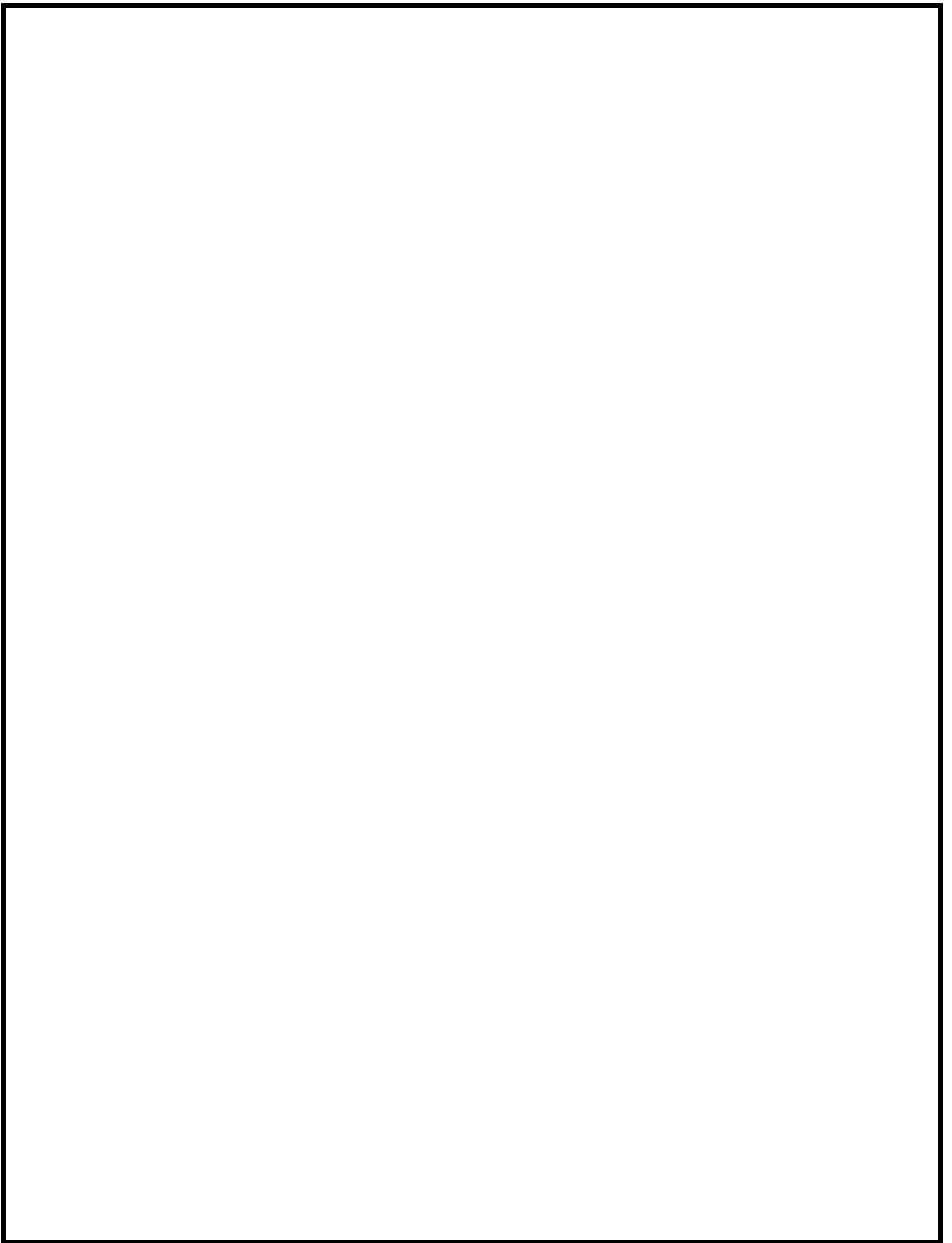




# نظريّة النسبيّة العامّة

لأنشتاين

جلال الحاج عبد



## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله على آلائه و نعمائه و الصلاة و السلام على نبيه المختار و آل بيته الأطهار. يسرني و يسعدني أن أقدم دراسه مختصره على أهم أنجاز علمي يعتبر من مفاخر البشريه ألا و هو نظرية النسبية العامة. إن لهذه النظرية مكانة مرموقة عند متخصصيها و جاهليها، و ذلك يرجع للحس المشترك عندهم بعظمتها. أسأل الله عزّ و جلّ أن يوفقتي ببيانها و يوفقكم باستيعابها. كتبت هذا الكتاب بعجلة حيث كنت أخشى المنية كل لحظة، و أنا أشعر بأن هذا الكتاب أمانة عليّ أدائها.

لو إن الإضطرابات الفلسفيه هي حصيلة التوهّمات، فعلينا بنظام لغوي جديد، نظام ليس للتجديد فحسب و إنما لترقي الإدراك لأعلى مستوياته، و كل من يسعى لكهذا النظام عليه أن يستعد لمقاومة منتقديه[1]، كالمقاومة التي واجهتها جميع الأنقلابات العلمية. ناتج الأنقلاب على الهندسه و الحساب في تاريخ العلم هو حكومة نظرية النسبيه التي جاءت بدولة الفلسفة الحديثة ... لا يمكن النظر لنظرية النسبيه نظرة منقطعه عن مقاومة مسلمات التوازي أمام الهندسه، ولا عن المبارزه التي خاضتها الأعداد الخيالية أمام الحساب.

أكثر القوانين الفيزيائية و العلميه جاءت إلهاماً من الطبيعة أو منطبقه على الظواهر الطبيعية، إلا قوانين فيزياء النسبيه فجاءت مغايرة لقوانين الطبيعة و إبتعدت كل البعد عن الطبيعة و ظواهرها، و لولا الأرضيه الهندسيه و الفلسفيه التي و ضعتها الهندسه الهذلوليه و البيضويه و الأعداد الخياليه لما تمكن أنشتاين من وضع هذه النظرية و بسطها. فالهندسه الهذلوليه كانت النموذج النظري لهذه النظرية و الهندسه البيضويه كانت النموذج العملي لها.

كل من يسعى لبرهان قضية رياضيه سوف يقع في فلسفة الرياضيات، كما هو الحال مع من يتعامل مع مبدأ اللا وثوقية لهيزنبرغ فسوف يقع في فلسفة الفيزياء[1]. لذلك، لايمكن فصل الفلسفة عن نظرية النسبية بشقيها العام و الخاص، و بما أن هذا الكتاب يتناول النسبية العامة لذلك ألقينا النظرة الفلسفية لأهم مفهومي فلسفيين هما: المكان و الزمان، و هذان المفهومان هما المحوران الرئيسيان في نظرية

النسبية العامة فلسفياً و فيزيائياً و رياضياً. قبل نظرية النسبية العامة كانا هذان المفهومان منفصلان حتى قامت هذه النظرية بربط كل منهما بالآخر رياضياً و فيزيائياً و فلسفياً. هناك بعض الآراء الفلسفية قبل نظرية النسبية تقرّ بوحدة المكان و الزمان لكن كانت تفتقد للبراهين العلمية. فالعقلية المهيمنة على هذان المفهومان قبل ظهور النسبية العامة و حين ظهورها هي عقلية كانتيه، يصعب التفكير بما هو ليس بكانتي. حيث كان يعتقد كانت بعدم إمكان تصور هندسة لا إقليديه، و ساد التصور هذا على جميع تصوراته، لذلك يمكن القول بأن لباتشفسكي و غاوس و بوليائي قدّ صنعوا عالماً جديداً تخطى كل تصورات كانت، من ثم وضع أنشتاين نظريته في هذا العالم.

باعتقاد لباتشفسكي أي فرع من فروع الرياضيات مهما كان مُجرد، لابد و إن يستخدم يوماً في ظواهر العالم الواقعي [1]. فالنسبية العامة ظهرت تناطح أقوى نظريات عصرها، الكانتية في المكان و الزمان و النيوتنية في الفيزياء، و الإقليديه في الهندسه. ظهرت النسبية العامة بهيئة نظريه تتخطى المؤلف و المعروف من الذره الى المجره. إستعانت نظرية النسبيه العامه بأهم إنجازات عصرها في الرياضيات و هي الهندسه الهذلوليه و البيضويه و حساب التنسور و السطوح الريمانيه، فالقدره الرياضيه العاليه الموجوده وراء النسبيه العامه جعلت هذه النظرية تأخذ شأناً تجاوز مكانها و زمانها !

من الإجحاف البحث في نظرية النسبيه العامه بعيداً عن الهندسه الهذلوليه و مفاهيمها. وجود فصل حول الهندسه الهذلوليه يُهيئ الأرضيه لإستيعاب مفاهيم ونتائج النسبيه العامه. عندما نبرهن على قضايا في الهندسه الهذلوليه لا يمكن البرهان عليها في الهندسه الإقليديه، و عند مطالعة نموذج بلترامي – كلاين و كيف يأخذ الطول (المستقيم) في هذا النموذج تعريفاً مغايراً للطول المؤلف عليه، و عند التعرف على رباعي أضلاع لامبرت (رباعي أضلاع مجموع زواياه الداخليه أقلّ من ثلاث مائة و ستون درجه) تنهيئ الأرضيه لطرح النتائج النظرية، لنظرية النسبيه كإنكماش الطول و إتساع الزمن و تقوس الفضاء و ...

يبحث هذا الكتاب بعض أهم مواضيع النسبية العامة، كالمواضيع التاريخية و الفلسفية و الرياضية و الفيزيائية حيث يبدأ بالمفهوم الفلسفي للفضاء و الزمان و المكان ثم الهندسة الهذلولية و النسبية الخاصة ثم النظرية النسبية العامة. المفاهيم الرياضيه التي يستعان بها في هذه النظرية هي مفاهيم و روابط معقدة و ممله لكن سعيت كل السعي لأعطي الوجه الأبسط لهذه الروابط و إستعنت بمصادر تشرح و تبين هذه النظرية بصورة مبسطه و عمليه، و قدّ قمت بتوحيد الحروف في روابط هذه المصادر و كذلك توحيد كتابة هذه الروابط ، طريقة طباعة المعادلات التنسوريه تختلف بين مصدر و آخر، و كتابة المعادلات و الروابط بطرق مختلفه يؤدي الى الإلتباس و ربما سوء فهم الموضوع. لذلك تعمدت على توحيد الروابط و الحروف المستخدمة في طباعة هذه الروابط. في أكثر المصادر التي طالعتها، الحروف في طباعة معادلات النسبية العامة متشابهة و قريبة من بعضها و هذا يجعل القارئ المبتدأ ينفّر هذه المعادلات و ربما يترك مطالعة الموضوع، لذلك طبعت هذا الكتاب بيدي و كأني أواجه طالب مبتدأ في مطالعة النسبية العامة، كذلك لن أرقم المعادلات و الروابط و ذلك للأبتعاد عن دوامة الرجوع للمعادلات السابقه، و المعادله الضرورية كتبتهأ ثانية. هناك فصل مستقل لبعض الأمثله المحلوله هي بمثابة تمارين في النسبية العامة، تساعد على فهم المواضيع المرتبطة بها، كذلك ختمت الكتاب بمسرد لبعض أهم إصطلاحات النسبية العامة.

تناولت المكتبه العربيه نظرية النسبيه الخاصه من جوانب عديده لكنها أهملت نظرية النسبيه العامه حتى أصبحت حكرأ على متخصصيها، لذلك ما دخلت في تفاصيل نظرية النسبيه الخاصة و ما أعطيت أمثله عليها و أكتفيت ببعض مفاهيمها و نتائجها. أخذت أكثر نتائج النسبية عند الكثير من محبيّ هذه النظرية بعدأ فلسفياً تجاوز أبعادها الأخرى، و أصبحت هذه النظرية و بالأخصّ النسبيه الخاصه مقولة فلسفيه أكثر من ما هيه نظريه رياضيه و فيزيائيه، لذلك أخذت جانب الحيطه عند هذه النظرية و أكتفيت ببعض مفاهيمها الرياضيه، لتهيئة الأذهان لأستيعاب النسبية العامة.

يمكن أن يسأل القارئ هل هذا الكتاب هو نسبية أنشتاين أم كانت؟ بالطبع هو نسبية أنشتاين، لكن العقليه الفلسفيه المهيمنه في زمن ظهور هذه النظرية هي عقليه كانتيه، و الميكانيك نيوتني، و الهندسه إقليديه. فلكانت في الفلسفة نفس السهم لنيوتن في الفيزياء و نفس السهم لإقليدس في الهندسة، فهي إذن ليست نسبية كانت و لا نسبية نيوتن و لا نسبية إقليدس، هي نسبية أنشتاين. لا يمكن الخوض في النسبية العامة

دون الغوص في مفهوم الزمان و المكان، و بما أن الزمان و المكان يشكلان نقطة الأرتكاز في فلسفة كانت، و قد ناقشهما من أوجه عديده ما يناسب معظم جوانب النسبية العامة، (كما ستلاحظون)، لذلك ألقيت الضوء على نظريات كانت في الزمان و المكان، و قد أضاء هذا الضوء بعض النظريات الأخرى. لقد تعمدت بأن لا أدخل بالمفهوم الوجودي للزمان و المكان (ما تجاهلته) و ذلك للحفاظ على روح و حقيقة النسبية العامة كحقيقة علمية، فيها الخيال و الميتافيزيقا ضرباً من الواقع.

هذا الكتاب هو نظرية النسبية العامة من منظرها أنشتاين و الذين ساهمو في نموها و بسط مفاهيمها أمثال نيوتن ،كانت ،أرنست ماخ ، غاوس، لباتشفسكي، ريمان، شوارتزشيلد، فريدمان. و للأمانه التاريخيه أقول: لقد لعبت أفكار ريمان الرياضية دوراً هاماً في نموّ و تطور مفاهيم النسبية العامة، و بنظري ريمان قدّ قاب قوسين أو أدنى من نظرية النسبية العامة كذلك بوانكاريه .

ينظر هذا الكتاب لنظرية النسبية العامه نظرة رياضية و فلكيه، و قدّ غضيت النظر عن البحث في مجالها الذريّ، و الكوانتمي، و الكهرومغناطيسي، و ذلك لتأثري الشديد برياضياتها و نتائجها الفلكيه. و هذا الكتاب يشمل هذه النظرية و النظريات المرتبطة بها من مُنظريها، و لم أضف شيئاً إليها و إن كانت لديه بعض النظرات و التحفظات عليها.

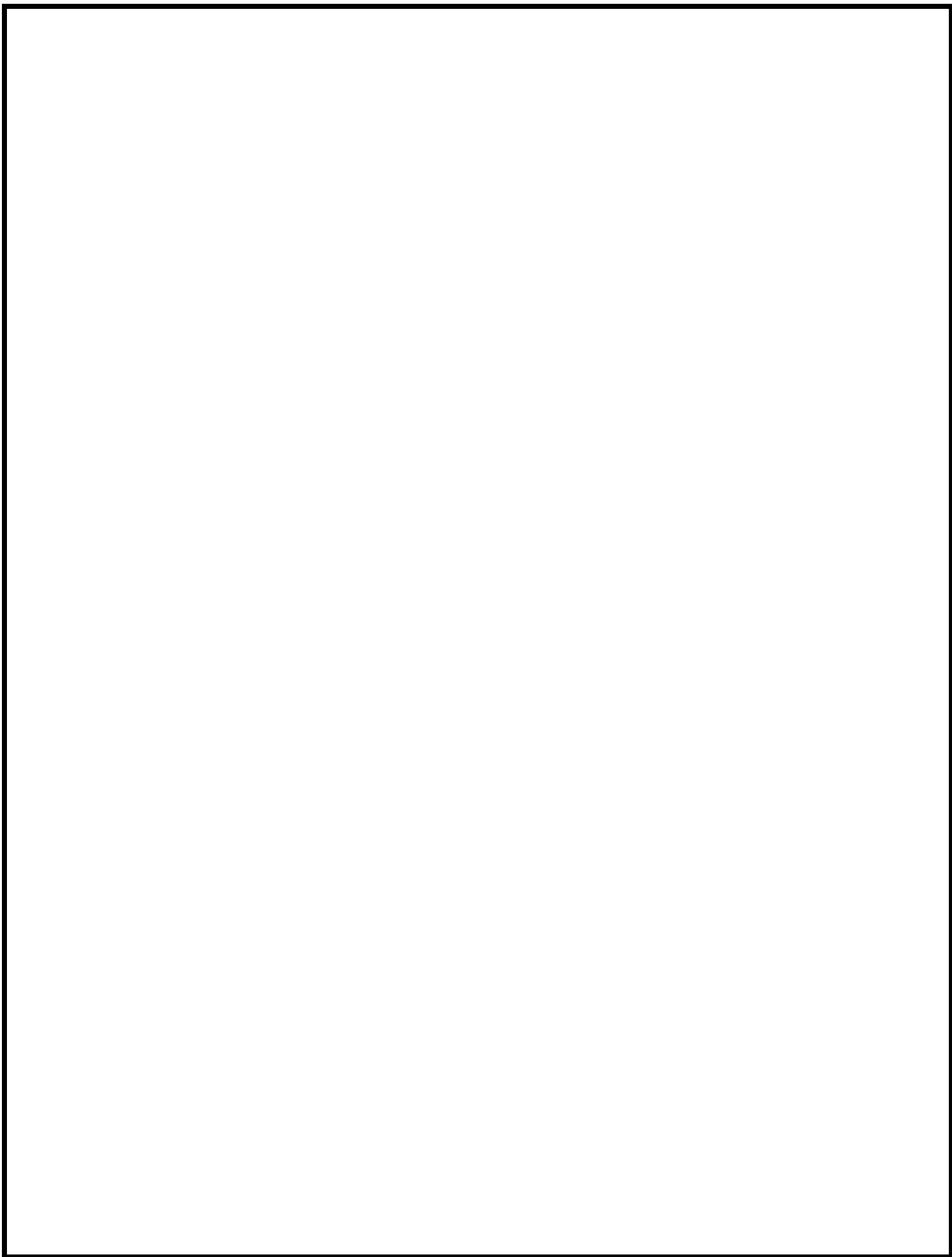
يقول أرخميدس "لو أعطيت نقطة أرتكاز لرفعت الأرض". لو أعطينا لأرخميدس نقطة الأرتكاز هذه فهل سيقدر على رفع الأرض؟ أن العتلة التي سيرفع بها أرخميدس الأرض هي أكبر وزناً (أو كتلة) من الأرض نفسها! لا يمكن إعطاء أرخميدس نقطة الأرتكاز هذه، و لا هو قادر على هذه العتلة. إذن وضع نظرية أو طرح مقولة لها القدرة على تفسير الكون و ظواهره كلها، لا أقول من المستحيل، لكن أقول كنقطة أرتكاز أرخميدس و عتلته.

