المحاضرة 12

التوزيعات الإحتمالية النظرية المتصلة

الموضوع: **التوزيع الطبيعى**

عناصر المحاضرة :

- مقدمة .
- المقطع الأول : التوزيع الطبيعي
- خصائص المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى
- نشاط 1
- المقطع الثاني : التوزيع الطبيعى القياسى (المعياري)
- خصائص المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى القياسى
- نشاط 2
- تطبيق

أهداف المحاضرة :

خاص : في نهاية المحاضرة

يوظف الطالب مفهوم وخصائص التوزيع الطبيعي في دراسة المتغير العشوائي المتصل .

إجرائي :

1- يحدد القيم الإحتمالية لمتغير عشوائي متصل باعتماد مفاهيم التوزيع الطبيعي مستعينا بجدول القيم الحرجة لإختبار Z

2- يوظف خصائص التوزيع الطبيعي في وصف طبيعة توزيع متغير عشوائي متصل معتمدا على القيم العددية للتوزيع .

3- يوظف مفهوم التوزيع الطبيعي القياسي في وصف متغير عشوائي متصل اعتمادا على الدرجات المعيارية بعد حسابها وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري .

4- يحكم على طبيعة توزيع معياري (قياسي) إنطلاقا من مقاييسه بعد حسابها محسنا توظيفها في لدراسة المتغير من دون خطإ .

ملخص المحاضرة :

يتناول الدرس بالشرح والتوضيح التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري بعد تحويل الدرجات الخام إلى درجات معيارية لدراسة ظاهرة لمتغير عشوائي متصل ، وتوضيح خصائص كل منهما بالمثلة التطبيقية المباشرة

كلمات مفتاحية :

التوزيع الطبيعي – التوزيح المعياري – الدرجة الخام – الدرجة المعيارية .

مقدمة :

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتماليه في علم الاحصاء لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العمليه مثل الأطوال و الأوزان و الأعمارودرجات الحراره والدخول الشهريه ... و غيرها من الظواهر المتصلة .

ولرسم التوزيع الطبيعى نستخدم المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي

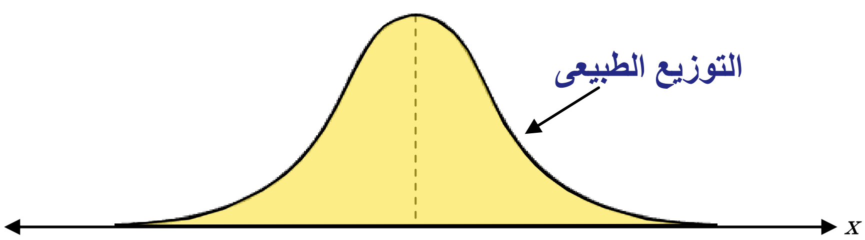
المقطع الأول : التوزيع الطبيعي

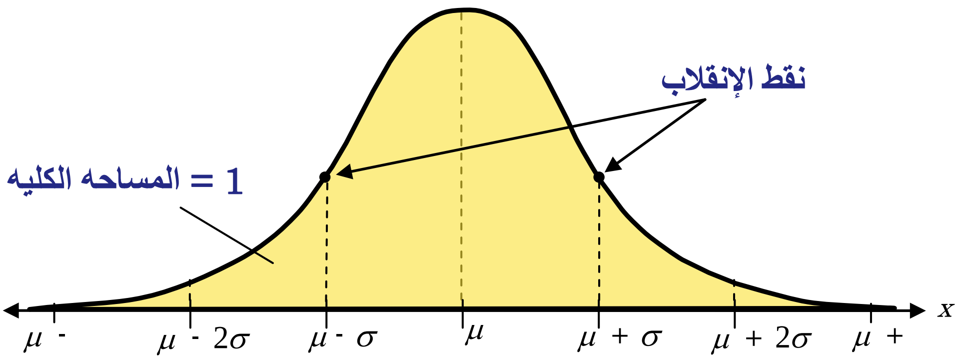
إذا كانت x متغيراً عشوائياً متصلاً يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ و تباينه σ^2 يمكن رسم المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي بإستخدام المعادله

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad ; \; -\infty \le x \le \infty$$

