المحاضرة السابعة: نظرية المجموعات الأزمة والحلول

تمهيد:

منذ حصول أزمة الأسس في الرياضيات والرياضيون والمناطقة يعملون على إيجاد حل لهذه المشكلة، خاصة بعد دخول فكرة المجموعة ميدان التحليل، أين لوحظ أن بعض الدوال تقبل التحديد إلا عندما يكون المتغير عددًا صحيحًا، هنا ظهرت فكرة معالجة مجموع القيم التي يمكن أن تعطى للمتغير، وبالتالي فكرة النّظر إلى قيم الدّالة كمجموعة، فكان من نتيجة ذلك أنه من المفيد لدراسة الدّوال الانصراف لدراسة المجموعات، فاتسعت هذه الدّراسة وتطورت حتى أصبحت الرياضيات كلها ترد إلى نظرية المجموعات، فما هي طبيعة نظرية المجموعات؟ وهل استطاعت تقديم حلول لأزمة الأسس؟ وما أهم المصاعب التي واجهتها؟

1- نظرية المجموعات:

لقد أدى تطور الفكر الرياضي إلى ظهور أزمة في الرياضيات كما قلنا، وقد كانت هذه الأزمة سببًا في خلق قلق واضطراب لدى الرياضيين، فانصبت الجهود في العمل على تجاوز هذه الأزمة، ومختلف الآثار التي ترتبت عنها، ومن بين هذه الجهود تلك المحاولة القيمة التي قام بها عالم الرياضيات الألماني ذو الأصول الروسية جورج كانتورG.Cantor(1845-1918) في أوائل الثمانينيات من القرن الماضي1880، وتعتمد هذه النّظرية على مفاهيم أساسية هي المجموعة، العنصر، ينتمي، كمعاني أولية تتأسس عليها نظرية المجموعات، دون حاجة إلى البحث عن معاني هذه الأوليات، لكن يجب احترام العلاقات القائمة بينها، بما أن المجموعة تتألف من عناصر، لكن لابد أن يكون كل عنصر من عناصر المجموعة واضح بذاته، متميزًا عن العناصر الأخرى، كما أن انتماءه إلى المجموعة يجب أن يكون انتماءً واضحًا[1].

لقد وفرت هذه النظرية للرياضيات المعاصرة مفاهيم جديدة، حيث أصبح واضحًا بأن الكثير من المجموعات لها نهاية، وبالتالي قللت من خطر مشكلة اللا"ذهائي التي هددت أسس الرياضيات بأكملها، ودفعت بها إلى الوقوع في أزمة، لكن مع نظرية المجموعات أصبح الرياضيون بإمكانهم قياس وحساب ومقارنة عناصر المجموعات، ولم يعد اللانهائي مطروحًا في المجموعة المعرّفة، فإذا كان اللانهائي قد لعب دورًا كبيرًا في حل الكثير من مشكلات الإنسان الميتافيزيقية، وعلى رأسها مشكلة

الإلاه، التي كانت فكرة اللانهائي مهربًا للفلاسفة والمفكرين في وصفه، بما أنه الأزلي والأبدي، فإن هذه الفكرة خلقت مشكلات في الرياضيات وجب العمل على تجاوزها[2].

إن جعل عناصر المجموعة منتهية يساعدنا في حصر مفهومها، لكن إذا كانت عناصر المجموعة كبير جدًا فيمكن اللجوء إلى طريقة التّناظر[3]، أو ما يسمى بعلاقة التشابه، ومعناه أن المجموعتين المتشابهتين لديهما نفس العدد من العناصر، أي عندما توجد علاقة واحد بواحد، نعمل على استنفاذ عناصر المجموعة الأولى بربطها بما يقابلها من المجموعة الثانية[4]، فالترابط طريقة بها يمكن حسب برتراند راسل أن تتولد عنها متسلسلات أخرى، فإذا وجدت أي متسلسلة علاقتها المولدة ق، ووجدت علاقة واحد بواحد تقوم بين أي حد س من المتسلسلة وبين حد آخر نسميه س ع، فإن فصل الحدود س ع يكون متسلسلة من نفس الصنف كفصل الحدود س[5]، وبذلك نقضي عن المجموعات الشاردة التي يصعب التحكم فيها، وتصبح المجموعة اللانهائية هي تلك المجموعة التي تحتوي على عناصر مثلما تحتوي المجموعة الصحيحة، وعلى هذا الأساس كان كانتور قادرًا على أن يبني نظرية رياضية عن الأعداد اللامتناهية بلغت الدرجة القصوى من التشويق، وبذلك أدخل في نطاق المنطق الدقيق مجالا بأسره كان متروكًا من قبل للتموه والتشويش[6].