ليست النسبية العامة هي تخصصي و لا هي في مجال تخصصي، و لا تلقيت درساً فيها و لا في النسبية الخاصة، و لا في حساب التنسور، و لا في الهندسه اللا إقليديه. لكن ملئت هذه المواضيع حيزاً كبيراً من فكري و أعطيتها وقتاً طويلاً من عمري، و يرجع هذا الى تلك اللحظة الملكوتية التي جمعنتي بمولا الموحدين علي بن أبي طالب عليه السلام، حين كنت صبياً في الثالثة عشر من عمري و حين

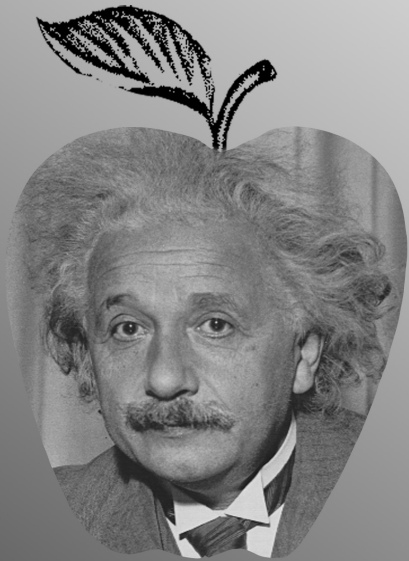
أنهيت دراستي الابتدائية، رأيته عليه السلام في المنام ، بملابس بيضاء يطغي عليها بياض وجهه الممتلأ بالنورانية، و كأني و أياه في الفضاء ... و في المكان الذي كنت أنا واقف فيه و هو أمامي رفعت رأسي إلى الأعلى و سألته: لو سرت في هذا المسير (و أنا أشير للأعلى بعيني، و أقصد بدون توقف) أين سأصل؟ فأجابني عليه السلام لنفس المكان الذي أنت فيه الآن! ، بقت هذه الرؤيا و أحداثها لا تفارق فكري و وعي و ذهني و ذاكرتي و أنا أكتبها الآن و قد مرّ عليها مايقارب السبعة و العشرون عاماً و كأنه عليه السلام أمامي الآن. أثارت عندي هذه الرؤيا حسّ الاستطلاع و البحث و عجز من حولي تفسيرها علمياً، حتى شأنت الأقدار أن تصبح الرياضيات موضوع مطالعتي الشخصية، و حين تعرفت على النسبية العامة وجدتها ليست غريبة عني، و ما أدهشني فيها هو وجود بعض الفضائات، تقوسها أو إنحنائها يقيّد الأشعة الضوئية أو الحزم الضوئية بالسير في مدارات مغلقة، أي يرجع الشعاع الضوئي إلى النقطة التي أنطلق منها. و هذا الكتاب هو لي بمثابة تعبير تلك الرؤيا.

جلال الحاج عبد

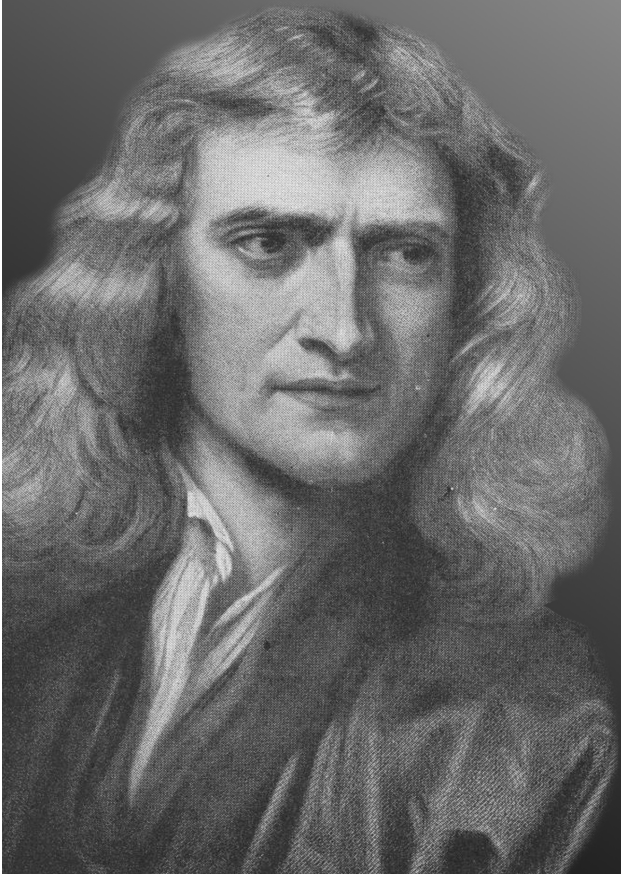
2007







**N**  
**e**  
**w**  
**t**  
**o**  
**n**  
**,**  
**s**



**A**  
**p**  
**p**  
**l**  
**e**



## الفضاء المطلق

معنى النسبية في الفيزياء هو رفض فكرة الفضاء المطلق، ترفض النسبية الخاصة (1905) فضاء ميكلسون المطلق، و ترفض النسبية العامة (1915) فضاء نيوتن المطلق.

ظهور النسبية العامة هو نتيجة فشل جميع المساعي التي حاولت إصلاح نظرية نيوتن في الجاذبية (تربيع عكس الفاصلة) و إدخالها بشكل يرضي مراجع النسبية الخاصة. كذلك رغبة أينشتاين الفلسفية في حذف الفضاء المطلق من الفيزياء.

لا يمكن بناء نظرية ثقالية معتمدة على النسبية الخاصة، إن كانت هذه النظرية مرضية فهي غير مقنعة، لأن النسبية الخاصة تبدأ بفرض وجود مراجع العطالية، و هذا ما أجبر أينشتاين أن يخطو خطوات أوسع من النسبية الخاصة.

أثرت عقلية ماخ على أفكار أينشتاين، لكن ما هي الاعتبارات على ماخية النسبية العامة؟ يجب التذكير بأن مبدأ ماخ ذو جذور كينماتيكية كلاسيكية، كذلك لا ينظر هذا المبدأ الى الحقول بأنها ذات معيار احتمالي في الفضاء. أحياناً يُنظر الى مبدأ ماخ بأنه مبدأ ليس له أي اعتبار فيزيائي، و ذلك لأنه مبدأ كوني ولا يمكن إخضاع الكون كلاً للتجربة، إذن لا يمكن تجربة هذا المبدأ. و من هذا لا يمكن الادعاء على أن العطالة هي من نتائج الفضاء المطلق أو الأجرام الكونية، لذلك نحن مع هذا المبدأ أمام خيارين إما فلسفي، وإما فيزيائي. ليست المسئلة كذلك فهو يهدي الى بعض النبؤات اللا نيوتنية منها:

مجرتنا، هي أشبه بمنظومة عظيمة تدور، و مدة دورانها (مركز الدوران قرب الشمس) حدود 250 مليون سنة. لو إن مجرتنا تفتقد لهذه الحركة الدورانية لسقطت الشمس في مركز المجرة بعد حدود 20 مليون سنة. لو أطلع ماخ على هذه الحركة الدورانية لمجرتنا، لتمكن من خلال مبدئه فرض عالم عظيم خارج هذه المجرة. نفي الفضاء المطلق في مبدأ ماخ يتضمن عدم إستناد الفيزياء بأسرها على مراجع العطالية.

إستناداً على مبدأ ماخ، تلقائياً يفقد الفضاء دوره في الفيزياء، و لهذا لا وجود له. لكن للفضاء دور مهم في النسبية العامة، هذا الدور هو بهيئة فضاء – زمان رباعي الأبعاد. يعين هذا الفضاء – الزمان كل أنواع الحركة، يعني أي حركة تحت ثقالة و عطالة. السؤال هنا هل تُعين المادة الفضاء – الزمان؟ تبتعد النسبية قليلاً عن مبدأ ماخ بأحتساب أن الفضاء المطلق يؤثر و لا يتأثر، و الفضاء – زمان يؤثر على الكتلة بصفة مجال أو حقل، و تؤثر الكتلة عليه من خلال تغير إنحناء الفضاء. حققت النسبية العامة جزءاً من برنامج ماخ، و عوضاً عن حذف الفضاء بأكمله أكتفى أينشتاين بلا مطلقيته، و كذلك عوضاً عن جعل القوى العطالية، قوى ثقالية كما تصوره ماخ، جعلها قوى مادية تحمل أزر العطالة، و القوى الثقالية جعلها العطالة التي تعين الفضاء.

أشكالية فضاء نيوتن المطلق هي:

- هذا الفضاء هو فضاء فرضي و لا وجود له، وهو عاجز عن توضيح نفسه وأشبه بمقولة كبلر حين قال أن الملائكة هي التي تحرك الكواكب في مداراتها.
- لا وجود لأي طريق من بين ما لا نهاية من المراجع العطالية يشخص لنا فضاء نيوتن المطلق.
- تصور شئ تحدث منه جميع الأفعال و لا يتأثر هو بأي فعل يتعارض مع المفاهيم العملية عند الإنسان.

عدم تأيد الأثير و وحدة القوانين الفيزيائية هي من أهم البراهين على نظرية النسبية. لم تأيد التجارب وجود مادة تحمل الأمواج الضوئية و تنقلها في الفضاء، أي نفي و ردّ فكرة الأثير. كذلك، لا يمكن تقسيم الفيزياء الى فروع مستقلة عن بعضها، فقوانين الكهرومغناطيس ليست مستقلة عن قوانين الميكانيك، و كل تجربة ميكانيكية هي ليست مستقلة من البناء الكهرومغناطيسي للمادة.

قبل البدء بالبحث حول الزمان و المكان لابد من برهان على بداية الزمان و حدود المكان، و ما وجدته مناسباً لهذا البحث من بين براهين إمانويل كانت براهينه حول بداية الزمان و حدود المكان و هي:

البرهان الكانتي على أن للعالم بداية في الزمن: إذا فرضنا أن ليس للعالم بداية في الزمن، و إنما كان موجوداً من زمن لا نهائي، يلزم أن تكون فترات زمنية لا نهائية في الماضي قد أكتملت في اللحظة الحاضرة أو في أي لحظة سابقة. لكن من المستحيل أن تكتمل سلسلة لا نهائية. إذن من المستحيل أن يكون العالم قد وجد في زمن لا نهائي. إذن لا بد إن كانت له بداية في الزمن.

البرهان الكانتي على أن العالم محدود في المكان: إذا فرضنا أن ليس للعالم حدود في المكان فإننا نفرض أننا أستكملنا عملية زمنية لا نهائية للمرور على أجزاء مكانية محدودة. لكن الزمن اللا نهائي مستحيل- كما قلنا- لأن السلسلة الزمنية التي أنتهت في لحظة محددة يجب أن يكون طرفها الأول محدوداً أيضاً، إذن يجب أن يكون العالم في المكان محدوداً.

أن الزمان و المكان كما أشار إيمانويل كانت أطاران مفطوران في صلب العقل الإنساني الذي يقوم بعملية المعرفة، شكلاً قليان للحساسية يتم وفقاً لهما ترتيب معطيات هذه الحساسية و مضمون خبرة الإنسان بالعالم الخارجي، أو تجربته الخارجية. فالزمان و المكان إذن صورتان قليتان أو شرطان للمعرفة. و ذلك لأن حسب النظر الكانتي المكان هو شكل تجربتنا الخارجية، و الزمان هو شكل تجربتنا الداخلية. لكن العالم الخارجي كما تنصّ عليه فلسفته النقدية لا ينفصل عن الشروط الداخلية في العقل الذي يتصوره[2].

يرى صموئيل الكسندر (S. Alexander)، أن الزمان و المكان الأصل الهائل أو الحقيقة المبدئية التي نشأ عنهما العالم، هيولي أولي أو جوهر أصلي صدرت عنهما كل الوجود بالانبثاق، فعن الزمان و المكان أنبثقت أولاً المادة، و بالتدرج أنبثقت الحياة، ثم الوعي، و أخيراً الألوهية، بل أنهما يظلان أيضاً ماهية الموجودات بعد أنبثاقها عنهما، فتظل كل الأشياء مثل مصدرها زمانية مكانية[2].

أن المكان كائن دائماً في المكان، أما الزمان فيتدفق في قلب الزمان، إذن، أن الزمان يتوغل في مستويات فلسفية و علمية أبعد، لا يطولها المكان. فهما (الزمان و المكان) ليسا البتة على قدم المساواة و ليسا متساويين أو متكافئين، بل كان الزمان دائماً متميزاً عن المكان و متقدم عليه. حتى أن صموئيل الكسندر رأى أنهما ندان لا ينفصلان، و أكد فلسفياً ما أكدته النظرية النسبية علمياً من أنه لا يوجد مكان

مستقل أو زمان مستقل، بل تمت فحسب زمانيات مكانية تستلزم زماناً – مكاناً أولياً تنبثق عنه كل الأشياء، ثم يعلي شأن الزمان بوصفه مبدأ تنظيم، فلولا له لكان المكان كتلة صماء، أو بتعبير مجازي يقول المكان جسد الكون و الزمان عقله[2].

أهم اعتراضات كانت على نيوتن في المكان و الزمان هي:

أن ما سماه نيوتن المكان النسبي و الزمن النسبي – و هما موضوع إدراك حسي انساني – هما ما أسماه كانت العلاقات المكانية و الزمنية الأمكنة و الأزمنة المختلفة التي هي أجزاء المكان الواحد و الزمن الواحد. المكان النسبي و الزمن النسبي (نيوتن) أو العلاقات المكانية و الزمنية (كانت) هما ما جعلهما كانت – في إطار فلسفته النقدية – صورتين قبيليتين للحدوس التجريبية. أن الخلاف الأساسي بين موقف نيوتن و كانت في هذا السياق هو أنه بينما جعل الأول للمكان و الزمن النسبيين وجوداً خارجياً موضوعياً مستقلاً عن أي إدراك إنساني، جعل كانت العلاقات المكانية و الزمنية تصدران عن الذات صدوراً قبلياً. لأسباب سجلها في براهينه على قبلية المكان و حدسيته[4].

يمكن القول أن ما سماه نيوتن المكان المطلق و الزمن المطلق هما المكان الواحد و الزمن الواحد عند كانت. بل وكان يتحدث كانت في مواضع كثيرة من كتبه عن المكان المطلق أو الخالص أو الواحد و الزمن المطلق أو الخالص أو الواحد بلا تميز[4].

أن أهم مميزات نظرية نيوتن في المكان و الزمن أنها فسرت يقين القضية الرياضية (و الهندسية بوجه خاص) كما فسرت إمكان تطبيق حقائق الهندسة البحتة على عالم الأشياء الجزئية. فسرت نظرية نيوتن يقين الرياضيات البحتة من حيث أن المكان النيوتني موضوعي و لا نهائي. و ذلك ما يتطلبه المكان الهندسي. فسرت نظرية إمكان التطبيق حقائق الهندسة على العالم المحسوس من حيث اعتبار أن المكان الطبيعي (الفيزيائي) مكان إقليدي[4]. و خلاصة اعتراضاته على المكان و الزمان النيوتني هو:

- العالم المادي عند نيوتن عالم موضوعي مستقل كل الاستقلال عن أي إدراك أنساني.
- تصور المكان و الزمن كشيئين واقعيين لهما وجودهما المستقل عنا تصور متناقض، ذلك لأن المكان و الزمن المطلقين بالمعنى النيوتني يعنيان أنهما موجودان و غير موجودين في الواقع

2- الزمان في الفلسفة و العلم – الدكتور يماني طريف الخولي – مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب – 1999

4- كنط و فلسفته النظرية – دكتور محمود زيدان – دار المعارف – الطبعة الثالثة – 1979

- تصادفنا صعوبات في مجال الميتافيزيقا إذا حملنا على المكان و الزمن المطلقين بالمعنى النيوتني صفتي الخلود و اللانهاية، و هاتان يقررهما نيوتن للمطلقين. إذا تصورنا المكان و الزمن خالدين لا نهائيين فلا سبيل لتصور موجود آخر له نفس الصفتان، و أعظم منهما، و هو الله[4].

