97$$

ه- القرار: نرفض  $H_0$  لأن  $z_{cal} < z_{tab}$  ونقبل  $H_1$  أي أن متوسط دخل الخريج حديث التوظيف ليس 15000 دج وإنما هو أقل.

## 5-1-9. استخدام التوزيع t في اختبار المتوسط.

في حالة  $n < 30$  و  $\sigma$  مجهولا، لا يمكن استخدام التوزيع الطبيعي، ولكن لدينا:

$$\frac{m - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}} \sim t_{n-1} \quad \text{و تحت } H_0 (\mu = \mu_0) \quad \frac{m - \mu}{S / \sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$$

يمكن إذا استخدام توزيع ستودنت (بشرط أن يكون توزيع المجتمع طبيعيا أو على الأقل جرسى الشكل).

و تتغير قاعدة القرار تبعا لهذا التغيير فتكتب في حالة الاختبار الثنائي كما يلي:

$$\left| \frac{m - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}} \right| > t_{n-1; 1-\alpha/2} \rightarrow RH_0$$

$$\left| \frac{m - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}} \right| \leq t_{n-1; 1-\alpha/2} \rightarrow \bar{RH}_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}} > t_{n-1;1-\alpha} \rightarrow RH_0 \text{ : حالة اختبار من اليمين: } \\ \frac{m - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}} \leq t_{n-1;1-\alpha} \rightarrow \bar{RH}_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}} < -t_{n-1;1-\alpha} \rightarrow RH_0 \text{ : حالة اختبار من اليسار: } \\ \frac{m - \mu_0}{S / \sqrt{n-1}} \geq -t_{n-1;1-\alpha} \rightarrow \bar{RH}_0 \end{array} \right.$$

### 6-1-9. خلاصة

يتم اختبار الفرضيات من خلال 5 خطوات متتالية هي: صياغة الفرضيات (الصفريية والبديلة)، تحديد قاعدة القرار (متى نرفض أو لا نرفض  $H_0$ )، حساب القيمة الجدولية للمتغيرة، حساب القيمة الفعلية للمتغيرة، واتخاذ القرار. تتحدد كيفية إتمام كل خطوة حسب طبيعة الاختبار (ثنائي أو أحادي الاتجاه)، حسب طبيعة المجتمع وطبيعة وحجم العينة، ... وتستخدم في ذلك نظريات توزيع المعاينة.

### 7-1-9. ملحق

#### احتمال الخطأ في القرار.

ذكرنا أنه عند اتخاذ القرار يمكن أن تقع في أحد خطئين، الخطأ الأول هو رفض الفرضية  $H_0$  بينما هي صحيحة، واحتماله هو مساحة منطقة الرفض أي  $\alpha$ ، أما الخطأ من النوع الثاني فهو قبول الفرضية  $H_0$  بينما هي خاطئة، ورمزنا لاحتماله ب  $\beta$  ، فكيف يمكن حساب  $\beta$  ؟.

لتوضيح ذلك نعود إلى المثال المعطى في بداية الدرس، ونفترض أن دخل الخريج الجامعي في سنة عمله الأولى هو 15000 الذي يمثل متوسط دخل العينة المدروسة المكونة من 100 خريج، مع العلم أن  $\sigma = 1500$ .

احتمال الخطأ من النوع الأول: ترفض الفرضية  $H_0$  إذا وجد أن  $m$  لا ينتمي إلا مجال القبول:

$$m \notin [15000 - 1.96(1500/100) ; 15000 + 1.96(1500/100)]$$

$$P(RH_0/H_0) = P(RH_0/ X \sim N(15000, 1500))$$

$$= P(m \notin [15000 - 1.96(1500/100) ; 15000 + 1.96(1500/100)]/X \sim N(15000, 1500))$$

$$= P(m \notin [14706 ; 15294]/X \sim N(15000, 1500))$$

$$\Rightarrow P(RH_0/H_0) = \alpha = 0.05$$

بصفة عامة الاحتمال (غير الشرطي)  $P(RH_0)$  يتغير حسب القيمة الحقيقية ل  $\mu$  كما سنرى عند بحث قوة وفعالية الاختبار.