فإنه يقال إن x تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ و تباينه σ^2. و تكتب اختصاراً

$$X \sim N(\mu , \sigma^2)$$





خصائص المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى

1. طرفا التوزيع تمتد من $-\infty$ إلي ∞
2. متماثل حول العمود الذى يمر بقمته أى عند $X=\mu$ لذلك فإن هذا العمود يجزئ المنحنى الطبيعى القياسى إلى قسمين متماثلين فى الشكل والمساحه.
3. يشبه الناقوس من حيث الشكل.
4. المنحنى له نقطتا إنقلاب عند $X=\mu\pm\sigma$
5. المساحه الكليه تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح .
6. نظرا لتطابق جانبيه وتوسط تفرطحه فإن مقاييس النزعه المركزيه الثلاثه (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال) تلتقى فى نقطه واحده (فى منتصف التوزيع) أى أن الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال
7. نلاحظ أن 99.7% من قيم المتغير تقع تقريبا فى الفتره $(\mu-3\sigma \; , \mu+3\sigma)$ أى أنه نادرا ما نجد قيمه من قيم X خارج هذه الفتره. كما أن 95.5% من قيم المتغير X تقع فى الفتره $(\mu-2\sigma \; , \mu+2\sigma)$ وأن% 68 منها تقع فى الفتره() $\mu-\sigma \; , \; \mu+\sigma$

ويمكن حساب إحتمال وقوع X فى أى فتره تريدها وذلك بإيجاد قيمه تكامل داله الكثافه الإحتماليه فى هذه الفتره أى بإيجاد المساحه المحصوره تحت منحنى هذه الداله داخل هذه الفتره . فمثلا الإحتمال $P(a\le X\le b)$ يعطى بالمساحه المظلله فى الشكل الآتى:-

نشاط 1

إذا كان متوسط أطوال المجندين فى وحده عسكريه ما 70 بوصه بإنحراف معيارى قدره 2 بوصه صف هذه البيانات مستخدما القوانين العمليه فى الفقره 7.

الحل:

1. 68% من الحالات فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين $\mu-\sigma$ ، $\mu+\sigma$

$=(70-1\times 2)،(70+1\times 2)$

$=70-2،70+2$

$=68 \quad ، \quad 72$

أى أن 68 % من المجندين فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين 68 سم و 72 سم .

2. 9505% من الحالات فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين $\mu-2\sigma$ ، $\mu+2\sigma$

$=(70-2\times 2)،(70+2\times 2)$

$=(70-4)،(70+4)$

$=66 \quad ، \quad 74$

أى أن 95.5 % من المجندين فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين 66 سم و 74 سمه .

3. 99.7% من الحالات فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين $\mu-3\sigma$ ، $\mu+3\sigma$

$=(70-3\times 2)،(70+3\times 2)$

$=(70-6)،(70+6)$

$=64 \quad ، \quad 76$

أى أن 99.7 % من المجندين فى تلك الوحده يتراوح أطوالهم بين 64 سم و 76 سم .

تختلف التوزيعات الطبيعية باختلاف كل من المتوسط و التباين و لتسهيل حساب الاحتمالات في حالة التوزيع الطبيعي فإننا لابد وأن نتعرض للتوزيع الطبيعي القياسي.

المقطع الثاني : التوزيع الطبيعى القياسى (المعياري)

التوزيع الطبيعى القياسى هو التوزيع الطبيعى بمتوسط $\mu=0$ وتباين $\sigma^2=1$.أي أن أي قيمه من قيم المتغير X يمكن تحويلها إلي المتغير Z الذي يتبع التوزيع الطبيعى القياسى بإستخدام التحويله

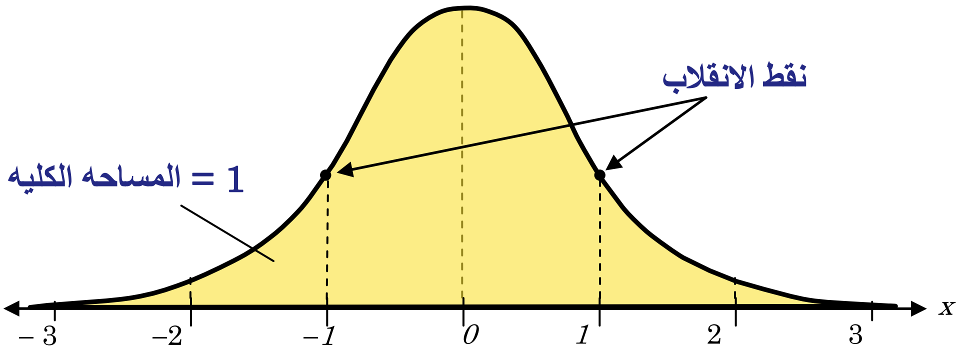
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