الملاحظات على كانت:

كان يعتقد كانت أن علم المنطق قدّ تم و أكتمل على يد أرسطو كنسق من نظريات مطلقة الصدق، و أن ليست مجهودات المناطقة من بعد سوى عرض أفضل لما سبق أن أرسى أرسطو قواعده أو إضافة تعديلات جزئية لتفصيلات لا تززع جوهر تلك النظريات. حين يتعرض كانت لنقد نظرية من نظريات نيوتن لا يمس النظريات الفيزيائية في ذاتها بقدر ما يمس تضمناتها الميتافيزيقية. و قدّ نظر كانت الى إقليدس في الهندسة كما نظر الى أرسطو في المنطق و نيوتن في الفيزياء[4].

## المفهوم الفلسفي للمكان

بواسطة الحس الخارجي (هو أحد خصائص الذهن)، نتصور الموضوعات بوصفها خارجة عنّا و بوصفها جميعها في المكان. و كما أن المكان لا يمكنه أن يكون شيئاً فينا، كذلك فإنّ الزمان لا يمكنه أن يحس خارجياً [3].

حتى يمكنني أن أتصور الأشياء بعضها خارج و الى جانب بعض، و بالتالي لا من حيث هي متميزة و حسب، بل من حيث هي قائمة في مواضع مختلفة أيضاً، يجب أن يكون تصور المكان في الأساس سلفاً. و من ثمّ فإنّ تصور المكان لا يمكن أن يستمد بالتجربة من علاقات الظواهر الخارجية، بل إن التجربة الخارجية عنها ليست ممكنة إلا بواسطة ذلك التصور [3].

المكان هو تصور ضروري قبلي يشكل أساساً لجميع الحدوس الخارجية و لا يمكن البتة أن نتصور أن ليس هناك مكان رغم أنه يمكننا أن نفكر أن ليس ثمت مواضيع في المكان. فهو يعدّ بمثابة شرط لإمكان الظواهر، لا بمثابة تعين تابع لها، و هو تصور قبلي يشكل أساساً للظواهر الخارجية بالضرورة [3].

المكان ليس أفهوماً سياقياً، أو كما يقال أفهوماً عاماً لعلاقة الأشياء بعامة، بل هو حدس محض. ذلك أنه لا يمكن بدءاً أن نتصور مكان واحد، و عندما نتكلم عن عدة أمكنة فإننا لا نفهم بذلك إلا أجزاء المكان الواحد بعينه. و هذه الأجزاء لا يمكنها أن تكون سابقة على المكان الوحيد الذي يضمها جميعاً كما لو كانت عناصره (التي يمكن تركيبها منها)، بل يمكنها أن تفكر إلا به. فهو ماهوياً واحداً، و يستند المتنوع الذي فيه، و بالتالي الأفهوم العام للأمكنة بعامة، الى حدود حصرية فيه و حسب. و ينجم عن ذلك من ثمّ أن الحدس القبلي به (الذي ليس أمبيرياً) يوجد في أساس جميع أفاهيمها. و عليه فإنّ جميع المبادئ الهندسية مثال "مجموع زاويتين في المثلث هو أكبر من الثالثة" ليست مستنتجة البتة من أفاهيم عامة للخط و للمثلث، بل من الحدس، و ذلك قبلياً و بيقين ضروري [3].

المكان يتصور بوصفه كما لا متناهيًا معطي. و الحال، إنه يجب أن نفكر حقاً أفهوم بوصفه تصوراً متضمناً في كثرة لا متناهية من تنوع التصورات الممكنة (من حيث طابعها المشترك). و لأن جميع



أجزاء المكان توجد معاً في اللا متناهي، فالتصور الأصلي للمكان هو إذن حدس قبلي و ليس أفهوماً [3].

الهندسة هي علم يعين خصائص المكان تأليفيًا، و مع ذلك، قبليًا. فماذا يجب أن يكون إذن تصور المكان حتى تكون مثل تلك المعرفة ممكنة به؟ يجب أصلاً أن يكون المكان حدساً، لأنه من مجرد أفهوم لا يمكن أن نستمد أي قضية تتخطى الأفهوم، و هو أمر حاصل في الهندسة مع ذلك. لكن، على ذلك الحدس أن يقوم فينا قبليًا، أي قبل إدراك الموضوع، و عليه بالتالي أن يكون حدساً محضاً أمبيرياً. ذلك أن القضايا الهندسية يقينية كلها، أعني، أنها مربوطة بوعي لضرورتها، و على سبيل المثال "المكان ذو أبعاد ثلاثة و حسب" [3].

المكان لا يمثل لا خاصية للأشياء في ذاتها و لا هذه الأشياء في علاقاتها فيما بينها. المكان ليس سوى صورة جميع ظاهرات الحواس الخارجية. لا يمكننا إذن الكلام عن المكان و الأشياء الممتدة الخ، إلا من وجهة نظر الإنسان. وإذا خرجنا من الشرط الذاتي الذي من دونه لن نقدر على أن نتلقى حدساً خارجياً، أعني أن نتأثر بالموضوعات، فلن يعني تصور المكان شيئاً. و لا يربط هذا المحمول بالأشياء، إلا من حيث تبدو لنا، أي من حيث هي موضوعات للحساسية. و الصورة الثابتة لقدرة التلقي، التي نسميها حساسية، هي الشرط الضروري لجميع العلاقات التي بها نحدس الموضوعات بوصفها خارجية. فإذا ما جردناها من هذه الموضوعات فستكون حدساً محضاً يحمل اسم المكان. و حيث إنه لا يسعنا أن نجعل من شروط الحساسية الخاصة شروطاً لإمكان الأشياء، بل فقط شروطاً لظاهراتها، فإنه يمكننا القول إن المكان يتضمن جميع الأشياء التي يمكن أن تظهر لنا خارجياً [3].

القضية هذه: "كلّ الأشياء متجاوزة في المكان"، تصدق ضمن هذه الحدود حصرياً: أن تؤخذ الأشياء بوصفها موضوعاً لحدسنا الحسي. فإذا أضفت إذن الشرط الى الأفهوم هنا و قلت: " جميع الأشياء، بما هي ظاهرات خارجية، متجاوزة في المكان"، فستصدق هذه القاعدة كلياً و بلا حصر [3].

## النظرة الفلسفية و الفيزيائية للزمان [1]

### الزمان من وجهة نظر أرسطو وأفلاطون

الزمان من وجهة نظر أرسطو هو مقدار الحركة من جهة المتقدم و المتأخر.

يسوقنا هذا التعريف الى هذه الاستنتاجات:

- ارتباط الزمان بالحركة.
- أنه مقدار الحركة و ليس الحركة نفسها.
- ولو أنه مقدار الحركة و مقياسها، فإنه في الآن نفسه يقاس هو ذاته بالحركة.
- أن هذه الحركة التي يقاس بها هي الحركة العامة للكون.
- أنه مصدر الكون و الفساد.
- أنه ليس متوقفاً و لا مرتبطاً بالنفس الإنسانية، و إن كان مرتبطاً بنفس حية هي النفس الكلية. و ليس لنا أن نزعم هنا أن النفس الكلية يمكن أن تفسر أسطورياً على أنها النفس الإنسانية مرفوعة الى درجة أقوى، نظراً الى أن الكون في نظر الروح اليونانية عامة كائن حي أكبر. و من هنا لا يمكن إلا أن يقال أن نظرة الروح اليونانية عامة الى الزمان نظرة موضوعية، لا ذاتية.

- أن الزمان نُظر إليه هنا نظرة كمية.

يقيم أرسطو برهان على أن الحركة ليست الزمان و إن الزمان ليس الحركة على أن الزمان كلى عام، و لا يتوقف. و يضيف الى هذا البرهان هو إن كل تغير إما أسرع و إما أبطأ، بينما الزمان ليس كذلك، لأن البطء و السرعة يحددان الزمان.

كذلك يربط أرسطو الزمان بالمكان حين يقول إن الحركة خاضعة للمقدار الكمي، و كل مقدار كمي متصل، فالحركة إذن متصلة. فإذا كان الزمان سائراً وفقاً للحركة، فهو إذن متصل مثلها. و نحن نميز في المتحرك بين نقطة بدء و نقطة وصول، أي نفرق بين متقدم و متأخر في المكان. و الحركة كما قلنا خاضعة للمكان، فإذن نستطيع أن نميز فيها بين متقدم و متأخر.

يشرح أرسطو هذا التعريف فيقول: إن الزمان ليس إذن حركة، ولكنه لا يقوم إلا من جهة أن الحركة تتضمن المقدار (العدد). والدليل على هذا أن العدد يسمح لنا بالتمييز بين الأكثر والأقل، والزمان يسمح بالتمييز بين الأكثر والأقل في الحركة. فالزمان إذن نوع من العدد. ولكن العدد يفهم بمعنيين: فهناك العدد بمعنى المعداد والقابل للعد، وهناك العدد كوسيلة للعد. وسيلة العدّ والشئ متميزان. وهذه التفرقة يمكن أن تصاغ على نحو حديث بأن نقول إن ثمت نوعين من العدد: عدداً موضوعياً، وهو الأشياء القابلة لأن تعدّ، و عدداً ذاتياً هو الفكرة التي يكونها العقل و بها يعدّ الأشياء القابلة للعدّ.

الزمان عند أفلاطون هو الصورة السرمدية السائرة تبعاً للمقدار، للسرمدية الباقية في الوحدة. إن الأشياء السرمدية ليست في الزمان، لأن الزمان لا يشملها ولا يقيس وجودها. والدليل على هذا أن الزمان ليس له أي أثر فيها، وما هذا إلا لأنها ليست فيه. كذلك الحال أيضاً في اللا موجودات، ويقصد بها أرسطو النسب الرياضية خصوصاً، مثل قابلية قياس القطر مع الضلع. فهذه أيضاً كالأشياء السرمدية ليست في الزمان، لأنها لا تتضمن حركة أو سكوناً.

النتيجة إن كلّ ما هو خاضع للكون والفساد، وعلى العموم كلّ ما يوجد تارة ولا يوجد أخرى هو بالضرورة في الزمان، لأن ثمت زمناً أكبر يفوق وجودها. أما ما لا يخضع للحركة، فلا يوجد في الزمان، وهذا واضح من كون الزمان مرتبطاً بالحركة على النحو الذي رأيناه، فحيث لا حركة لا زمان. ففي أي شئ يوجد إذن؟ لا بد أن نقول إنه يوجد في الآن!

فكرة - الآن - فكرة غامضة هل نجعل الوجود الحقيقي للزمان في الآن؟ أم ندع الآن خارج الزمان؟ الوضع الأول أقرب، وهذا ما عبر عنه أبي البركات البغدادي في قوله: إن الآن هو الذي يوجد من الزمان، ولا يوجد زمان البتة، أي لا يقَرّ منه شئ يتجدد بأنيين، بل الموجود أن بعد أن على التوالي. كذلك يقول: الزمان يلقي الموجود بالآن، فلولا الآن لما دخل الزمان في الوجود على الوجه الذي دخله.

### الزمان من وجهة نظر نيوتن

قسّم نيوتن الزمان الى زمانين: مطلق، و نسبي. الزمان المطلق هو الزمان الحقيقي الرياضي، و هو قائم بذاته مستقل بطبيعته، في غير نسبة الى أي شئ خارجي، و يسيل بأطراد و رتوب، و يسمى أيضاً بأسم المدة، و على العكس من هذا نجد الزمان النسبي ظاهرياً عامياً، و هو مقياس حسيّ خارجي لأية مدة بواسطة الحركة، و هو الزمان المستعمل في الحياة العادية عل هيئة ساعات و أيام و شهور و أعوام، و قدّ يكون دقيقاً، و قدّ لا يكون متساوياً مطرداً. و هذا الزمان الثاني يستخدم في الفلك مقياساً لحركة الأجرام السماوية، لأن زمان الفلكيين مرتبط بحركة، بينما الزمان المطلق كما قلنا لا يرتبط بأية حركة. و هذا الزمان الأخير توجد فيه معية مطلقة، بمعنى أن من الممكن أن تقع حادثتان معاً و في نفس الوقت بالنسبة الى الزمان المطلق و لو كان أحدهما مرتبط بالشمس مثلاً، و الآخر بعطارد، دون أن يعني نيوتن ببيان: هل هذه المعية المطلقة بالنسبة الى نظامين في سكون نسبي فيما بينهما، أو متحركين الواحد قبالة الآخرين؟ و هي المشكلة التي أثارتها نظرية النسبية فيما بعد.

### الزمان من وجهة نظر ليبنتس

الزمان من وجهة نظر ليبنتس هو نظام التوالي، و هو إذن لا يقوم إلا في النسب الموجودة بين أشياء تتوالى أي أنه تابع للأشياء، و ليس سابقاً عليها. لقد خطا ليبنتس بهذا التعريف الجديد للزمان خطوة واسعة في سبيل التجريد و الذاتية، فإنه مع ذلك ظلّ موضوعياً الى حدّ كبير. إذ هو ينظر الى هذه النسب، نسب توالي، على أنها نسب حقيقيه بين حدود حقيقية، هي لحظات متتالية، تمر بها في الواقع الأشياء المستمرة ذوات المدة. و إذا كان مع ذلك قدّ سار في اتجاه الذاتية بأن ميز بين الزمان و بين المدة كما فرق بين المكان و بين الأمتداد على أساس أن المدة و الأمتداد صفات للأشياء، بينما الزمان و المكان ينظر إليهما على أنهما خارج الأشياء يفيدان في قياسها، و بالتالي تكون المدة و الأمتداد أشياء خارجية موضوعية، بينما الزمان و المكان أقرب الى الذاتية. لم ينعت ليبنتس الزمان و المكان بأنهما ذاتيان و لا وجود لهما في الموضوعات الخارجية، بل أكتفى بأن قال إنهما مطلقان متخيلان.

### الزمان من وجهة نظر كانت

عرض كانت الزمان على قسمين عرض ميتافيزيقي، و آخر متعال. العرض الميتافيزيقي يتضمن خمس حجج يمكن ان تقسم الى قسمين: يبرهن في القسم الأول على أن الزمان ليس أمثلاً تجريبياً، بل هو قبلي. و يبرهن في القسم الثاني على أن الزمان عيان، و ليس تصوراً.

إن الزمان ضروري يقوم عليه كلّ عيان، و يمكن أن يدرك مستقلاً عن الظواهر. و النتيجة لهذا أن الزمان إذن قبلي، و الدليل على هذا أننا لا نستطيع أن نستبعد الزمان من الظواهر عامة، مع أننا نستطيع أن نفهم الزمان خالياً من الظواهر. إذن الزمان لا يقوم على الظواهر، بل الظاهر هي التي تقوم على الزمان، و بغير الزمان لا يتصور تحقق الظواهر، أي ان الزمان إذن قبلي ضروري لكلّ حركة حسية.

العيان عند كانت هو الأمتثال الجزئي، بينما التصور هو الأمتثال الكلي، أي في حالة العيان أمتثال موضوعاً جزئياً، و في حالة التصور أمتثال الصفات المشتركة بين عدة موضوعات. و العيان أسبق من التصور، لأنه مباشر يتصل بموضوعه مباشرة عن طريق الحس، بينما التصور يتكون بواسطة العيانات، و لذا ليس على صلة مباشرة بالموضوعات. و الزمان العيان بهذا المعنى، أي بمعنى أنه أمتثال موضوع جزئي. أما أمتثال الموضوعات المتزمنة بالزمان، فهذا هو الزمانية. و يبرهن كانت على هذا بحجتين: الأولى أن الزمان واحد، و ليس كثيراً. و الثانية أن الزمان لا متناه. يقول كانت: أن الزمان ليس تصوراً كلياً، و لكنه شكل خالص للعيان الحسي. و ذلك لأن المرء لا يستطيع أن يتصور غير زمان واحد و وحيد، أما الأزمنة فليست إلا أجزاء لهذا الزمان الواحد، و إذا كان الزمان واحداً، فهو لا يقبل أن يكون ذا تصور، بل ذا عيان، ما دام التصور يتركب من أمتثال عدة أشياء، بينما العيان من أمتثال شئ جزئي واحد.