احتمال الخطأ من النوع الثاني (قبول فرضية خاطئة): تقبل الفرضية  $H_0$  إذا وجد أن  $m$  تنتمي إلى مجال القبول،

$$m \in [15000 - 1.96(1500/100) ; 15000 + 1.96(1500/100)]$$

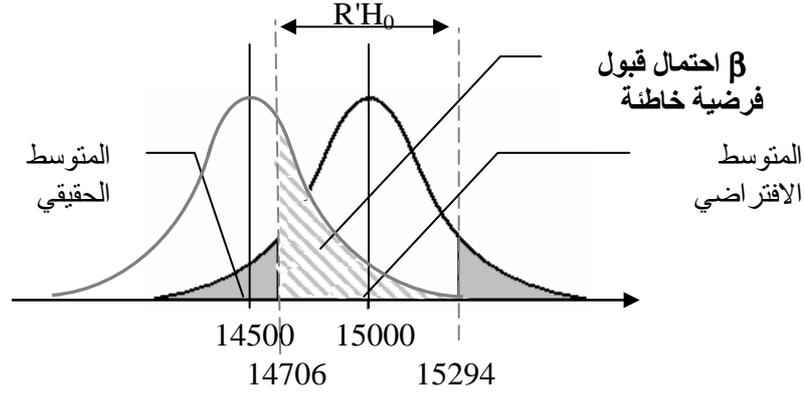
$$m \in [14706 ; 15294]$$

ويكون هذا القبول خطأً إذا كان المتوسط الحقيقي للمجتمع  $\mu$  مختلفاً عن  $m = 15000$ . ففي حالة  $\mu = 14500$  مثلاً يكتب احتمال الخطأ من النوع الثاني ويحسب كما يلي:

$$P(R'H_0/H_1) = \beta = P(m \in [14706 ; 15294] / X \sim N(14500, 1500))$$

$$\beta = P\left(\frac{14706 - 14500}{1500/\sqrt{100}} \leq z \leq \frac{15294 - 14500}{1500/\sqrt{100}}\right) = P(1.37 \leq z \leq 5.29)$$

$$= F(5.29) - F(1.37) = 0.9999 - 0.9152 \Rightarrow \beta = 0.0848$$



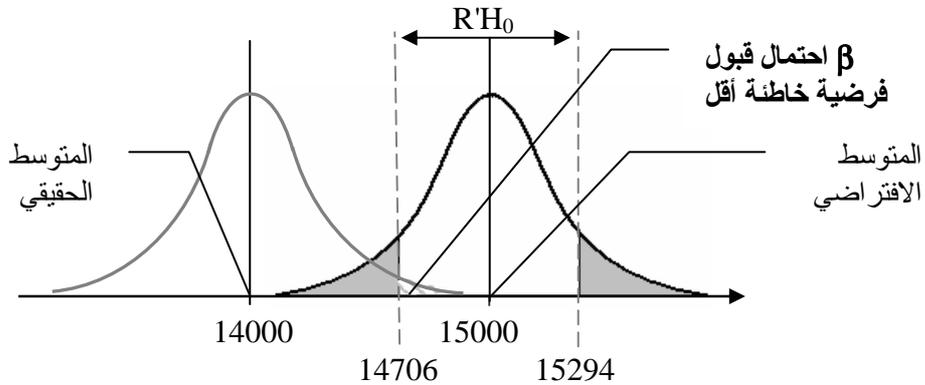
رسم 9- 2 احتمال الخطأ من النوع الثاني: قبول فرضية خاطئة.