2- مصاعب نظرية المجموعات:

لكن بالرغم من النجاح الأولي الذي عرفته نظرية المجموعات، من حيث قدرتها على تجاوز أصعب مشاكل الرياضيات العليا، كما أنها فسحت من مجال نظرية الأعداد وذلك بإضافة الأعداد الأعداد اللامتناهية مع الأعداد الصحيحة، إلا أن ذلك لم يمنع من تعرضها إلى الكثير من الصعوبات والعوائق التي هددت يقينها ومصداقيتها، ومن بينها مشكلة النّقائض Les paradoxe[7]، ومن بين النقائض التي اعترضت نظرية المجموعات نجد نقيضة بورالي فورتي B.Forti التي كشف عنها سنة 1895م، حيث قدم نقيضته لإحدى قواعد نظرية المجموعات، وهي تلك التي تتحدث عن ترتيب الأعداد اللانهائية، والتي يميز فيها كانتور بين الأعداد العادّة (أي التي نعد بها) والأعداد الترتيبية (نفس الأعداد مرتبة ترتيبًا تصاعديًا أول، ثان، ثالث...) فإذا كانت لدينا مجموعة من الطلبة، أمكننا عدها بادئين بهذا أو ذاك، فالمهم هو معرفة عدد الطّلبة، وليكن 30، أما إذا أجرينا اختبارًا ما على هؤلاء الطّلبة فإننا ندرج أسماءهم في لائحة حسب الاستحقاق، الأول، الثاني... إلى الثلاثين، وبذلك يصبح لدينا نوعين من الأعداد: أعداد عادّة وأعداد ترتيبية، الأولى تدل على الكم والثانية تدل على الترتيب[8].

وهناك نقيضة أخرى كشف عنها برتراند راسل سنة 1901م، وتتعلق بمجموعة جميع المجموعات أو ما يسميها بفئة الفئات، وهو الذي صاغ سؤالا حولها، صيغته: هل توجد مجموعة جميع المجموعات؟ أي هل توجد مجموعة رئيسية تتضمن ذاتها وغيرها في نفس الوقت؟[9] هذا التساؤل ظل مصدر حيرة بالنسبة للرياضيين.

تعتبر نظرية المجموعات من المحاولات الجادة لتجاوز أزمة الأسس، غير أنها احتاجت بدورها إلى أسس، ومن هنا وجد تفكير جديد متجاوز لما تشتغل به الرياضيات عادة، يحاول إيجاد حلول لهذه الإشكاليات، وبذلك وجدت مباحث ما بعد الرياضيات، ومن بين مكوناته تلك المذاهب الفلسفية التي كونت فلسفة الرياضيات[10]، ومن بين هذه الاتجاهات الاتجاه المنطقي والاتجاه الأكسيوماتيكي، والاتجاه الحدسي، التي حاول كل منها إيجاد حلول للمشكلة العويصة التي وقعت فيها الرياضيات المعاصرة.

3- الحلول المقدمة لنظرية المجموعات:

إن الأزمة التي وقعت فيها الرياضيات عملت على إثراء مباحثها وتنوع فروعها، فحين بدأت الأزمة مع المسلمة الخامسة لإقليدس، والمتعلقة بالمتوازيات، لتمتد إلى باقي الأسس ومن بينها حدس الإتصال، نتج عنها ظهور أنساق جديدة استطاع كل منها إثبات مقدرته على تحقيق التناسق الداخلي وعدم وقوعه في التّناقض، لكن عادت الرياضيات وطرحت بتطورها مشكلات جديدة بل أكثر حدة، مما جعلها تعيد مراجعة نفسها والأسس التي بنيت عليها مبادؤها، فظهرت ثلاثة نظريات في فلسفة الرياضيات، كل منها تصور حلولا للمشكلة المطروحة.