أمتثال اللا تناهي في الزمان ليس تصوراً، بل عياناً، و الزمان أمتثال اللا تناهي، إذن الزمان عيان و ليس تصوراً. أثبت كانت أن الزمان عيان، و بهذا أيضاً فرق بين الزمان و الزمانية. و النتيجة أن

الزمان أصيل و الزمانية مشتقة و متفرعة على الزمان. هذا العيان الخالص للزمان هو شرط كل معرفة قبلية لدينا عن الزمان بما في ذلك البديهيات العامة.  
النتيجة:

- أن الزمان ليس شيئاً موجوداً بذاته قائماً مستقلاً، و ليس شيئاً باطنياً في الأشياء كصفة موضوعية لها، و هو لا يبقى حين نجرد كلّ الشروط الموضوعية لأمثاله. لأنه لو كان قائماً بذاته، لكان شيئاً واقعياً و غير واقعي معاً.
- الزمان عند كانت شكل من شكول الحساسيه الإنسانية، أي لا يرجع إلا إليها، فلا يمكن أن تظهر الأشياء لنا في التجربة الحسية إلا على هيئة الزمان.
- الزمان هو الشرط الشكلي القبلي لكلّ الظواهر أياً كانت. و في هذا يزيد الزمان عن المكان: إذ المكان، بوصفه الشكل الخالص لكل عيان خارجي قد حدّد على هذا النحو بما هو خارجي فحسب، فهو إذن شرط قبلي للظواهر الخارجية و حدها دون غيرها. أما الزمان فإنه شكل خالص لكلّ عيان باطن، و خارجي معاً.
- لا ينكر كانت موضوعية الزمان، بوصفه الشرط لكلّ تجاربنا، و إنما الذي ينكره هو واقعيته المطلقة.
- المثالية المتعالية للزمان هي وجوده (أي الزمان) في كل تجربة حسية و أمثال، دون أن يكون شيئاً موجوداً في الخارج كوجود الشئ في ذاته.
- يقوم الزمان على التوالي، بينما المكان على التتالي. التقابل بين المكان و الزمان هو على النحو التالي[2]:

الزمان	المكان
اللحظة	النقطة
الديمومه	الامتداد
التعاقب	التجاور
التوالي	التتالي
الحركية	السكونية
التغير	الثبات
الصيرورة	الكيونة

## الزمن في النظرية النسبية

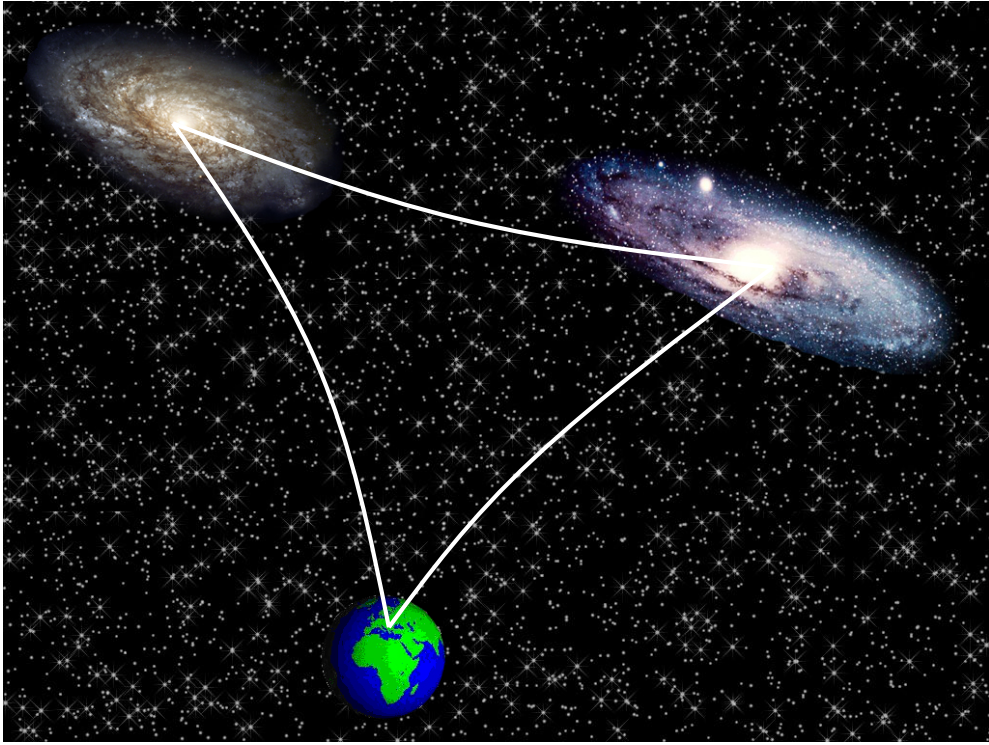
أهم نتائج النظرية النسبية: أهمها و أولها هو أن الزمن نسبي. و ثانيها أن للمكان إنحناء. و ثالثها أن سرعة الضوء هي أكبر سرعة ممكنة. المسئلة الرئيسية في هذه النظرية هي أنه ليس من الممكن أن يفصل بين الزمان و المكان إطلاقاً، بل يكونان كلاً متصلاً يسمى متصل الزمان و المكان (الزمان)، و الزمان في هذه الحالة إذن بُعد رابع يضاف الى أبعاد المكان الثلاثة. و بهذا المعنى يقول منكوفسكي: إن الفصل بين المكان و الزمان قد صار وهماً لا أساس له، و إن إندماجهما على نحو ما هو وحده الذي يتسم بسيماء الحقيقة.

الفارق القديم الذي كان يقال بوجوده بين الزمان و المكان، ألا وهو أن الزمان ذو اتجاه و لا يقبل الإعادة، بينما المكان متساوي الاتجاه، قد سقط على أساس هذه النظرية. إذ أن فكرة الاتجاه الواحد التي كانت تعزى الى الزمان قد صدرت عن تصور زمان مطلق تتأثر به الظواهر و الأشياء المتحركة فيه، دون أن يتأثر هو بها أدنى تأثير، أما إذا قلنا بأن الزمان نسبي، يتوقف على إطار الإشارة (مرجع الأشاره الضوئية) و الإطارات متعددة تبعاً لأختلاف الأجرام في الكون في حركتها بعضها بالنسبة الى بعض، فليس ثمت مجال للتحدث عن اتجاه واحد في متصل الزمان و المكان هو اتجاه زمني، و العالم الفيزيائي إذن ليس ذا اتجاه واحد مستمر كأتجاه التاريخ، مادام هذا ذا اتجاه واحد، بينما ذلك العالم بوصفه كلاً له اتجاهات زمنية عدة. و الفارق واضح بين كلتا النظرتين الى الزمان: فالزمان التاريخي، أعني الزمان ذو الاتجاه الواحد، توجد فيه الحوادث إما على هيئة التوالي أو على هيئة المعية، و يمكن أن يُدرك مباشرة بالحس و الذاكرة، و المدة فيه ذات وحدة جوهرية في الأستمرار الحسي لكل الحاضرات المتوالية، أما الزمان الفيزيائي الذي تقول به النسبية، فلا نستطيع أن نحدد فيه الوضع الزماني و المكاني للحوادث من حيث التوالي أو المعية إلا إذا إتفقنا أولاً على وضع معايير للمعية و التوالي، معايير تتوقف على إطارات الإشارة الزمنية التي تجري فيها تلك الحوادث، و من هنا فليس في الوسع أن نحدد، بطريقة واحدة سابقة على وضع معايير معينة، التوالي أو المعية بين الحوادث، و المساواة في المضي الزمني لا تتحدد في حالة الزمان الفيزيائي بطريقة عامة سابقة، بل لا بد من وضع مقياس تحدد به المساواة في المضي الزمني. و من هذا نرى في النهاية أن المقاييس التي نتخذها في قياس المدد و الأطوال تتوقف على وجهة نظر الراصد و إطار الإشارة الذي يوجد فيه.

### الزمن في نظرية الكمّ

وضح هيزنبرج في نظرية الكمّ، أن الراصد ذو أثر أكبر في الموضع المرصود، الى درجة أنه من المستحيل أن نجد قياساً دقيقاً كل الدقة، بل لا بد أن يكون ثمت هامش لا تعين لا يمكن أزالته. و على هذا، فبعد أن كانت الميكانيكا القديمة ( أي تلك التي سبقت نظرية الكمّ عند هيزنبرج، بما في ذلك الميكانيكا النيوتنية بعد إدخال تعديلات نظرية النسبية فيها) تحسب أن مقياس الزمان يمكن أن ينطبق بدقة تزداد كلما أزداد تحديدنا للظروف التي توجد بها ظاهرة فيزيائية، قالت الميكانيكا الكمية: إننا لا يمكن أن نصل الى دقة مطلقة، بل يظل ثمت مجال لا تعين ليس في الوسع أختراقه، و ذلك ناتج من رد الفعل الذي يحدثه الراصد ضد الظاهرة المرصودة. و فضلاً عن هذا لا تعترف بأن كل الظواهر قابلة للدخول في إطارات الزمان و المكان، إذ بينت نسب هيزنبرج أن الظواهر الذرية لا تخضع بإحكام و دقة مطلقة لقواعد علم الحركة ( للعالم فوق الذري)، بل ثمت إنحراف دائماً عنها تبعاً لثابت بلانك. و تبعاً فإن التصويرات الزمانية المكانية في الفيزياء القديمة (الى ما قبل نظرية الكمّ) لا تستطيع أن تتمثل بالدقة العمليات المجهرية، أعني تلك التي لا تدرك إلا بالمجهر.





# الهندسة الهندولية



## الهندسة الهذلولية

لا تستطرق الهندسة للأشعة الضوئية، لكن مسير شعاع ضوئي يمكن أن يكون الطبيعه الماديّة لأصطلاح هندسي غير معرّف كالخط. يذكر هرمان وايل (Hermann Weyl) أن الذهن الرياضي حرّ و ملزم، وهناك أحساس عند الرياضيين (علماء الرياضيات) و هو أنهم يتمتعون بحرية تعريف الأصطلاحات و وضع المسلمات، لكن المسئلة هي مدى توفقم بأرضاء زملائهم الرياضيين بنتائج أحساساتهم و تخيلاتهم. لا يمكن الوقوف أمام هذه الأحساسات و الكثير من البنى الرياضيه هي حصيلة جهد و مساعي الأسره الرياضيه بأكملها، و قد أكدوا على أستلزامها.

لا تخلو دنيا الرياضيات من الجدل حول النظم الموضوعاتيه على رغم النتائج المثمره التي جاءت بها هذه النظم، لقد نالت مسلمات كانتور في المجموعات اللامتناهيه جدلاً و رفضاً من أبرز الرياضيين (أمثال وايل و برانور و بيشاب) و منهم من رفض جميع هذه المسلمات. إذا كانت هذه المسلمات هي أحكام صوريه لا معنى لها فلماذا نالت موافقة و مخالفة الكثيرين؟ هل هناك اعتراض على قواعد لعبة الشطرنج؟ النظره الصوريه على الرياضيات هي إنها لعبة صوريه، هذه النظره هي منفذ للهروب من المسئلة الفلسفيه و النفسيه المعقده لماهيات الأبداعات و الأكتشافات الرياضيه. في الحقيقه عندما يتوق الرياضي بوجود شئ ماذا يقول؟ عندما أكتشف الفيتاغورثيون بأن وتر المثلث القائم الزاويه المتساوي الساقين لا يمكن قياسه بنفس وحدة القياس التي يقاس بها الساقين عمدوا على كتمان أكتشافهم هذا و أطلقوا التسمية على كهذا الطول بالأصم. أما نحن اليوم فلسنا مستائين من الأعداد الصماء كالعدد  $\sqrt{2}$  بل ذهبنا الى أبعد من هذا بقبولنا الأعداد الخياليه التي جاء بها كاردان (Cardan) و ذلك من خلال إدخاله مفهوم  $i = \sqrt{-1}$  دنيا الرياضيات. من المواضيع الأصوليه (fundamentalist) في فلسفه الرياضيات لكرونكر (Kroncker) مقولته: الله الذي خلق الأعداد الصحيحه، و بقيه الأعداد هي من خلق الإنسان.

أكثر الرياضيين هم متفقون اليوم على مسلمات كانتور في المجموعات و يعتبرونها أساس الرياضيات.

هناك سرّ في الرياضيات و هو إذا كانت الأبداعات الرياضيه هي حصيلة أو هام و تخيلات الرياضيين، فكيف يمكن لبعضها أن تتخذ طابع فيزيائي عملي؟ كالتابع العملي الذي أتخذته قوانين الحركه المداريه المستلهمة من المخروطات (كالشلمجي) و المعتمدة على مسلمّات الهندسة التي وضعها اليونانيون، و كانت نتائجها هبوط الإنسان على سطح القمر، لن يتصوروا بأن مسلمّاتهم هذه ستأخذ طابع عملي في غزو الفضاء!

الهدف من طرح هذا الموضوع هو ليس لإيذائكم و إنما لنبين لكم أن الرياضيات حيّة و دائماً في تغير و لاتنتهي.

ندخل الى بحث الهندسه الهذلوليه، بتعريفها و أهم مفاهيمها و قضاياها.

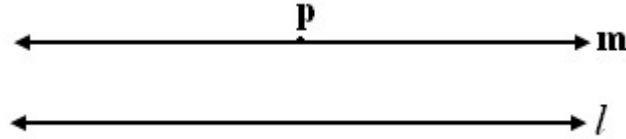
كل هندسه غير إقليديه فهي هندسه لا إقليديه، هناك هندسات لا إقليديه عديده لكن ما يخصّ هذا البحث هي الهندسه التي كشفها كلّ من لوباتشفسكي و بوليائي (Bolyai) و غاوس و تعرف هذه الهندسه، بالهندسه الهذلوليه أو الهندسه الزائديه Hyperbolic geometry أو هندسه لوباتشفسكي.

الهندسه الهذلوليه هي الهندسة المبنية على مسلمّات الهندسة المحايدة (neutral geometry)، و تستبدل مسلمة هيلبرت في التوازي، بمسلمة التوازي في الهندسة الهذلوليه.

مسلمة التوازي في الهندسه الهذلوليه: من نقطه P لا على المستقيم  $l$  على الأقلّ يمرّ مستقيمان من P يوازيان المستقيم  $l$

تسعى الهندسه المحايدة على إثبات القضايا الهندسية مستغنية عن مسلمة التوازي. مستعينة بالمسلمات الأربعة الأولى للهندسة الإقليديه، كمحاولة لفرز القضايا المعتمدة و الغير معتمدة على مسلمة التوازي. مسلمات هيلبرت هي أكثر شمولية من مسلمات إقليدس و تظهر مسلمة التوازي في مسلمات هيلبرت بهذه الصيغة:

لكلّ مستقيم كالمستقيم  $l$  ولأي نقطة لا على المستقيم  $l$  كالنقطة  $P$  على الأكثر هناك مستقيم واحد هو  $m$  يمرّ من  $P$  و يوازي  $l$ .



في الهندسة الإقليدية لا يمكن تقسيم الزاوية بالفرجال و المسطره الغير مدرجه الى ثلاث زوايا متساوية، كذلك في الهندسة الهذلوليه هذا التقسيم غير ممكن، لا يمكن تقسيم قطعة مستقيم بهذا الشرط الى ثلاث أقسام متساوية في الهندسة الهذلوليه. في الهندسة الإقليدية لا يمكن رسم مربع بالفرجال و المسطره الغير مدرجه مساحته تساوي مساحة دائره معلومه، لكن هذا الرسم بهذا الشرط ممكن في الهندسة الهذلوليه.

العجيب في هذه الهندسه هو إمكانية وجود حدّ لمساحة المثلث فيها و لا حدّ لطول أضلاع هذا المثلث!

### الهندسه في الفضاء الماديّ

منطقياً يجب أن تكون الهندسه الهذلوليه ملازمه للهندسه الإقليديه، لكن يطرح هذا الألتزام، السؤال هذا، و هو أن الهندسه الهذلوليه هي نوع من أنواع التسليه الفكرية بينما الهندسه الإقليديه هي التي تعرّف العالم الذي نعيش فيه و خير دليل على ذلك الهندسه المعمارية في مجال المسافات و المساحات القصيرة، فكيف تدخل هذه الهندسه المجال العملي؟ تفقد الهندسه الإقليديه مصداقيتها في المسافات الكبيرة كالمسافات بين الكواكب البعيده جداً، مثال على ذلك، إن كان الخط أو المستقيم هو عبارة عن مسير شعاع ضوئي، في حالة وجود ثلاثة منابع ضوئيه بعيده جداً عن بعضها، تشكل الفواصل بين هذه المنابع مثلث (مادي)، إذا أردنا أن نعرف بأن مجموع زوايا هذا المثلث 180 درجة أم لا، فالأخطاء الناتجة عن القياسات تعوق عن التحقق من إثبات كهذه التجارب، و لا توجد أي تجربه فيزيائيه تبرهن على إقليديه الفضاء، بينما يمكن إثبات لا إقليديه الفضاء.

يجب الشك في تعريف الخط (أو المستقيم). هل من الممكن أن يسير الضوء في مسير منحني؟ يعتقد أنشتاين بعدم التفكيك بين المكان و الزمان، و هندسة الفضاء - الزمان متأثرة بالمادة الموجودة في الفضاء حيث ينحني الضوء عند مروره قرب كتلة ضخمة.

أصبح الفضاء ليس كما يتصوره نيوتن عبارة عن صندوق فارغ لا يتأثر بالصخور الموجودة فيه، و المسئلة أعقد مما يتصوره إقليدس و لوباتشفسكي فكلتا هاتين الهندستين غير كافيتين لكهذا الفضاء! لا يقلل هذا من شأن الهندسة اللا إقليدية لأنشتاين يقول: أجل كل التقدير لتعابير هذه الهندسة (اللا إقليدية) فإن لم أتعرف عليها لما تمكنت من طرح نظرية النسبية.