في حالة  $\mu = 14000$  ، يكون احتمال الخطأ من النوع الثاني أقل:

$$P(R'H_0/H_1) = \beta = P(m \in [14706 ; 15294] / X \sim N(14000, 1500))$$

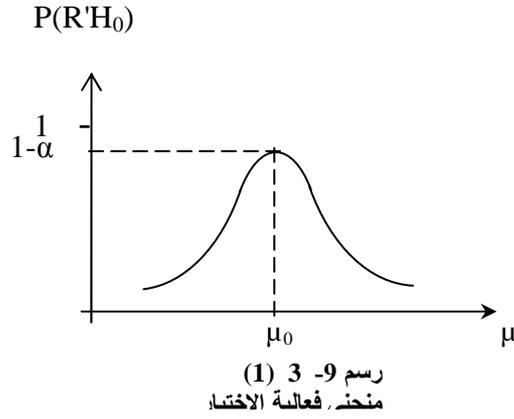
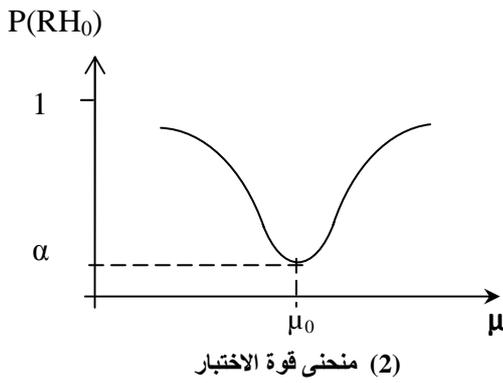
$$\beta = P\left(\frac{14706 - 14000}{1500/\sqrt{100}} \leq z \leq \frac{15294 - 14000}{1500/\sqrt{100}}\right) = P(4.71 \leq z \leq 8.63)$$

$$= F(8.63) - F(4.71) = 0.00000126 < 0.0848$$



## قوة الاختبار وفعاليتيه.

يقيس احتمال رفض الفرضية الصفرية  $P(RH_0)$  قوة الاختبار أي القدرة على رفض الفرضية، فيما يقيس احتمال قبولها  $P(R'H_0)$  فعالية الاختبار (أنظر الرسم أدناه). وتتفاوت الاختبارات من حيث القوة والفعالية بحسب تصميم الاختبار وبحسب نوعه<sup>1</sup>. ويتوقف احتمال قبول الفرضية الصفرية واحتمال رفضها على القيمة الحقيقية ل  $\mu$  لكن ليس بنفس الطريقة؛ وهو ما يبينه الرسم التالي الخاص باختبار المتوسط في حالة المجتمع الطبيعي.



## 2-9. اختبار النسبة واختبار التباين

اختبار النسبة  
اختبار التباين

## 1-2-9. اختبار النسبة

يتعلق هذا الاختبار بنسبة مفردات المجتمع التي تتصف بخاصية ما (p)، حيث يؤكد الاختبار أو ينفي صحة فرضية معينة بخصوص قيمة p. يرمز للقيمة الافتراضية ب  $p_0$  وتكتب الفرضية كما يلي:  $H_0 : p = p_0$  للقيام بالاختبار نستخدم خصائص  $p'$  النسبة في العينة (أنظر توزيع المعاينة للنسبة : نظرية 6).

$$E(p') = \mu_{p'} = p \quad ; \quad \sigma^2_{p'} = \frac{pq}{n}$$

عند  $n \geq 30$   $p' \approx N(p, \sigma_{p'})$  (قانون موافر - لابلاس)

$$p' \approx N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right) : H_0 \text{ استنادا إلى هذه الخصائص وتحت } H_0$$

و من ثم يمكن تحديد قاعدة القرار بحسب طبيعة الاختبار كما يلي:

$$\begin{cases} RH_0 \text{ si } \left| \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \\ \overline{RH_0} \text{ sinon.} \end{cases} \text{ في حالة الاختبار الثنائي:}$$

<sup>1</sup> الاختبارات بدون معالم (Les tests non paramétriques) هي عادة أكثر قوة من الاختبارات بمعلم (tests paramétriques)، الاختبارات بمعلم هي التي تتضمن فرضية بخصوص متوسط المجتمع أو طبيعته توزيعه أما الاختبارات بدون معالم فهي التي لا نضع فيها فرضيات بخصوص معالم المجتمع. سوف نقتصر في دراستنا على النوع الأول من الاختبارات دون الثاني، هذا الأخير يمكن مطالعته مثلا في: رونالد سيهيسات (Ronald Céhéssat) 1976 ص 253.