أولا: النزعة المنطقية:

مع نهاية القرن 19م بالمشكلات المدوية التي عرفتها الرياضيات، وعلى رأسها مشكلة المفارقات التي وقعت فيها نظرية المجموعات جعل ذلك الرياضيون يبحثون في ماضيهم عن أساس متين تقوم عليه أنساقهم، ويحفظ الصرح الذي بنوه من الوقوع في الخطأ، فكان المنطق سبيلهم إلى ذلك، كان ليبنيتز أول من لفت الانتباه إلى ذلك التماثل الموجود بين الرياضيات والمنطق، بما أن كلاهما ينطلق من مقدمات ليصل إلى نتائج، ولذلك انصب جهده على البحث عن المفاهيم المنطقية التي ترد إليها البديهيات الرياضية، كما عمل على عملة كخطوة ثانية على رد تلك الرموز في الأبحاث المنطقية إلى

أصول الفكر، ليخلص في مرحلة ثالثة إلى رد العمليات العقلية الاستدلالية إلى الرياضيات باعتبارها نوع من أنواع الحساب، الشيء الذي يجعل المنطق جزء من العمليات الجبرية[11].

لكن الغريب أن لايبنيتز حسب روبير بلانشي لم يكن واعيًا بالقيمة العلمية للعمل الذي قدمه، لأن جهده كان موجه إلى توسيع وتحليل المنطق الكلاسيكي، فكأنه كان ينظر إلى المنطق باعتباره هو من يعاني مشكلات تطورية، ولذا فهو بحاجة للفكر الرياضي ليقدم له حلولا، مما جعل العمل الذي قدمه في اللوجستيك يشبه العمل الذي قدمه أرسطو في مجال المنطق الكلاسيكي[12]، مع أنه ابتعد كثيرًا عن أرسطو، لأنه يؤول التصور تأويلاً ماصدقيًا على غرار الفلسفة المدرسية في عهد انحطاطها، وينتهي إلى تأسيس منطق عام هو عنده العلم بعينه، ولهذا اعتبر ليبنيتز أن المنطق لا يجب أن يكتفي بمراقبة العلم والاعداد له، بل إنه يولده بتوليده لجميع التركيبات المعقولة التي تحصل للتصورات، وهي تركيبات لا متناهية العدد يمكن الحصول عليها سريعًا وبدون خطأ، بوسائل آلية مجموعها يكون (فن التّركيب)، فيصبح العلم بهذا لغة عالمية، ترتبط بمنطق صوري آلي ما صدقي رمزي[13]، وبهذا رد ليبنيتز الاعتبار للمنطق الصوري بعدما تعرض للهجر والنسيان، حتى أن أسسه كانت مجهولة لدى فلاسفة كبار في ذلك العصر، من أمثال ديكارت[14].

واستمرت بعد ليبنيتز جهود الرياضيين المناطقة في نفس المجال، ومن بين هذه الجهود يمكن ذكر هنا ذلك العمل الجبار الذي قام به برتراندراسل وساعده في ذلك زميله هوايتهد، حيث حاولا أن يضعا نسقًا متكاملاً لهذه النظرية[15]، وملخص هذا العمل يتمحور حول رد الرياضيات إلى أصول منطقية من أجل تجاوز كل تلك المشكلات التي طرحتها الرياضيات المعاصرة.

ومن أهم النقاط التي ركز عليها راسل في عمله، حساب الأعداد والقضايا، الأصناف، والعلاقات...

ثانيا: النزعة الحدسية:

يرى الحدسيون ومن بينهم بوانكاري Poincaré ولوبيغ Lebesge وبير Baire وبوريل Borel أن الرياضيات لا يمكن اشتقاقها من المنطق، وإذا عملنا بما قالته النزعة المنطقية فإن الرياضيات تصبح بذلك جزء من المنطق ولا يشكل أساسًا لها[16]، لأن الرياضيات تحتاج إلى مادة في مقابل الصورة، تحتاج إلى تجربة من نوع خاص في الحدس التجريبي، وهذا يؤكد حضور العالم الحسي الذي نتعامل معه في الاستدلالات الرياضية، لذلك كان تركيزهم على الهندسة، بما أنها علم الأشياء المكانية وإليها

يرجع أصل الرياضيات، وعملوا على إلحاق العدد والحساب بالجانب الهندسي، بما أن الهندسة تتمتع بدقتها وشمول نظرياتها، عكس الحساب أو الجبر الذي حلق بنا في عالم مجهول وأتى لنا بكائنات رياضية لا يمكن تفسير مصدرها ولا فهم مبتغاها، على شاكلة الأعداد الصماء Incommensurables[17]، لذلك يتطلب وجود معرفي ووجود أنطولوجي للكائنات الرياضية.