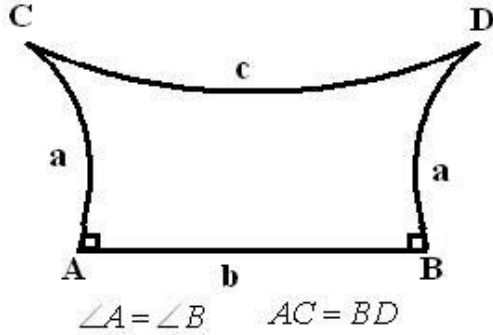
يطرح بوانكره سؤالاً و هو: أي الهندسات صحيحة؟ إذا كانت الهندسة علم عملي فهي غير دقيقة و دائماً في تغير ... بينما مسلمات الهندسة هي ليست نتائج أستنتاجات و لا حقائق تجريبية، و السؤال هل الهندسة الإقليدية صحيحة؟ جوابه كجواب هذه الأسئلة، هل النظام المترى في الأوزان هو الصحيح و النظام القديم غلط؟ أم جواب السؤال، هل الإحداثيات الكارتيزية هي الصحيحة و الإحداثيات القطبية غلط؟ إذن، أي هندسه هي ليست أصح من الهندسة الأخرى، لكن ممكن أن تكون هي الهندسة المناسبة.

في الفلسفه التقليديه (conventionalism) ينقسم العلماء و الفلاسفة الى قسمان: القسم الأول وهم نيوتن و راسل و وايتهد يعتقدون بمتريه (metric) قياسييه ذاتيه، و القسم الآخر و هم ريمان و بوانكره و أنشتاين يعتقدون بأن هذه المترية هي تقليديه.

## بعض مفاهيم و قضايا الهندسة الهذلولية

### رباعي أضلاع ساكري Saccheri quadrilateral

أستعان ساكري برباعي أضلاع ليتمكن من إثبات مسلمة التوازي لإقليدس، هذا الرباعي الأضلاع متكون من عمودين متساويين على نهايتي مستقيم و هناك ثلاثة حالات للزاويتين الأخرتين:



الحالة الأولى: هذه الزاويتان قائمتان

الحالة الثانية: هذه الزاويتان منفرجتان

الحالة الثالثة: هذه الزاويتان حادتان

لإثبات الحالة الأولى وهي ما تنصّ عليه الهندسة الإقليدية

سعى ساكري ليبرهن على التناقض في الحالتين الأخرتين،

استطاع أن يبرهن على التناقض في الحالة الثانية لكن ما

استطاع أن يبرهن على التناقض في الحالة الثالثة. عدم إمكان إثبات تناقض في الحالة الثالثة جعل هذا

الرباعي أن يأخذ مكانه في الهندسة الهذلولية لكن لم يشهد ساكري هذه المكانة لرباعيّه.

### رباعي أضلاع لامبرت Lambert quadrilateral

رباعي لامبرت كرباعي ساكري لكن متكون من ثلاثة زوايا قائمه و زاوية حادة. أستطاع لامبرت من

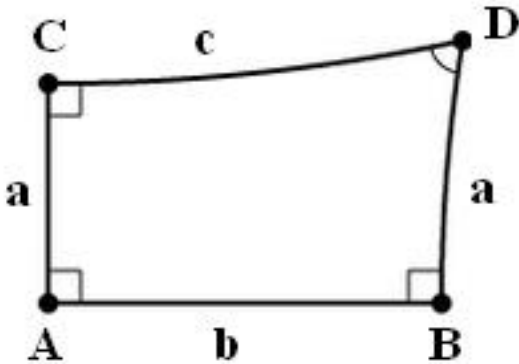
خلال هذا الرباعي أن يبرهن على الكثير من قضايا الهندسة الهذلولية، لكن على عكس ساكري ما

أدعى بوجود تناقض، لكن ما برهن عليه هو إن وجود الزاوية الحادة في رباعيّه يستلزم وجود تناسب

بين مساحة المثلث و نقصان مساحة المثلث.

بعض الروابط المثلثاتيه (المثلثات هنا هذلوليه) لرباعي ساكري

و لامبرت:



$$\sinh \frac{c}{2} = \cosh a \sinh \frac{b}{2}$$

في رباعي ساكري:

$$\sinh c = \cosh a \sinh b$$

في رباعي لامبرت:

a و b و c طول الأضلاع

## نقصان المساحة

النقصان أو العيب أو Defect في الهندسة الهلولويه هو الفرق بين  $\pi$  و مجموع الزوايا الداخليه للمثلث أي:

$$Defect(\Delta ABC) = \pi - (\angle A^r + \angle B^r + \angle C^r)$$

في هذه الرابطة الزوايا حسب الراديان،

في الهندسة الهلولويه هناك عدد ثابت و مثبت  $k$  لأي مثلث بحيث:

$$S_{ABC} = k^2 \times Defect(\Delta ABC)$$

إذا كانت الزوايا حسب الدرجة

$$S_{ABC} = \frac{\pi}{180} k^2 \times Defect(\Delta ABC)$$

في هذه الرابطة  $S_{ABC}$  مساحة المثلث  $ABC$  في الهندسة الهلولويه.

في الهندسة الهلولويه الحد الأقصى لمساحة المثلث هو  $\pi k^2$ . مساحة المثلث في الهندسة الهلولويه ليست كما هي في الهندسة الإقليديه حاصل ضرب القاعده في نصف الأرتفاع، و إنما تحسب مساحة المثلث من قانون نقصان المساحة. لذلك يمكن القول عن وجود مثلث ذو مساحه (أقولها بأحتياط) مطلقه في الهندسة الهلولويه.

إذا كان إنحناء السطح  $K$  هناك رابطة لغاوس تربط بين مساحة المثلث و مجموع زواياه الداخليه هي:

$$K \times S_{ABC} = \angle A^r + \angle B^r + \angle C^r - \pi$$

نستنتج ثلاث حالات من هذه الرابطة:



**الحالة الأولى:**  $K > 0$  في هذه الحالة مجموع زوايا المثلث أكثر من 180 درجة في هذه الحالة التقوس مثبت يمكن بناء هندسه ببيضويه لهذه الحالة.

**الحالة الثانية:**  $K = 0$  في هذه الحالة مجموع زوايا المثلث 180 درجة و هو نموذج بناء الهندسه الإقليديه ذات الأنحاء الصفر.

**الحالة الثالثة:**  $K < 0$  في هذه الحالة مجموع زوايا المثلث أقل من 180 درجة و التقوس سالب يمكن بناء هندسه هذلوليه لهذه الحالة.

من مقايسة هذه الرابطتين للحالة الثالثه:

$$S_{ABC} = k^2 \times Defect(\Delta ABC)$$

$$K \times S_{ABC} = \angle A^r + \angle B^r + \angle C^r - \pi$$

إذن  $K = -\frac{1}{k^2}$  إذا فرضنا  $k = iR$  في هذه الرابطه  $i = \sqrt{-1}$  يتضح بأن الصفة الهذلولية عبارة

عن كرة بشعاع أو نصف قطر خيالي أو وهمي.

مساحة الدائره في الهندسة الهذلوليه:

$$S_{\circ} = 4\pi k^2 \sinh \frac{r}{2k}$$

## زاوية التوازي

من نقطة P لا على المستقيم L نرسم عمود PQ على المستقيم L هناك فقط مستقيمان على طرفين

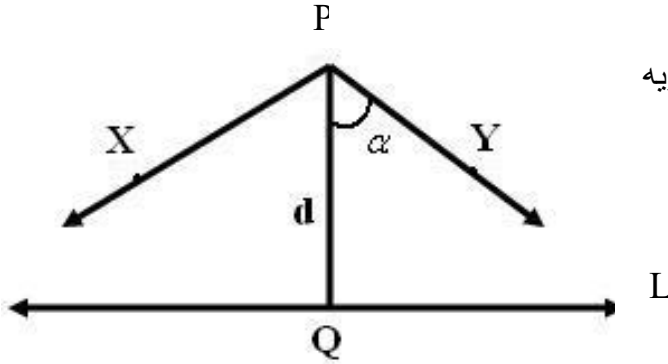
QP لا يقطعان L هذان المستقيمان متناظران أي:

$$\angle XPQ = \angle QPY$$

توازي نقطة P الى المستقيم L.

قانون بوليائي - لباتشفسكي:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = e \frac{d}{k}$$



تكتب هذه الزاوية حسب الدرجة هكذا  $\Pi(PQ)^\circ$  و تقرأ زاوية توازي النقطة P بالنسبة الى المستقيم L.

k في هذا القانون هو القيمة الثابتة التي ظهر تربيعها في قانون نقصان المساحة، و  $\tan \frac{\alpha}{2}$  ظل نصف

الزاوية  $\alpha$  و e ثابت أويلر. يجب التذكير بأن ظل الزاوية في الهندسة الهذلوليه ليس كما هو في الهندسه الإقليديه نسبة الضلع المقابل على الضلع المجاور. كذلك في الصفحه الهذلوليه المستقيمان XP و YP متمايزان و موازيان للمستقيم L.

في حالة  $k \rightarrow \infty$  تسعى زاوية التوازي نحو  $\frac{\pi}{2}$  و هي زاوية التوازي في الهندسه الإقليديه. إذن في

حالة سعي الثابت k (ثابت نقصان المساحة) نحو ما لا نهاية تصبح الهندسه الهذلوليه هندسه إقليديه ذات مستقيم واحد يوازي المستقيم L ، و في حالة سعيه نحو الصفر تسعى زاوية التوازي نحو الصفر و تصبح الهندسه الهذلوليه هندسه بيضويه بلا خطوط موازيه.

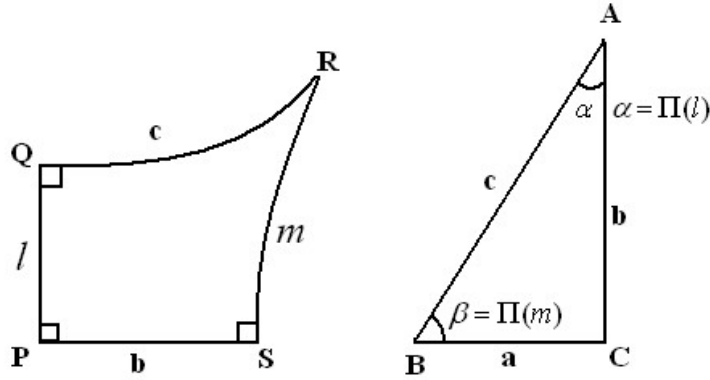
$$k \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$k \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$$

عوضاً عن  $k \rightarrow \infty$  إذا كانت  $d \rightarrow 0$  في هذه الحالة كذلك تقترب الهندسه الهذلوليه من الهندسه الإقليديه، لذلك إذا كانت الأبعاد صغيرة تصدق روابط الهندسه الإقليديه في الهندسه الهذلوليه، حتى إذا كانت رؤس المثلث ثلاث كواكب بعيدة بينما طول أضلاع هذا المثلث بالقياس الى k صغيرة يبقى الفضاء ظاهره و أبعاده تقريباً إقليديه.

## قضيه إنجل Engel Theorem

وجود المثلث القائم الزاويه مع المعامل المرسومة عليه في الشكل رقم 1 إذن و فقط إذن وجود رباعي أضلاع لامبرت مع المعامل المرسومة عليه في الشكل رقم 2



الشكل رقم 2

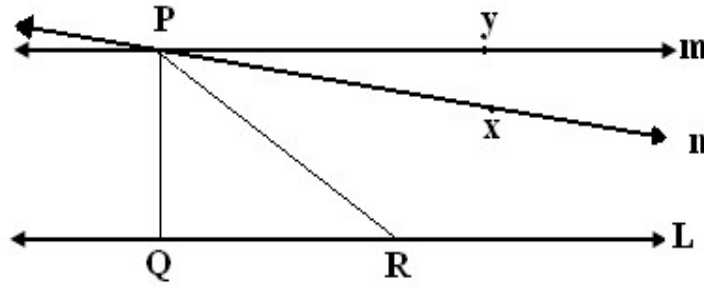
الشكل رقم 1

نذكر هذه القضية هنا بلا برهان و يمكن مشاهدة برهان هذه القضية في المصادر، ذكرناها هنا فقط للتذكير بوجود أستلزام منطقي بين عناصر هذه الهندسه.

## بعض قضايا الهندسة الهذلولية

من خلال هذه القضايا سنتعرف على كيفية الأستعانة بمسلمة التوازي في الهندسة الهذلولية لإثبات قضايا هذه الهندسة، قضايا لا يمكن إثباتها و لا تحقيقها في الهندسة الإقليدية، لكن من خلال هذه المسلمة يمكن إقامة برهان على هذه القضايا و إعطائها بعداً عملياً في الفضاء الهذلولي. هذه القضايا هي:

**القضية 1:** يوجد مثلث مجموع زواياه أقل من 180 درجة



**البرهان:** نفرض ان p نقطه لا على المستقيم L استناداً على مسلمة التوازي في الهندسه الهذلوليه  
نرسم مستقيمان موازيان للخط L من النقطه p نرمز لهما m و n

$$\text{ننتخب R بحيث : } \angle QRP < \angle xpy$$

$$\text{لأن المستقيم PR داخل الزاويه QPx : } \angle QPR < \angle QPx$$

$$\angle QPR + \angle QPx < \angle xpy + \angle QPx = 90^\circ$$

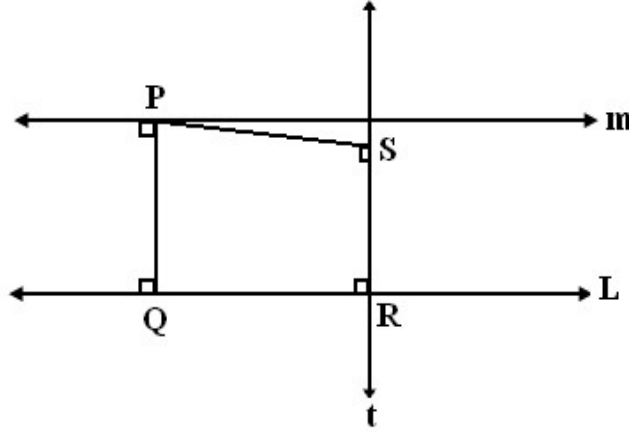
$$\angle QPR + \angle QPx < 90^\circ$$

أي مجموع زاويتان من المثلث القائم الزاويه  $\triangle PRQ$  أقل من 90 درجة و بالتالي مجموع زوايا المثلث  $\triangle PRQ$  أقل من 180 درجة.

أحد نتائج هذه القضية هي عدم وجود مستطيل في الهندسه الهذلوليه (المستطيل مجموع زواياه الداخليه 360 درجة)

القضية 2: في الهندسة الهلوليه، من أي نقطة لا على المستقيم L، يمكن مرور على الأقل مستقيمان يوازيان المستقيم L

البرهان:



- من النقطة P نرسم عمود PQ على المستقيم L، و كذلك من هذه النقطة نرسم المستقيم m عمود على PQ
- ننتخب النقطة R على المستقيم L و منها نرسم المستقيم t عمود على L
- من النقطة P نرسم العمود PS عمود على t

المستقيم m و العمود PS غير منطبقان لأن، لو كانت S منطبقه على m ففي هذه الحالة  $\square PSRQ$  مستطيل، و قد برهننا على عدم وجود مستطيل في الهندسة الهلوليه (مجموع زواياه 360 درجة لأن مجموع زوايا المثلث أقل من 180 درجة)

إذن: المستقيمان PS و m موازيان للمستقيم L (ليست هذه القضية برهان مطلق لمسلمة التوازي في الهندسة الهلوليه، هذا البرهان كان بالإستناد على رباعي لامبرت و يعتمد هو الآخر على مسلمة التوازي)

القضية 3: في الهندسة الهذلولية، إذا كان المستقيمان  $L$  و  $L'$  موازيين، على الأكثر هناك نقطتان

على  $L$  بنفس الفاصلة من  $L'$

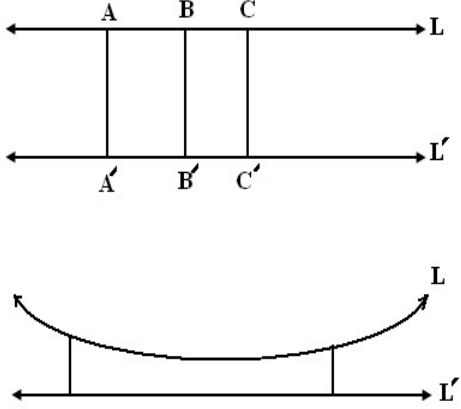
البرهان:

نفرض أن هناك نقطة ثالثة على  $L$  هي كذلك بنفس الفاصلة من

$L'$ . الرباعي  $BB'AA'$  و  $BB'CC'$  و  $ACA'C'$  هنّ

رباعي ساكري ( في رباعي ساكري الزوايا المجاورة للقاعده

قائمه و الأضلاع المقابله لهذه الزاويتان متساويتان)



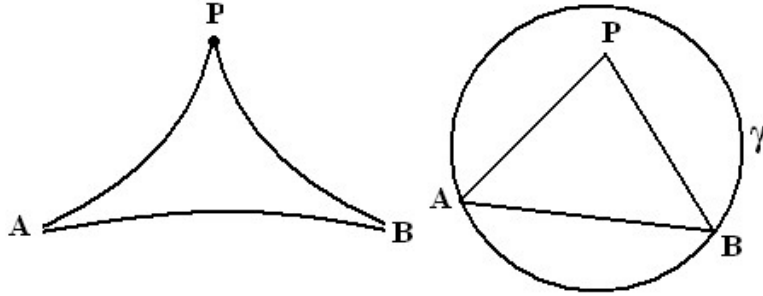
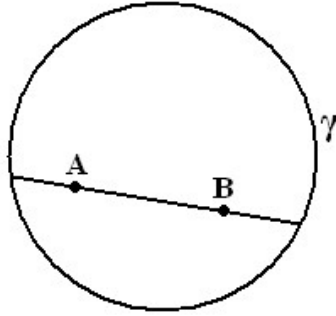
$$\left. \begin{array}{l} AA' = BB' \\ BB' = CC' \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle AA'C = \angle CC'A \\ \angle B'BC = \angle C'CB \\ \angle A'AB = \angle B'BA \end{array} \right\} \Rightarrow \angle B'BC = \angle B'BA$$

هذه الزاويتان مكملتان لذلك جميع رباعيات ساكري في هذا الشكل هي مستطيلات و لا وجود

للمستطيل في الهندسة الهذلولية و هذا تناقض، إذن A و B و C لسنّ بنفس الفاصلة من  $L'$ .