ويمكن رسم المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى القياسى بإستخدام المعادله

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},\ -\infty\leq z\leq\infty.$$

والشكل الأتى يوضح المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى القياسى

المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى القياسى

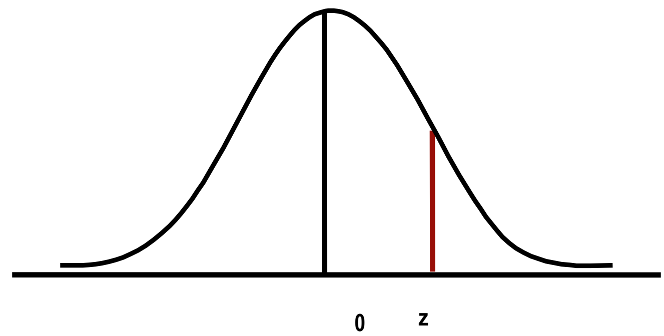


خصائص المنحنى الإحتمالى للتوزيع الطبيعى القياسى

1. طرفا التوزيع تمتد من $-\infty$ إلى ∞
2. متماثل حول العمود الذى يمر بقمته أى عند $X = \mu = 0$ لذلك فإن هذا العمود يجزئ المنحنى الطبيعى القياسى إلى قسمين متماثلين فى الشكل والمساحه.
3. يشبه الناقوس من حيث الشكل.
4. المنحنى له نقطتا إنقلاب عند $X = \pm 1$
5. المساحه الكليه تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح .
6. نظرا لتطابق جانبيه وتوسط تفرطحه فإن مقاييس النزعه المركزيه الثلاثه (الوسط الحسابى والوسيط والمنوال) تلتقى فى نقطه واحده (فى منتصف التوزيع) أى أن الوسط الحسابى = الوسيط = المنوال = 0
7. نلاحظ أن 99.7% من قيم المتغير تقع تقريبا فى الفتره (3 ,3−) أى أنه نادرا ما نجد قيمه من قيم X خارج هذه الفتره. كما أن 95.5% من قيم المتغير X تقع فى الفتره (2, 2−) وأن% 68 منها تقع فى الفتره(1,1−)

ويمكن حساب إحتمال وقوع Z فى أى فتره تريدها وذلك بإيجاد قيمه تكامل داله الكثافه الإحتماليه فى هذه الفتره أى بإيجاد المساحه المحصوره تحت منحنى هذه الداله داخل هذه الفتره ولان متوسط التوزيع الطبيعى القياسى دائما يساوى صفر وتباينه يساوى واحد فقد تم عمل جدول يعطى إحتمالات وقوع المتغير Z فى فتره معينه .

فمثلا يمكن بواسطه الجدول رقم (1) حساب الإحتمال $p(1 \le Z \le 2)$. والجدول يعطى إحتمال وقوع Z بين الصفر وأى قيمه موجبه Z أى يعطى $p(0 \le Z \le z)$ وهى المساحه المظلله فى الشكل الآتى:−



ملاحظات:

1. $P(-\infty \leq Z \leq \infty) = 1$
2. $P(Z \leq 0) = P(Z \geq 0) = 0.5$

نشاط موضعي

إذا كان Z متغير عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعى القياسى فأوجدى

1. $P(Z \leq 1.54)$
2. $P(-1.8 \leq Z \leq 0)$
3. $P(1 \leq Z \leq 2)$

الحل

1. **$P(Z \leq 1.54) = 0.9382$**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505