لذلك نجد بوانكاري عمل على تقسيم الرياضيين إلى قسمين، إلى رياضيين مناطقة ورياضيين حدسيين، أما المناطقة فهم الذين سماهم تحليليون، بينما الصنف الثاني فسماهم هندسيون، وتاريخيًا يبين لنا تاريخ الرياضيات بأن الحدسيين أو الذين يغلبون العمل الهندسي في عملهم الرياضي هم من يتصدرون لائحة الاكتشاف في الرياضيات، كما هو الشأن لدى إقليدس، وريمان، ولوباتشوفسكي، بل إن المعتمدين على الحدس يمكن تقسيمهم إلى ثلاثة أقسام:

أ- حدسيون حسيون: وهم الذين يستعملون الحواس والخيال.

ب- الحدس الاستقرائي: حيث اعتبر بوانكاري أن الاستدلال الرياضي هو نوع من أنواع الاستقراء، أو ما يسمى الاستدلال التكراري.

ت- حدس العدد الخالص: وهو الذي نحد به الصور المنطقية، ويقابله حدس البداهة عند ديكارت، هذا الحدس الذي بإمكانه أن يخلق البرهان الرياضي الحقيقي، وهو الحدس الوحيد الذي وثق فيه بوانكاري، لأنه لا يستطيع أن يخدعنا، وبإمكانه توصلنا إلى الدقة المطلقة، على عكس النوعين السابقين اللذين لا يمكن الوثوق بهما[18].

ثالثا: النزعة الأكسيومية:

تؤكد هذه النظرية بأنه يمكن التغلب على مشكلة الأسس دون التضحية بأي شيء من مكونات الرياضيات الكلاسيكية، وهذا ما أشار إليه زيرميلو Zermelo فلا نلجأ بذلك إلى تعقيدات منطقية كما فعل راسل، لأن كل منهما علم قائم بذاته، إلا أنهما متوازيان لأنهما نبعا من منبع واحد، باعتبار أن كلاهما يعتمد على الأكسيوماتيك الذي يضمن لهما الصورية وعدم الوقوع في التناقض الدّاخلي[19]، ووسيلة ذلك هو الانطلاق من مسلمات تسمح بتحديد مفهوم المجموعة بشكل لا يسمح بدخول المجموعات المتناقضة معها، وبذلك ننشئ جميع المجموعات الضرورية[20].

وقد سار كل من المنطق والرياضيات على هذا المنوال، أي إقامة نظامهما على هيئة نظرية استنباطية حينما استطاع المنطق أو استطاعت الرياضيات أن تتشكل على هيئة نظرية استنباطية، كانت نظرية جبر المنطق تضع الأصول الأولى في هيئة جبرية، وكانت النّظرية اللوجستيقية تضع أصولها الأولى في هيئة منطقية ومن هنا كانت الصلة بين العلمين كل بجزء أو صلة جزء بكل[21].

كما يتفق الحدسيون على رفض مبدأ الثالث المرفوع، لأن نقائض المجموعات كلها ترجع إلى مبدأ الثالث المرفوع الذي يقرر أن القضية إما صادقة وإما كاذبة، فلا مكان لقيمة ثالثة، وهذا ما يحرم الرياضيات من قبول احتمالات جديدة كحلول للقضية المطروحة، وبذلك فالمهم عند هذه النظرية هو الشكل العام الذي يبنى عليه النسق، ولا يهم المحتوى لأنه مجرد رموز إسمية ومن ثمة تكون صورية خالصة منها تشتق الرياضة والمنطق معًا، وهذه الحدود الحدود أو المسلمات الأولية سماها هلبرت بالأكسيوماتيك، والذي وضع له ثلاثة شروط أساسية:

أولا: شرط الاستقلالية: ومعنى ذلك أن مسلمات النسق مستقلة عن بعضها البعض.