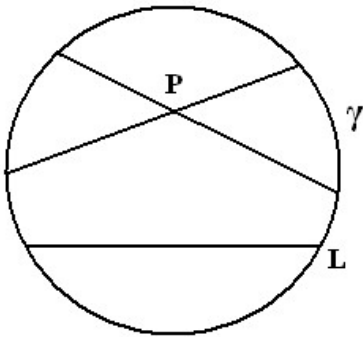
## نموذج بلترامي – كلاين (Klein – Beltrami Model)

هذا النموذج عبارة عن دائرة  $\gamma$  (دائره مطلقه) مركزها  $O$  و نصف قطرها  $R$  واقعة على الصفحة الإقليديه. داخل هذه الدائره هو عبارة عن مجموعة النقاط  $X$  الواقعة داخل هذه الدائره بحيث:  $X < OR$ . في هذا النموذج النقاط داخل الدائره هي نقاط الصفحة الهذلوليه، كذلك أوتار هذه الدائره في هذا النموذج هي خطوط الصفحة الهذلوليه. في هذا النموذج النقطتان  $A$  و  $B$  متميزتان داخل الدائره  $\gamma$  و هناك وتر وحيد يمرّ من كلا هاتين النقطتين. في هذا النموذج النقاط الواقعة على محيط الدائره هي نقاط مثاليه ولا تمثل نقاط الصفحة الهذلوليه.



الصفحة الهذلوليه

نموذج بلترامي- كلاين

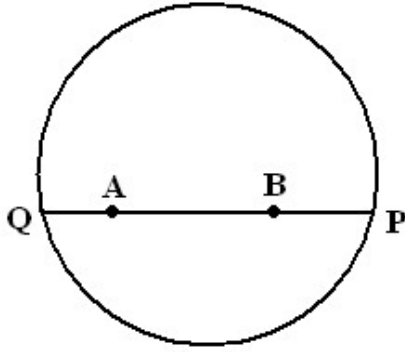


في الشكل المقابل الوتران المازان من النقطة  $P$  يوازيان الوتر  $L$  من الدائره  $\gamma$  (يجب التذكير بأن الصيغه المعدله لمسلمة التوازي في الهندسه الهذلوليه هي: من نقطه لا على مستقيم معلوم يمكن مرور أكثر من مستقيم يمرّ من هذه النقطه و لا يقطع المستقيم المعلوم)

يستند نظام القياس في هذا النموذج على طول المستقيم و قيمة الزاويه (زاويتان مساويتان إذا كانت قيمة كل زاوية تساوي الأخرى، و مستقيمان مساويان إذا كان طول كل مستقيم يساوي الآخر) لا يمكن الأكتفاء بطول المستقيم في هذا النموذج كما هو الحال في نموذج الصفحة الإقليدية، و حتى لا يأخذ كل مستقيم (خط) طول معين أقلّ أو يساوي نصف قطر الدائره  $\gamma$ ، لأن هذا يتنافى مع مفهوم اللاتناهي في هذا النموذج، يجب إعطاء الطول أو الفاصله تعريفاً جديداً.

تعريف الفاصله في هذا النموذج بالشكل التالي:

نفرض أن  $\overline{AB}$  هي الفاصله الإقليديه بين A و B إذن الفاصله في هذا النموذج هي:

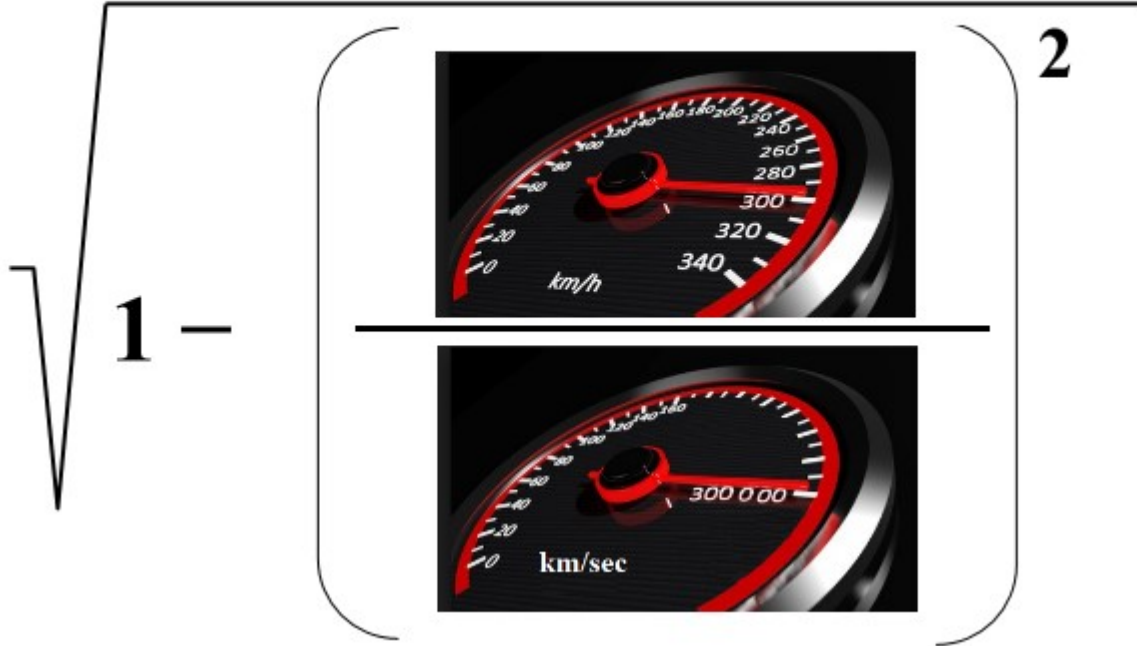


$$d(AB) = \frac{1}{2} \left| \log \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{BP} \cdot \overline{AQ}} \right|$$

هناك نموذج آخر بأسم نموذج بوانكاريه Poincaré Model أطلب من القارئ مراجعته و مطالعته. جميع نماذج الصفحة الهلولويه متشاكله (Isomorphs) مع بعضها. الغرض من عرض نموذج بلترامي- كلاين و التذكير بنموذج بوانكاريه هو لمعرفة هذه النماذج الهندسية التي يمكن من خلالها تبسيط الفكره الأساسيه التي يصعب تجسيدها و تصورها عملياً، و كما لاحظنا كيف ظهرت بعض الخواص الهندسيه و أخذت تعاريف جديده تتناسب مع المسلمات والقضايا الهندسيه للفكره الأساسيه، هذه النماذج تسوقنا لإثبات التواءم بين الهندسه الإقليديه و اللاتقليديه. نموذج بسيط وتعاريف بسيطه متوائمه مع الواقع تسوقنا لمفاهيم و أمور جديده بعض الأحيان يصعب تصورها و حتى إدراكها كظهور النقطه المثاليه في هذا النموذج و كيفية رفع إشكالية الطول و الفاصله، فعلى سبيل المثال الفاصله بين A و B عندما تسعى B نحو P تصبح مالانهايه.



1



# النسبية الخاصة



## النسبية الخاصة

### الأصول التي بُنيت عليها نظرية النسبية

هناك فرضيات و مسلمات و مبادئ و راء نظرية النسبية، ذات طابع أصولي لهذه النظرية. من هذه الفرضيات ما يخص النسبية الخاصة و منها ما يخص النسبية العامة. لكن هناك مسلمات و مبادئ لها تأثير عميق على هذه النظرية و إن كانت هذه المسلمات و المبادئ غير فيزيائية، كمبدأ ماخ و مسلمة التوازي في الهندسة اللا إقليدية. الفرضيات و المبادئ التي أستعانت بها هذه النظرية هي:

### فرضيات النسبية الخاصة:

- قوانين الفيزياء هي نفسها في كافة المراجع العطالية
- سرعة الضوء في الفراغ مستقلة عن حركة المصدر الضوئي

### مبدأ الكوسومولوجيا Cosmological Principle :

- بمقياس واسع جداً ينصّ هذا المبدأ على أن: الكون متجانس و موحد الخواص.

### مبدأ ماخ:

أطلق أشتاين على مجموعه من أفكار أرنست ماخ مبدأ ماخ و هذه الأفكار هي:

- الفضاء في ذاته لا شئ سوى روابط أنتزاعية بين فواصل المادة.
- الكتلة العطالية لأي ذرة هي نتيجة نوع من التفاعل بين كتلة هذه الذرة و كلّ الكتلة الموجودة في الكون.
- الشئ المهم في الميكانيك هو الحركة النسبية للكتلة جميعها.
- أي جسم في الخلاء (أو الفراغ) لا يملك أي خاصية هندسية.
- المادة هي التي تعين الهندسة، و لا هندسة بلا مادة.

### مسلمة التوازي:

في الهندسة الإقليدية: من نقطة لا على مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد يوازي المستقيم المفروض.

في الهندسة الهذلولية: من نقطة لا على مستقيم يمكن رسم أكثر من مستقيم يوازي المستقيم المفروض.

في الهندسة الإهليلجية: من نقطة لا على مستقيم لا يمكن رسم مستقيم يوازي المستقيم المفروض.

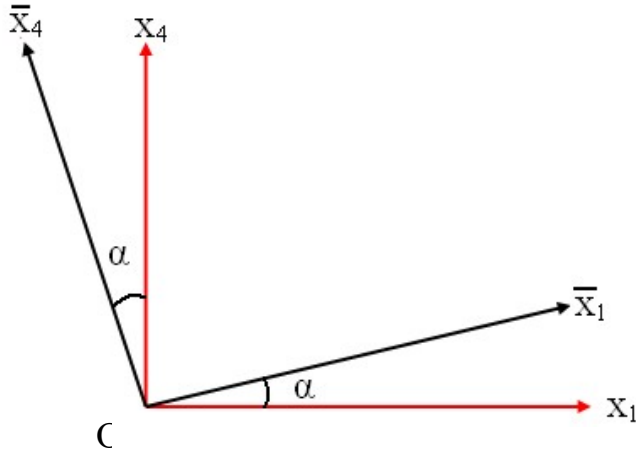
## مفهوم المراقب في النسبية

المراقب (الناظر أو الملاحظ أو الراصد) في النسبية هو عبارة عن مجموعة لا متناهية من الساعات موزعة في الفضاء، متزامنة مع بعضهن، وكلُّ بالنسبة إلى الأخرى ساكنة. إنَّ يجب إزالة التصور الخاطئ من الالتباس بين اصطلاح "القياس" و "المشاهدة".

هل هناك طول و زمان مطلق في النسبية؟ نعم، طول قضيب ساكن كمية مطلقة، و هذا الطول ثابت بالنسبة إلى كل مراقب في مرجع عطالة. يعني لو عمد كل مراقب عطالة على تحول القضيب الموجود في مرجعه، إلى قضيب ساكن، ثم قاموا بقياس طول القضيب، لوجدوا إن هذا الطول مساوي في جميع المراجع. كذلك بالنسبة إلى الساعات.

## تحويلات لورنتز

تحويلات لورنتز هي عبارة عن روابط تربط بين إحداثيات مرجعين، لإستنتاج هذه الروابط نقوم بدوران محور  $\bar{x}_1$  بقيمة  $\alpha$  (درجه) بالنسبة الى المحور  $x_1$  و بموازات الصفحه  $x_4$  و  $x_1$  . في هذا الدوران المحوران  $x_2$  و  $x_3$  ثابتان، كذلك مركز الأحداثي ثابت.



$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 \cos \alpha + x_4 \sin \alpha \\ \bar{x}_4 = -x_1 \sin \alpha + x_4 \cos \alpha \\ \bar{x}_2 = x_2 \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

الآن نستعين بطريقة تنسب الى منكوفسكي في هذه الطريقة نستبدل t زمان كل حادثه في المرجع S بإحداثيه خياليه هي  $x_4 = ict$  في هذه الرابطه  $i = \sqrt{-1}$  و تصبح إحداثيات الفضاء  $(z, y, x)$  بهذا الشكل:

$$ict = x_4 \quad \text{و} \quad z = x_3 \quad \text{و} \quad y = x_2 \quad \text{و} \quad x = x_1$$

لذلك لأي حادثه هناك أربعة إحداثيات. إذن يمكن كتابة معادلات الدوران بهذا الشكل:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \alpha + ict \sin \alpha \\ ict \bar{t} = -x \sin \alpha + ict \cos \alpha \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \end{cases}$$

تعبير هذه المعادله عن صفحه ساكنه في المرجع  $\bar{S}$  و لجميع مقادير  $\bar{t}$  معادله هذه الصفحه هي:

$$\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} = 0$$

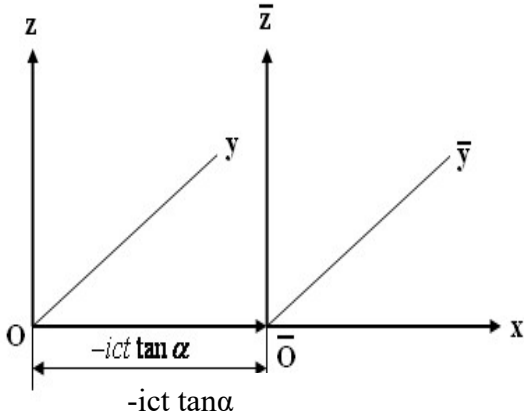
معادلة هذه الصفحة في المرجع S في كل لحظة من t بهذا الشكل:

$$(\bar{a} \cos \alpha)x + \bar{b}y + \bar{c}z + \bar{d} + ict\bar{a} \sin \alpha = 0$$

إذا كان  $\bar{a} = \bar{b} = \bar{d} = 0$  فهذا سطح صفحة الإحداثي  $\bar{O} \bar{x} \bar{y}$  معادلة هذه الصفحة في المرجع S هي الصفحة  $z = 0$  هذا هو سطح الصفحة xyO إذا كان  $\bar{a} = \bar{b} = \bar{d} = 0$  فسطح الصفحة  $\bar{O} \bar{x} \bar{y}$  و معادلتها في المرجع S هي:

$$x = -ict \tan \alpha$$

هذه هي صفحة موازيه للصفحة xyO و بمقدار  $-ict \tan \alpha$  تم انتقالها في امتداد المحور xO.



نستنتج من هذا ان معادلات لورنتز هي حالة خاصة من إحداثيات المرجع  $\bar{S}$  ، ناتجه من انتقال المرجع S في امتداد المحور xO و بفاصلة  $-ict \tan \alpha$  في كل لحظة t.

إذا كانت سرعة انتقال المرجع  $\bar{S}$  بالنسبة الى المرجع S تساوي u إذن:

$$u = -ic \tan \alpha$$

من هذه المعادلة نستنتج أن الزاوية  $\alpha$  فرضية و ترتبط بسرعة انتقال الإحداثي إذن:

$$\tan \alpha = \frac{iu}{c}$$

من بعض التحويلات  $\left( \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \right)$  المثلثاتيه نصل الى:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\sin \alpha = \frac{iu/c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

نضع هذه الروابط في المعادلات

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \alpha + ict \sin \alpha \\ ict \bar{t} = -x \sin \alpha + ict \cos \alpha \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \end{cases}$$

النتيجة النهائية لتحويلات لورنتز هي:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \\ \bar{t} = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

إذا كانت قيمة  $u$  بالنسبة إلى  $c$  صغيرة جداً تصبح هذه المعادلات تقريباً:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - ut \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = z \\ \bar{t} = t \end{cases}$$

هذه المجموعة من المعادلات تعرف بتحويلات غاليليو، و يستعان بها في الفيزياء الكلاسيكية لربط حوادث و وقائع حادثتان لمرجعين مختلفين. في الفيزياء الكلاسيكية لن نطرح الرابطة  $\bar{t} = t$  و ذلك لأنها بديهية، لأن الزمان في الفضاء الكلاسيكي مطلق.

## أهم نتائج تحويلات لورنتز:

### النتيجة الأولى: إنكماش الطول

■ يحدث إنكماش الطول في جهة حركة الجسم، بينما أبعاد الجسم العمودية على جهة الحركة تبقى بدون تغيير.