$$\left\{ \begin{array}{l} RH_0 \text{ si } \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} > z_{1-\alpha} \\ \bar{RH}_0 \text{ sinon.} \end{array} \right. \quad \text{في حالة اختبار من اليمين:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} RH_0 \text{ si } \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} < -z_{1-\alpha} \\ \bar{RH}_0 \text{ sinon.} \end{array} \right. \quad \text{في حالة اختبار من اليسار:}$$

مثال: تقدر الدوائر الرسمية نسبة المتخرجين الجامعيين الذين يحصلون على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم ب 70% وجدت دراسة أجريت على عينة من 900 طالب أن نسبة الحصول على عمل 67%. كيف يمكن اختبار بمستوى معنوية 5% ما إذا كانت النسبة الرسمية صحيحة أم مبالغ فيها؟

$$H_0 : p = 0.70 \leftrightarrow H_1 : p < 0.70$$

$$\frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{0.67 - 0.7}{\sqrt{0.7(0.3)/900}} \cong -196.34 < -z_{1-0.05} = -1.64 \Rightarrow RH_0$$

### 2-2-9. اختبار التباين

لاختبار صدقية فرضية بخصوص قيمة تباين مجتمع ما،

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

نستعمل المقدر غير المنحاز  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (X_i - m)^2}{n-1}$  حيث في حالة العينة الكبيرة ( $n \geq 50$  في أحسن الأحوال)،

وتحت  $H_0$  فإن:

$$T = \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma_0^2}{\sqrt{(\mu_4 - \sigma_0^4)/n}} \approx N(0,1). \quad \mu_4 = E(X - \mu)^4$$

حيث  $\mu_4$  هو العزم المركزي من الدرجة الرابعة. وبهذا الشكل تكتب قاعدة القرار للاختبار الثنائي كما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} RH_0 \text{ si } \left| \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma_0^2}{\sqrt{(\mu_4 - \sigma_0^4)/n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \\ \bar{RH}_0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

وفي حالة  $\mu_4$  مجهول يمكن استخدام كمقدر:  $m_4 = E(x_1 - m)^4$ .

وإذا كان المجتمع طبيعيًا، حيث  $\mu_4 = 3\sigma^4$ ، فإن متغيرة القرار يمكن أن تكتب كما يلي:

$$T = \frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2 \sqrt{2/n}} \approx N(0,1).$$

**3-9. اختبار المقارنة بين مجتمعين**

اختبار تساوي متوسطي مجتمعين  
اختبار تساوي تبايني مجتمعين

يتناول هذا الاختبار مقارنة بين مجتمعين من خلال المتوسط أو التباين لكل منهما ... وسنركز هنا على متغيرة القرار، إذ من السهل على الطالب استنتاج كيفية إتمام الخطوات الأخرى على ضوء ما سبق.

**1-3-9. اختبار تساوي متوسطي مجتمعين**

الغرض من الاختبار هو تأكيد أو نفي تساوي متوسطي مجتمعين من خلال عينتين عشوائيتين بسيطتين مستقلتين.

تكتب الفرضيات (في حالة الاختبار الثنائي) كما يلي:  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

لتحديد متغيرة القرار نميز بين حالة كون تباينا المجتمعين معلومين وحالة كون تباينا المجتمعين مجهولين، فنعتمد على متغيرة القرار T أو T' بحسب الحالة.