2. **$P(-1.8 \leq Z \leq 0)$**

$$= P(Z \le 0) - P(Z \le -1.8)$$

$$= 0.5 - 0.359$$

$$= 0.4641$$

z	0.00	0.01	0.02
0.0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
0.2	0.5793	0.5832	0.5871
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	0.6985

z	0.00	0.01
−3.4	0.0003	0.0003
−3.3	0.0005	0.0005
−3.2	0.0007	0.0007
−3.1	0.0010	0.0009
−3.0	0.0013	0.0013
−2.9	0.0019	0.0018
−2.8	0.0026	0.0025
−2.7	0.0035	0.0034
−2.6	0.0047	0.0045
−2.5	0.0062	0.0060
−2.4	0.0082	0.0080
−2.3	0.0107	0.0104
−2.2	0.0139	0.0136
−2.1	0.0179	0.0174
−2.0	0.0228	0.0222
−1.9	0.0287	0.0281
−1.8	0.0359	0.0351
−1.7	0.0446	0.0436

$P(1 \le Z \le 2)$ .3

$$= P(Z \le 2) - P(Z \le 1)$$

$$P(1 \le Z \le 2) =$$

$$= P(Z \le 2) - P(Z \le 1)$$

$$= 0.1359$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927

حساب الاحتمالات في حالة التوزيع الطبيعي العادي

إذا كانت X تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ و تباينه σ^2 و أردنا حساب أي احتمال حول المتغير X فإننا نحوله أولاً إلى متغير يتبع التوزيع الطبيعي القياسي

إذا كانت $X \sim N(\mu , \sigma^2)$ فإن $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

و على ذلك يمكن حساب الاحتمال $P(a < X < b)$ كما يلي :

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

و هذا الاحتمال الأخير يمكن الحصول عليه من جدول التوزيع الطبيعي القياسي

تطبيق :

إذا كانت أطوال مجموعه من النباتات تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 168 سم و انحرافه المعياري 6 سم. أخذنا عشوائياً أحد النباتات. ما هو احتمال أن يكون طوله :

1. أقل من 159 سم؟
2. أكبر من 180 سم؟
3. واقعاً في الفترة(165 ، 174) ؟

الحل

1. أقل من 159 سم

إذا جعلنا X ترمز لأطوال النباتات, فإن X تكون متغيراً عشوائياً يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 168 سم

وانحرافه المعياري 6 سم.

$$P(X \le 159) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{159-168}{6}\right)$$
$$= P(Z \le -1.5)$$
$$= 0.0668$$

z	0.00	0.01	0.02
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778

2. أكبر من 180 سم؟

$$P(X \ge 180) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \ge \frac{180-168}{6}\right)$$
$$= P(Z \ge 2)$$
$$= 1 - P(Z \le 2)$$
$$= 1 - 0.9772$$
$$= 0.0228$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869
1.3	0.9032	0.9049
1.4	0.9192	0.9207
1.5	0.9332	0.9345
1.6	0.9452	0.9463
1.7	0.9554	0.9564
1.8	0.9641	0.9649
1.9	0.9713	0.9719
2.0	0.9772	0.9778
2.1	0.9821	0.9826
2.2	0.9861	0.9864

3. واقعاً في الفترة(165 , 174)؟

$$
\begin{aligned}
&P(165 \le X \le 174) \\
&= P\left(\frac{165-168}{6} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{174-168}{6}\right) \\
&= P(-0.5 \le Z \le 1) \\
&= P(Z \le 1) - P(Z \le -0.5) \\
&= 0.8413 \quad - \quad 0.3085 \quad = \quad 0.5328
\end{aligned}
$$

z	0.00	0.01
−3.4	0.0003	0.0003
−3.3	0.0005	0.0005
−3.2	0.0007	0.0007
−3.1	0.0010	0.0009
−3.0	0.0013	0.0013
−2.9	0.0019	0.0018
−2.8	0.0026	0.0025
−2.7	0.0035	0.0034
−2.6	0.0047	0.0045
−2.5	0.0062	0.0060
−2.4	0.0082	0.0080
−2.3	0.0107	0.0104
−2.2	0.0139	0.0136
−2.1	0.0179	0.0174
−2.0	0.0228	0.0222
−1.9	0.0287	0.0281
−1.8	0.0359	0.0351
−1.7	0.0446	0.0436
−1.6	0.0548	0.0537
−1.5	0.0668	0.0655
−1.4	0.0808	0.0793
−1.3	0.0968	0.0951
−1.2	0.1151	0.1131
−1.1	0.1357	0.1335
−1.0	0.1587	0.1562
−0.9	0.1841	0.1814
−0.8	0.2119	0.2090
−0.7	0.2420	0.2389
−0.6	0.2743	0.2709
−0.5	0.3085	0.3050
−0.4	0.3446	0.3409

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869