نفرض قضيب صلب على المحور  $\bar{x}$ ، من المرجع الساكن  $\bar{S}$ ، إنتهائين هذا القضيب في  $\bar{x} = \bar{x}_1$  و  $\bar{x} = \bar{x}_2$  طول هذا القضيب في المرجع  $\bar{S}$  هو:

$$\bar{L} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$$

إستناداً على تحويلات لورنتز، في لحظة  $t$ ، طرفين هذا القضيب في المرجع  $S$  هما في  $x = x_1$  و  $x = x_2$ ، الرابطة بين إحداثيات طرفين القضيب بين هذين المرجعين هي:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{و} \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

طول القضيب في المرجع  $S$  هو  $L = x_2 - x_1$  إذن:

$$L = \bar{L} \times \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

إنكماش الطول هذا هو ليس نتيجة تغيرات فيزيائية على الجزيئات كما هو الحال في الانقباض و الإنبساط الحراري، وإنما هو نتيجة تغير الرابطة بين طول القضيب و وسيلة القياس التي يقاس بها الطول.  $\bar{L}$  عبارة عن طول القضيب المُقاس بمسطرة هي ساكنة بالنسبة للقضيب، بينما  $L$  طول القضيب المُقاس بمسطرة هي ليست ساكنة بالنسبة لهذا القضيب. كذلك تمّ قياس  $\bar{L}$  مستغنين عن ساعة لقياس الزمن، بينما قياس  $L$  يستلزم ساعة لتزامن قياس طرفي القضيب. في الفيزياء الكلاسيكية كلا هذان القياسان ذي نتيجته مساويه، حيث كان التصور بأن الطول هو صفة ذاتية للجسم، لكن أتضح الآن بأن الطول يعرف بالطريقة التي يتم بها قياسه.



## النتيجة الثانية: إتساع الزمن

إذا كانت الساعة في مرجع ساكنة بالنسبة للمراقب في ذلك المرجع، الزمن في تلك الساعة هو الأسرع، و إذا كانت الساعة ذات سرعة  $v$  بالنسبة للمراقب فإن الزمن سيتباطئ بالنسبة لهذا المراقب

$$\text{بنسبة } \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

زمني  $\bar{t}_1$  و  $\bar{t}_2$  هما لحادثتان في المرجع  $S$  تمّ قياسهما بساعة ساكنة بالنسبة للمرجع  $S$ , هذين الزمنين لهذه الحادثتين المقاسة بساعة في المرجع  $S$  المتحرك بسرعة  $v$  هما  $t_1$  و  $t_2$ . إذن إستناداً على تحويلات لورنتز:

$$t_2 = \frac{\bar{t}_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{و} \quad t_1 = \frac{\bar{t}_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = (t_1 - t_2) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta \bar{t} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

## النتيجة الثالثة: جمع السرعة النسبية

إذا كانت سرعة قطار بالنسبة للأرض  $u$  و سرعة مسافر داخل القطار (بالنسبة للقطار)  $\bar{u}$  من الفيزياء الكلاسيكية سرعة المسافر بالنسبة للأرض  $v$  هي:

$$v = \bar{u} + u$$

من تحويلات لورنتز

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \bar{u}\bar{t} \\ \bar{t} &= \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x - ut = \bar{u}\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \Rightarrow x = \frac{u + \bar{u}}{1 + \frac{u\bar{u}}{c^2}}t$$

النتيجة النهائية من تحويلات لورنتز هي:

$$x = \frac{u + \bar{u}}{1 + \frac{u\bar{u}}{c^2}}t$$

إذا كانت سرعة المسافر بالنسبة للأرض  $v$ ، إذن الفاصله التي يقطعها هذا المسافر بالنسبة للأرض هي  $x = vt$  إذن:

$$v = \frac{u + \bar{u}}{1 + \frac{u\bar{u}}{c^2}}$$

إذا أستبدلنا سرعة القطار و سرعة المسافر بنبضات ضوئية ( $u = \bar{u} = c$ ) فالسرعة النسبية لهذين المصدرين تبقى نفسها سرعة الضوء، و هذا أحد الدلائل على أن سرعة الضوء مطلقة لا تخضع للمرجع، أي سرعة الضوء مستقلة عن سرعة مصدر الضوء.

## ديناميك النسبية الخاصة

أهم رابطة في ديناميك النسبية الخاصه الرابطة:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

في هذه الرابطة  $m_0$  الكتله الكلاسيكيه أو كتلة السكون في مرجع العطاله  $\bar{S}$ ، و  $m$  الكتله النسبيه في المرجع  $S$  و سرعة الجسم ذو الكتله  $m$  بالنسبه للمرجع  $S$  هي  $u$ .

الطاقة الحركية (kinetic energy) في الميكانيك النيوتني هي: شغل قوة خارجية لوصول السرعة من الصفر الى  $u$ . إذا كانت الطاقة الحركية  $K$  و القوة  $F$  و تغير المسافة  $dx$  إذن:

$$K = \int_0^u F dx = \int_0^u m_0 \frac{du}{dt} dx = \int_0^u m_0 du \frac{dx}{dt} = m_0 \int_0^u u du = \frac{1}{2} m_0 u^2$$

في الميكانيك النيوتني الكتلة لا تتغير مع السرعة، بينما في ميكانيك النسبية تتغير الكتلة مع تغير السرعة. لذلك الطاقة الحركية في النسبية الخاصة هي:

$$K = \int_0^u F dx = \int_0^u \frac{d}{dt} (mu) dx = \int_0^u d(mu) \frac{dx}{dt} = \int_0^u (mdu + udm) u = \int_0^u (mudu + u^2 dm)$$

في هذه الرابطة  $m$  و  $u$  متغيرات و الرابطة بينهن هي:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

من هذه الرابطة نحصل على:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow m^2 c^2 - m^2 u^2 = m_0^2 c^2$$

من تفاضل هذه الرابطة، وتقسيمها على  $2m$  نصل الى:

$$2mc^2 dm - 2m^2 u du - 2mu^2 dm = 0 \Rightarrow m u du + u^2 dm = c^2 dm$$

الطرف الأيسر في هذه الرابطة هو نفسه تحت التكامل إذن:

$$K = \int_0^u c^2 dm = c^2 \int_{m_0}^m dm = mc^2 - m_0 c^2$$

بما أن  $E = mc^2$  الطاقة الكلية للذرة لذلك:

$$E = m_0 c^2 + K$$

$m_0 c^2$  هي طاقة السكون، أي طاقة سكون ذرة في حالة  $u = 0$  و  $K = 0$ .

تتساوى الطاقة الحركية النيوتنية و النسبية في حالة  $\frac{u}{c} \ll 1$  و ذلك:

$$K = mc^2 - m_0 c^2 \Rightarrow K = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} c^2 - m_0 c^2 \Rightarrow K = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

بما أن:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)=\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{u}{c}\right)^4+\dots-1\right]\approx\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2$$

لذلك\*:

$$K=m_0c^2\times\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}m_0u^2$$

من هذه المعادلة يمكن إستنتاج هذه النتيجة الرياضية، بأن النظرية النسبية هي حدّ النظرية النيوتنية عندما تسعى السرعة نحو سرعة الضوء.

\* إستنتاج هذه الرابطة بهذه الصورة :

متتالية تايلور (Taylor series) لهذه الدالة  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$  حول الصفر مع فرض  $x=\frac{u^2}{c^2}$  هي :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

متتالية تايلور

$$f(0)=1$$

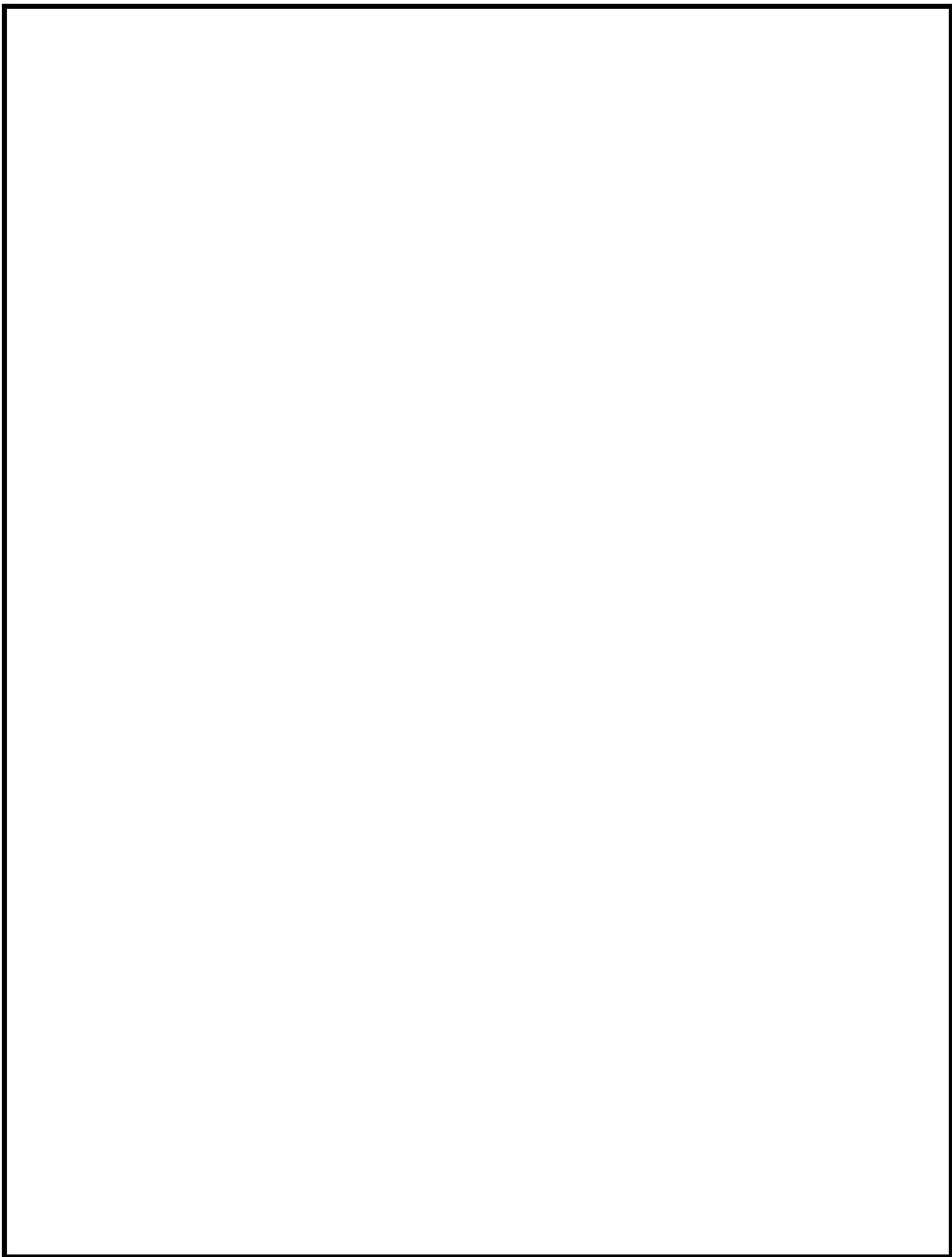
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}}\Rightarrow f''(0)=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\dots$$

نضع  $x=\frac{u^2}{c^2}$  في هذه الرابطة النتيجة :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{u}{c}\right)^4+\dots$$



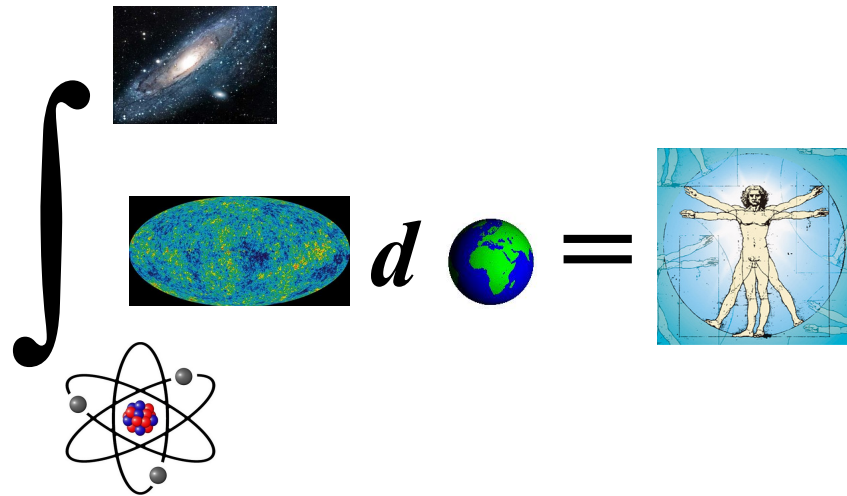
*Galaxy*

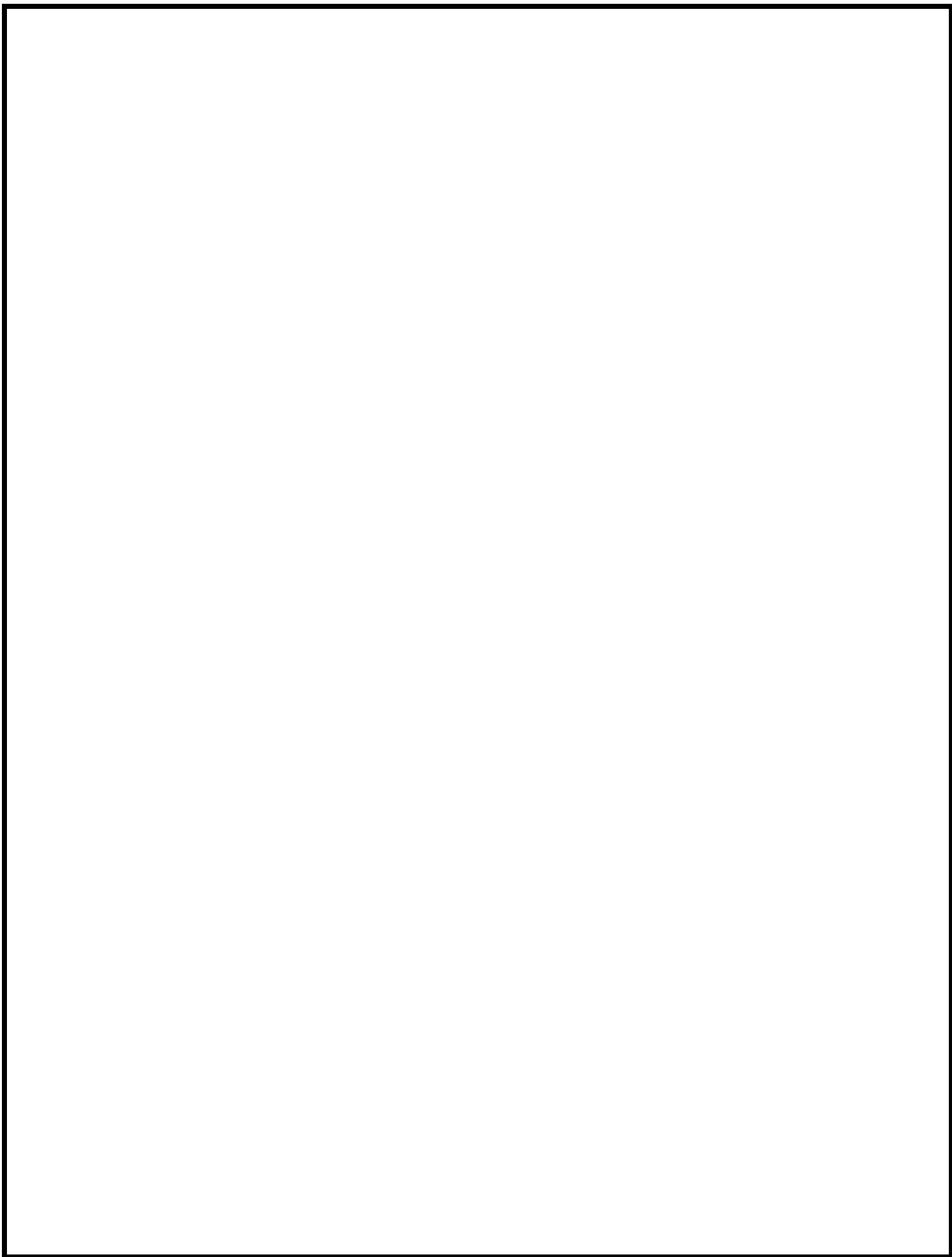


Universe *d* Earth = Human Being

*Atom*

# النسبية العامة







## السطوح الدورانية

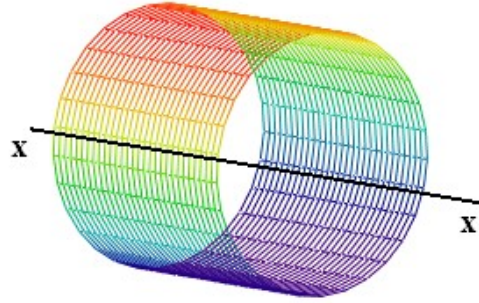
لبسط و فهم نظرية النسبية العامة لابد من مطالعة السطوح الريمانية و التسلط على العمليات الحسابية التنسورية. مطالعة السطوح الريمانية بكل جوانبها يستطلب وقت و جهد لا يسع لكتاب يتناول النسبية العامة، لكن من خلال شرح و توضيح الأعمال الحسابية على التنسور يمكن لمس معالم الهندسة و السطوح الريمانية، حيث بدأنا بسطوح هندسية منتظمة يمكن تصورها و لمسها وهذا سيساعدنا في تعميم مفهوم الإنحناء و التقوس و نقله من هذه السطوح الهندسية البسيطة الى الفضاء الرباعي الأبعاد. هذه السطوح البسيطة هي السطوح الدورانية و هي أحد أهم مباحث الهندسة التفاضلية و هي سطوح ثلاثية الأبعاد في فضاء إقليدي. من خلال مفاهيم و قضايا الهندسة التفاضلية يمكن تعيين و محاسبة إنحناء هذه السطوح، و إثتقاق معادلات جيوديسية المنحنيات الواقعة على هذه السطوح (كذلك محاسبة سائر المقادير الهندسية كالطول، و الحجم، و المساحة). يعتبر الإنحناء و الجيوديسي من أهم مفاهيم و أدوات النسبية العامة، حيث المادة تقوس الفضاء من ثم لا خطوط مستقيمة و إنما خطوط منحنية تخضع (و تخصّ ) لهذا الفضاء لتكوّن أقصر فاصلة بين نقطتين من هذا الفضاء. ليست هذه السطوح الدورانية التي سنذكرها هي كل السطوح، و إنما أنتخبنا من بين السطوح الدورانية ما هو أسهل في المعادلات و المحاسبات. لو أستغينا عن السطوح الدورانية و أستبدلناها بالسطوح الغير منتظمة و اللا متناظرة لكانت المعادلات و المحاسبات أطول و أعقد و ربما لخرجنا من إطار البحث. التناظر الموجود في المعادلات يساعد في أختصار و تبسيط المحاسبات على التنسور. هذه السطوح هي ثلاثية الأبعاد لكن في الهندسة التفاضلية يمكن الأستعانة بالإحداثيات المنحنية الذات بعدان.