**1-1-3-9. تباينا المجتمعين معلومين**

1- المجتمعين طبيعيين:

$$T = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

2- مجتمعين ما  $(n_1, n_2 \geq 30)$ :

$$T = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx N(0, 1)$$

**2-1-3-9. تباينا المجتمعين مجهولين**

1- المجتمعان طبيعيين:

$$T' = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

$$T = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}}} \approx N(0, 1) : (n_1, n_2 \geq 30)$$

مثال: نسحب من مجتمعين طبيعيين متساويي التباين عينتين حجم الأولى 18 وحجم الثانية 21. وجدنا

النتائج التالية:

$$m_1 = 81, m_2 = 76, S_1^2 = 9, S_2^2 = 8.$$

كيف يمكن إجراء اختبار تساوي متوسطي المجتمعين بمستوى معنوية 5% ؟

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$T' = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{81 - 76}{\sqrt{\frac{18(9) + 21(8)}{18 + 21 - 2} \left( \frac{1}{18} + \frac{1}{21} \right)}} \cong 5.43$$

$$t_{0.975;37} \cong 2.336 < 5.43 \quad \Rightarrow RH_0$$

### 2-3-9. اختبار تساوي تبايني مجتمعين

الغرض من الاختبار هو تأكيد أو نفي تساوي تبايننا مجتمعين من خلال عينتين عشوائيتين بسيطتين مستقلتين.

$$H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2 \quad ; \text{ تكتب الفرضيات (في حالة الاختبار الثنائي) كما يلي:}$$

نعتمد في الاختبار على متغيرة القرار (T أو T') بحسب كون المجتمعين طبيعيين أم غير ذلك.

### 1-2-3-9. مجتمعين طبيعيين

-1 الحالة العامة:

$$T' = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \sim F_{n_1-1; n_2-1}$$

-2 في حالة  $n_1, n_2 \geq 30$

$$T = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \right) / \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_1 - 1} + \frac{1}{n_2 - 1} \right)} \approx N(0;1)$$

### 2-2-3-9. مجتمعين ما $(n_1, n_2 \geq 50)$

-1  $\mu_4^{(1)}; \mu_4^{(2)}$  معروفين :

$$T = (\hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2) / \sqrt{\frac{\mu_4^{(1)} - \hat{S}_1^4}{n_1} - \frac{\mu_4^{(2)} - \hat{S}_2^4}{n_2}} \approx N(0;1)$$

-2 في حالة  $\mu_4^{(1)}; \mu_4^{(2)}$  غير معروفين : نعوض  $\mu_4$  ب  $m_4$ .

مثال : نسحب من مجتمعين طبيعيين عينتين حجم الأولى 18 وحجم الثانية 21. وجدنا النتائج التالية:

$$m_1 = 81, m_2 = 76, S^2_1 = 9, S^2_2 = 8.$$

كيف يمكن اجراء اختبار تساوي متوسطي المجتمعين بمستوى معنوية 5 % ؟

$$H_0 : \sigma^2_1 = \sigma^2_2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2$$

$$\hat{S}^2_1 = S^2_1 \cdot n_1 / (n_1 - 1) = 9(18)/17 \approx 9.53 ;$$

$$\hat{S}^2_2 = S^2_2 \cdot n_2 / (n_2 - 1) = 8(21)/20 = 8.4$$

$$\hat{S}^2_1 / \hat{S}^2_2 \approx 1.135 ; F_{0.05; 17; 20} \approx 2.17$$

$$T < F_{\alpha; n_1-1; n_2-1} \Rightarrow \bar{R}H_0$$

#### 4-9. اختبار ك2 أو اختبار التجانس و اختبار التعديل.

##### 1-4-9. اختبار التجانس

لنعد إلى اختبار النسبة، ونفترض أن لدينا عددا  $k$  من الخصائص المتنافية، نسبة تحقق كل منها في المجتمع هي  $p_i$  حيث  $\sum p_i = 1$ . نريد اختبار فرضية حول قيم هذه النسب:

$$H_0 : p_i = p_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \leftrightarrow H_1 : p_i \neq p_{i0}$$

(الفرضية البديلة هي أن إحدى النسب الافتراضية  $p_{i0}$  على الأقل غير مساوية للقيمة الحقيقية.)