ثانيا: شرط الإشباع: بحيث تكون مبادئ النسق كافية لإجراء عمليات الاستنباط.

ثالثًا: شرط عدم التّناقض: رغم تضمنه في الشرطين السابقين، إلا أنه أساسي حتى يستقيم النسق، ولا تقع المبادئ التي انطلقنا منها في تناقض.

وبذلك نحقق شروط النسق التي يغلب عليها الطابع الصوري، لأنه يعتمد على مسلمات إسمية فقط، وهو إن اختلف عن سابقيه في عدم اشتقاق الرياضيات من المنطق إلا أنه فيما يخصص أسس المنطق لا يختلف عن اللوجستيكا كل الاختلاف[22].

بعد عرض أهم النظريات التي حاولت تقديم حلول لأزمة الأسس التي عرفتها الرياضيات، يمكن القول أن هذه الأزمة لم تعد تطرح اليوم بنفس الحدة التي شهدتها بعيد ظهورها، وعمل الرياضيون على تجاوز هذه المشكلة وذلك بتأسيس علمين جديدين هما "مابعد الرياضيات" وعلم "مابعد المنطق" أوكلت لهما معالجة هذه المسائل، وأصبح الأكسيوم هو الصياغة المسيطرة على الرياضيات المعاصرة.

[1]هوامش المحاضرة:

[1] محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 95.

[2] زبيدة مونية بن ميسي، فلسفة الرياضة عند جون كافييس، أطروحة دكتوراه، تحت إشراف زواوي بغورة، قسم الفلسفة، جامعة منتوري، قسنطينة، 2008، ص 41.

[3] محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 96.

[4] برتراند راسل، مدخل إلى فلسفة الرياضيات، ترجمة عبد اللطيف الصديقي، التكوين للتأليف والترجمة والنشر، ط 1، دمشق، 2009، ص 42.

[5] برتراند راسل، أصول الرياضيات 3، ترجمة محمد مرسي أحمد و أحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف، ط2، مصر، ص 86.

[6] برتراند راسل، تاريخ الفلسفة الغربية، ترجمة محمد فتحي الشنيطي، دار المعارف، مصر، 2002، ص 491.

[7] المفارقة تعني كل ما يعارض الرأي المسلم به عموما للتوقع والاحتمال. (أنظر: أندري لالاند، الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص 935.)

[8] محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 99.

[9] زكرياء المنشاوي الجالي، نظرية الأعداد عند راسلدار الوفاء لدنيا الطباعة والنشر، ط1، مصر، 2010، ص 96.

[10] دليل أكسفورد، ترجمة نجيب الحصادي، مرجع سابق، ص 432.

[11] محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 104.

[12] روبير بلانشي، المنطق وتاريخه منذ أرسطو حتى راسل، ترجمة خليل أحمد خليل، دار المطبوعات الجامعية، لبنان، ص ص 259-260.

[13] جول تريكو، المنطق الصوري، ترجمة محمود يعقوبي، ديوان المطبوعات الجامعية، د.ط، د.ت، ص 46.

[14] بوخنسكي، الفلسفة المعاصرة في أوربا، ترجمة عزت قرني، المنظمة العربية للترجمة، الكويت، ص 44.

[15] علي عبد المعطي محمد، مقدمات في الفلسفة، دار النهضة العربية، د.ط، لبنان،1985 ، ص 240.

[16] محمد مهران، المنطق، دار المعارف، القاهرة، د.ط،د.ت، ص 41.

[17] محمد عزيز نظمي سالم، المنطق الحديث وفلسفة العلوم، مؤسسة شباب الجامعة، مصر، 1992، ص 60.

[18] علي بوقليع، العقلانية المعاصرة عند روبير بلانشي، أطروحة دكتوراه، إشراف زواوي بغورة، قسم الفلسفة، جامعة قسنطينة، 2006، ص 152.

[19] محمد عزيز نظمي سالم، المنطق الحديث وفلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 59.

[20] محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص118.

[21] علي عبد المعطي محمد، مقدمات في الفلسفة، مرجع سابق، ص 182.

[22] محمد ثابت الفندي، أصول المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص 107