متغيرة القرار : لإنجاز الاختبار نستخرج عينة (نرمز لحجم العينة ب  $n$ ) ونحسب فيها  $n_i$  عدد مرات تحقق كل خاصية. إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

$$n \geq 30, \quad np_{i0} \geq 1, \quad \text{وعلى الأقل في } 80\% \text{ من الحالات } np_{i0} \geq 5 \text{ نبرهن أن:}$$

$$T = \sum_i \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} \approx \chi_{k-1}^2$$

مثال: يتقدم إلى انتخابات معينة 3 مرشحين: أ، ب و ج. نريد اختبار فرضية بمستوى معنوية 5% حول شعبيتهم كما يلي:

$$H_0 : p_1 = 0.4, p_2 = 0.35, p_3 = 0.25$$

أجري استجواب ل  $n = 400$  ناخب فكان توزع فئات المساندين على التوالي :  $n_i = 170, 135, 95$

لدينا  $n = 400 \geq 30$ ، و الأعداد الافتراضية:

$$np_{i0} = 400(0.4) = 160, 400(0.35) = 140, 400(0.25) = 100 \geq 1$$

و الشرط  $np_{i0} \geq 5$  في أكثر من 80% من الحالات محقق.

$$T = \sum_i \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} = \frac{(170-160)^2}{160} + \frac{(135-140)^2}{140} + \frac{(95-100)^2}{100} = 1.05$$

$$X_{2; 0.95}^2 = 5.99 > 1.05 \Rightarrow H_0 .$$

بما أن  $T$  أقل بكثير من  $X^2$  يمكن قبول الفرضية الصفرية.

##### 2-4-9. اختبار التعديل

تستخدم هذه الطريقة أيضا لاختبار تعديل توزيع معين بتوزيع آخر، وفي هذه الحالة نقارن بين تكرارات العينة

(التكرارات الحقيقية)  $n_i$  وتكرارات افتراضية  $n_{i0}$ ، حيث تصاغ الفرضيات كما يلي:

$$H_0: n_i = n_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \leftrightarrow H_1: n_i \text{ غير مساوية للتكرار الحقيقي } n_{i0}$$

لإجراء الاختبار نستخدم القانون التالي:

$$T = \sum_i \frac{(n_i - n_{i0})^2}{n_{i0}} \approx \chi_{k-m-1}^2$$

حيث  $m$  عدد معالم المجتمع المقدرة انطلاقا من بيانات العينة لتحديد التكرارات النظرية.

مثال. طلبنا من 10 أفراد أن يعطونا كل منهم بطريقة عشوائية 10 أرقام تتراوح بين 0 و 9. نريد أن نختبر، بمستوى

معنوية 5%، ما إذا كانت العينات المحصلة فعلا عشوائية علما أن المشاهدات الفعلية  $n_i$  من كل رقم كانت كالتالي:

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n_i$	10	8	9	14	8	9	11	9	12	10

الحل.

أن تكون العينات عشوائية يعني أن يكون لكل رقم من الأرقام 0 إلى 9 نفس الاحتمال في أن يتم اختياره في كل مرة. معنى هذا أنه إذا اعتبرنا الرقم المختار من قبل الفرد في كل مرة كمتغيرة عشوائية  $X$  فإن  $X$  تتبع توزيع احتمالي متعادل (uniforme) أي أن لكل القيم نفس الاحتمال 0.1. لدينا إذا توزيعان فعلي ونظري نريد اختبار المطابقة أو التقارب بينهما، و هو ما يسمى باختبار التعديل (Teste d'ajustement).

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n_i$	10	8	9	14	8	9	11	9	12	10
$n_{i0}$	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_{i0})^2}{n_{i0}} = \frac{1}{10}(0 + 2^2 + 1^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 0) = 3.2$$

$$\chi_{10-1,0.95}^2 = 16.9 > 3.2$$

بما أن  $T$  أقل بكثير من  $\chi^2$  يمكن قبول الفرضية الصفرية بأن  $X$  تتبع التوزيع المتعادل ما يعني أن الأرقام اختيرت بطريقة عشوائية.

مثال 2. لمدة ساعتين تم عد  $X$  : عدد الزبائن الذين يصلون في الدقيقة إلى شباك معين. نريد اختبار بمستوى معنوية 0.05 فرضية أن  $X$  تتبع توزيع بواسون. المشاهدات كانت كالتالي:

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n_i$	4	9	24	25	22	18	6	5	3	2	1	1

الحل.

لتحديد القيم النظرية حسب التوزيع النظري بواسون نحتاج إلى تحديد معلمة هذا الأخير. نعلم أن معلمة توزيع بواسون تساوي التوقع وتساوي في الوقت ذاته التباين. بحساب هذين المؤشرين للمتغيرة  $X$  نجدهما على التوالي 3.7 و 4.41 لذلك نأخذ كقيمة تقديرية ل  $\lambda$  القيمة 4. نحسب إذا باستخدام توزيع بواسون بمعلمة 4 احتمالات القيم من 0 إلى 11 ثم نضرب هذه الاحتمالات في حجم العينة  $n = 120$  للحصول على القيم  $n_{i0}$  مع التقريب لحذف الأرقام بعد الفاصلة و الحرص على أن يبقى المجموع 120.

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\Sigma$
$n_i$	4	9	24	25	22	18	6	5	3	2	1	1	120
$n_{i0}$	2	9	18	23	23	19	13	7	3	2	1	0	120

نعيد تجميع القيمتين الأوليين والأربع الأخيرة لتلبية الشرط  $np_{i0} \geq 5$  ما يجعل عدد القيم  $k = 8$  بدلا من 12. بهذا تكون عدد درجات الحرية  $6 = 8 - 1 - 1$ . بما أن هنا معلم واحد للتوزيع النظري تم تقديره انطلاقا من العينة.

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_{i0})^2}{n_{i0}} = 7.14 \quad \chi_{6,0.95}^2 = 12.6 > 7.14$$

بما أن  $T$  أقل بكثير من  $\chi^2$  يمكن قبول الفرضية الصفرية بأن عدد الزبائن  $X$  الذين يصلون إلى الشباك في الدقيقة يتبع التوزيع بواسون.

### المراجع

- كلاس محمد، محاضرات في الإحصاء التطبيقي، ديوان المطبوعات الجامعية، 1993.
- شيبات أحمد، مفاهيم من حساب الاحتمالات - دروس وتمارين محلولة، سلسلة الرياضيات في الجامعة.
- رجال سعدي، محاضرات في الاحتمالات والاحصاء، ديوان المطبوعات الجامعية، 2005.
- Aîvazian S., Erukov I., Mekhaline L., Eléments de modélisation et traitement primaire de données, Editions Mir, Moscou, 1983, traduit du russe par Djilali Embarek, 1986.
- Boyer Luc et Equilbey Noël, Histoire du management, Les éditions d'organisation, Paris, 1990.
- Céhéssat Ronald, Exercices commentés de statistique et informatique appliquées, Dunod, 1976, Paris.
- Dreesbeke Jean-Jacques, Eléments de statistique, Série SMA, Edition de l'Université de Bruxelles et Edition Ellipses, 1997, Belgique.
- Gnédénko, B. Béliaev, Y. Soloviev, A. Méthodes mathématiques en théorie de la fiabilité, Ed. Mir, 1972, Moscou.
- Kazmier Léonard J., Statistique de la gestion, théorie et problèmes, Série Schaum, McGraw Hill, 1982, N. Y.
- Lavoie Réginald, Statistique appliquée, Auto-apprentissage par objectifs, Presses de l'Université du Québec, 1981, Canada.
- McGee Victor E., Principes de statistiques, 1975.
- Salvator Dominick, Econométrie et statistique appliquée, cours et problèmes, Série Schaum, McGraw Hill, 1985, N. Y.
- Spiegel Murray R., probabilités et statistique, cours et problèmes, Série Schaum, McGraw Hill, 1985, N. Y.