لا يمكن نقل أو تصور السطوح الدورانية (أو كل سطح ثلاثي الأبعاد) في فضاء رباعي الأبعاد، و ليس لهذه الأشكال أي دور في نظرية النسبية، و ما وجودها هنا إلا لشرح و بسط بعض مفاهيم رياضيات النسبية العامة، و ذلك بالأستفادة من معادلاتها.

السطح الدوراني Surface of revolution هو السطح الناتج من دوران منحن مسطح حول محور. الدالة التي يرسم بها هذا النوع من السطوح على إحداثي X,Y,Z هي:

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \phi \\ y = f(\theta) \sin \phi \\ z = h(\theta) \end{cases}$$

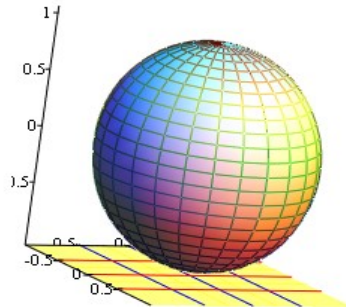
في الشكل الأسفل هذه الأسطوانة ناتجة من دوران مستقيم حول محور (x-x)، هذا المحور هو كذلك محور تناظر للسطح الناتج من هذا الدوران.



نماذج من السطوح الدورانية:

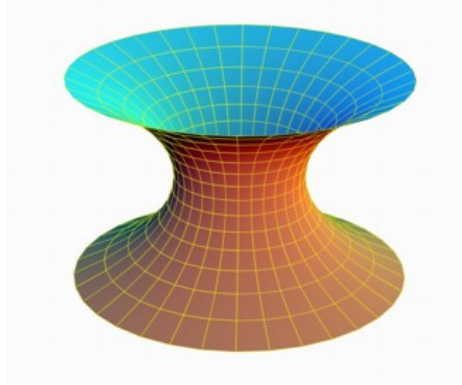
الكرة Sphere

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \phi \\ y = R \cos \theta \sin \phi \\ z = R \sin \theta \end{cases}$$



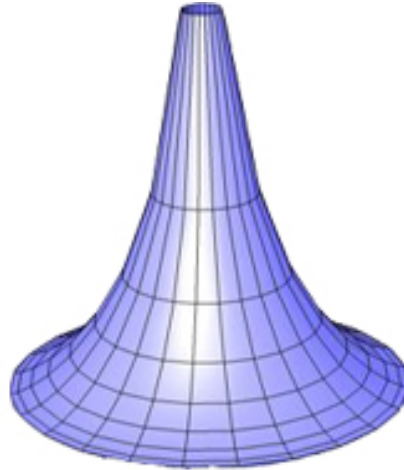
سطح سلسلي الشكل Catenoid

$$\begin{cases} x = R \cosh \frac{\theta}{2} \cos \phi \\ y = R \cosh \frac{\theta}{2} \sin \phi \\ z = \theta \end{cases}$$



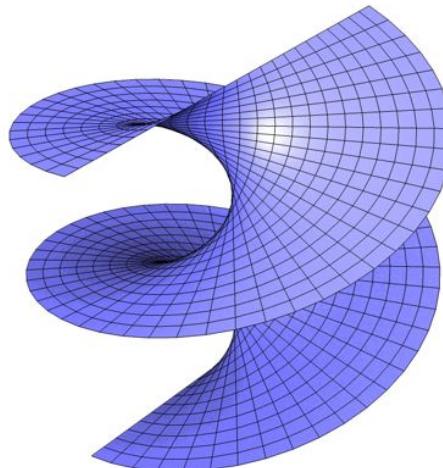
شبه كره Pseudosphere

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R (\cos \theta + \ln \tan \frac{\theta}{2}) \end{cases}$$



سطح لولبي Helicoid

$$\begin{cases} x = \theta \cos \phi \\ y = \theta \sin \phi \\ z = R \phi \end{cases}$$



## العناصر الأساسية لنظرية السطوح

في هذا الفصل سنعرّف التنسور تعريفاً رياضياً يتماشى مع مفاهيم الهندسة التفاضلية و رياضيات النسبية العامة، و المفهوم الفيزيائي مستتر في هذا التعريف.

إذا كان  $i=1,2$

$$a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2$$

$$a_i b^{ik} = a_1 b^{1k} + a_2 b^{2k}$$

إذا كان  $j=1,2$

$$g^{ij} g_{jk} = g^{i1} g_{1k} + g^{i2} g_{2k}$$

$$a_{ij} b^{ij} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=2}^2 a_{ij} b^{ij} = a_{11} b^{11} + a_{21} b^{21} + a_{12} b^{12} + a_{22} b^{22}$$

$$a_{ijk} b^{ijk} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ijk} b^{ijk} = a_{111} b^{111} + a_{112} b^{112} + a_{121} b^{121} + a_{122} b^{122} + a_{211} b^{211} + a_{212} b^{212} + a_{221} b^{221} + a_{222} b^{222}$$

يمكن تبديل الحروف

$$a_i b^i = a_j b^j = a_k b^k = a_1 b^1 + a_2 b^2$$

نفرض أن  $x_i$  و  $y_i$  إحداثيات نقطتين Q و P في فضاء N نكتب  $z_i = x_i - y_i$  و في هذه الرابطة  $z_i$  إحداثيات المتجهة QP، إذا كانت  $\bar{x}_i$  و  $\bar{y}_i$  إحداثيات هذه النقطتين في إحداثي آخر، إذا كانت إحداثيات هذه المتجهة QP في هذا الإحداثي الجديد  $\bar{z}_i$ ، الرابطه بين هذين الإحداثيين لهذه المتجهة هي:

$$\bar{z}_i = a_{ij} z_j$$

لأي مجموعة ذات  $N$  معمل، إذا كانت الإحداثيات في مرجع  $A_i$  و في مرجع آخر  $\bar{A}_i$  إذن:

$$\bar{A}_i = a_{ij} A_j$$

تعرف  $A_i$  بالمتجهة و تختصر بالحرف  $A$ .

لأي مجموعة ذات  $N^2$  معمل، إذا كانت  $A_i$  و  $B_i$  متجهتان، العبارة  $A_i B_j$  نتيجة التحويلات الى إحداثي آخر هي:

$$\bar{A}_i \bar{B}_j = a_{ik} a_{jl} A_k B_l$$

يمكن كتابة هذه الرابطة بهذا الشكل:

$$\bar{C}_{ij} = a_{ik} a_{jl} C_{kl}$$

هذه الرابطة عبارة عن إحداثيات تنسور رتبه (rank) ثانيه

لأي مجموعة ذات  $N^3$  معمل، يشكل  $D_{ijk}$  تنسور رتبه ثالثة لتحويلات ضرب ثلاث متجهات  $A_i B_j C_k$ ، رابطة التحويل هي:

$$\bar{D}_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} D_{lmn}$$

يجب التذكير بأن المتجهة عبارة عن تنسور رتبه أولى . للمتجهة أهمية بالغة في الفيزياء و الهندسة ، و أهمية التنسور تبرز في الفيزياء و الرياضيات المتقدمة .

## بعض الأعمال الرياضية على التنسور

إذا كان كل من  $A_{ij}$  و  $B_{ij}$  تنسور رتبة ثانيه، نتائج هذه الروابط كذلك تنسور من رتبة ثانيه:

$$A_{ij} + B_{ij} \quad \text{و} \quad A_{ij} - B_{ij}$$

التنسور هو عبارة عن ناتج ضرب عدة متجهات، إذن ضرب تنسورين من رتبة ثانيه، عبارة عن تنسور رتبة رابعه، و ضرب تنسور من رتبة ثانيه في تنسور من رتبة ثالثه، عبارة عن تنسور رتبة خامسه و هكذا. إذن نتيجة ضرب تنسورين، عبارة عن تنسور درجته هي مجموع درجات هذين التنسورين.

جمع أو ضرب تنسورين كما قلنا عبارة عن تنسور، و يكتب كذلك بهذه الصورة:

$$C_{jlm}^{ik} = A_j^i B_{lm}^k \quad \text{و} \quad C_{jk}^i = A_{jk}^i + B_{jk}^i$$

إذا كان التنسور  $A_{ijk}$  متناظر بالنسبة الى  $i$  و  $j$  فيمكن كتابته بهذه الصورة:

$$A_{ijk} = A_{jik}$$

إذا كانت كل معامل التنسور في مرجع مساوية صفر، فمعامل هذا التنسور في أي مرجع آخر هي كذلك تساوي صفر. تنسورين متساويين الرتبة، إذا كانت معاملها المتناظرة متساوية في مرجع، فمعامل هذين التنسورين هي متساوية في أي مرجع آخر.

هذه كذلك بعض الروابط الحسابية على التنسور:

$$(a^i b_i)^2 = a^i b_i a^j b_j$$

$$(a_{ij} b^i) c^j = a_{ij} b^i c^j$$

إذا كان الفضاء نوني اي:  $n=1,2,3,\dots,n$

$$a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 + a_4 b^4 + a_5 b^5 + \dots + a_n b^n$$

### إشتقاق الدوال

إذا كانت الدالة  $f(u^1, u^2)$  دالة إشتقاقية ذات متغيران  $u^1, u^2$  وهذان المتغيران كذلك عبارة عن دوال متغيره من المتغير  $t$  ، اذن:

$$f_{u^2 u^2} = f_{22}$$

$$f_{u^1 u^2} = f_{12}$$

$$f_{u^1 u^1} = f_{11}$$

إذا كان  $i=1,2,3$

$$df = f_i du^i$$

$$df = f_i du^i = f_1 du^1 + f_2 du^2 + f_3 du^3$$

هذا يعني إشتقاق بالنسبة للمتغيرات 1 و 2 و 3 مثلا إذا كانت هذه المتغيرات  $x, y, z$  و الدالة هي  $f(x, y, z)$  اذن:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

في حساب التانسور يرمز للإشتقاق بهذه الصيغة  $\Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\mu$  وهذه تعني إشتقاق بالنسبة للمتغير  $\rho$  كذلك

$$\Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\mu = \frac{\partial \Gamma_{\nu\sigma}^\mu}{\partial \rho}$$

تكتب هكذا:

## دلتا كرونكر

دلتا كرونكر Kronecker Delta عبارته عن تنسور تعريفه هكذا:

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

بعض روابط دلتا كرونكر

$$b^k \delta_k^i = b^i \quad \text{و} \quad a_i \delta_j^i = a_j \quad \text{و} \quad \delta_{ij} \delta^{jk} = \delta_i^k \quad \text{و} \quad \delta_i^j \delta_j^k = \delta_i^k$$

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{13}^1 & \Gamma_{14}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{13}^2 & \Gamma_{14}^2 \\ \Gamma_{11}^3 & \Gamma_{12}^3 & \Gamma_{13}^3 & \Gamma_{14}^3 \\ \Gamma_{11}^4 & \Gamma_{12}^4 & \Gamma_{13}^4 & \Gamma_{14}^4 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{23}^1 & \Gamma_{24}^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & \Gamma_{23}^2 & \Gamma_{24}^2 \\ \Gamma_{21}^3 & \Gamma_{22}^3 & \Gamma_{23}^3 & \Gamma_{24}^3 \\ \Gamma_{21}^4 & \Gamma_{22}^4 & \Gamma_{23}^4 & \Gamma_{24}^4 \\ \Gamma_{31}^1 & \Gamma_{32}^1 & \Gamma_{33}^1 & \Gamma_{34}^1 \\ \Gamma_{31}^2 & \Gamma_{32}^2 & \Gamma_{33}^2 & \Gamma_{34}^2 \\ \Gamma_{31}^3 & \Gamma_{32}^3 & \Gamma_{33}^3 & \Gamma_{34}^3 \\ \Gamma_{31}^4 & \Gamma_{32}^4 & \Gamma_{33}^4 & \Gamma_{34}^4 \\ \Gamma_{41}^1 & \Gamma_{42}^1 & \Gamma_{43}^1 & \Gamma_{44}^1 \\ \Gamma_{41}^2 & \Gamma_{42}^2 & \Gamma_{43}^2 & \Gamma_{44}^2 \\ \Gamma_{41}^3 & \Gamma_{42}^3 & \Gamma_{43}^3 & \Gamma_{44}^3 \\ \Gamma_{41}^4 & \Gamma_{42}^4 & \Gamma_{43}^4 & \Gamma_{44}^4 \end{bmatrix}$$

## علامت كريستوفل

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$$

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

$$2\Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$



## الشكل الأساسي الأول للسطح

لا أدخل في عمومية الموضوع بل أبدأ من السطوح الدوارانية

نفرض ان السطح دوراني و معادلته هي:

$$\begin{cases} x=f(u) \cos v \\ y=f(u) \sin v \\ z=h(u) \end{cases}$$

هندسياً الشكل الأساسي الأول للسطح هو  $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$  و كذلك هي الصيغة العمومية للسطوح.

مع العلم أن في السطوح الدورانية  $g_{12} = g_{21} = 0$

يجب التميز بين  $u$  في هذه الرابطة و  $u$  في معادلة السطح

$$ds^2 = g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2$$

في هذه الرابطة يمكن كتابة

$$du^1 = du$$

$$du^2 = dv$$

لأن المتغيران هنا فقط أثنان، ليس هنا 1 و 2 بمعنى أس.

للسطح الدواراني:

$$g_{11} = (f')^2 + (h')^2$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g_{22} = (f)^2$$

مميّزة الشكل الأساسي الأول:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = (f)^2 \left( (f')^2 + (h')^2 \right)$$

هذه بعض الأمثلة:

الكرة

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \phi \\ y = R \cos \theta \sin \phi \\ z = R \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\theta) = R \cos \theta \\ h(\phi) = R \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f' = -R \sin \theta \\ h' = R \cos \theta \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= f'^2 + h'^2 = R^2 \\ g_{22} &= f^2 = R^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow ds^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 \Rightarrow ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \cos^2 \theta d\phi^2$$

في هذه الرابطة  $dx_1 = d\theta$  و  $dx_2 = d\phi$ . كذلك هنا  $ds^2$  هي الفاصلة بين نقطتين على سطح كرة بقطر  $2R$  و على أقواس من دوائر بقطر  $2R$ ، و هي أقصر فاصلة بين نقطتين على سطح الكرة.

شبه الكرة

$$\left. \begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \left( \cos \theta + \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f(\theta) = R \sin \theta \Rightarrow f' = R \cos \theta \\ h(\theta) = R \left( \cos \theta + \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \Rightarrow h' = R \left( -\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} \right) \end{cases}$$

$$ds^2 = R^2 \cot^2 \theta d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

### الشكل الأساسي الثاني للسطح

هندسياً الشكل الأساسي الثاني للسطح هو بهذه الصورة  $II = b_{ij} du^i du^j$  و هو عبارة عن إنحراف

السطح في نقطة عن الصفحة المماسّة على السطح في تلك النقطة.

المعادلة العامة للسطح الدوراني كما ذكرناها هي:

$$\begin{cases} x = f(u) \cos v \\ y = f(u) \sin v \\ z = h(u) \end{cases}$$

معامل الشكل الأساسي الثاني للسطح:

$$b_{11} = \frac{f' h'' - h' f''}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}$$

$$b_{12} = b_{21} = 0$$

$$b_{22} = \frac{f h'}{\sqrt{f'^2 + h'^2}}$$

مميزة الشكل الأساسي الثاني:

$$b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

بعض الأمثلة للشكل الأساسي الثاني للسطح:

الكره

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \phi \\ y = R \cos \theta \sin \phi \\ z = R \sin \theta \end{cases}$$

$$II = R d\theta^2 + R \cos^2 \theta d\phi^2$$

شبه الكره

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R \left( \cos \theta + \ln \tan \frac{\theta}{2} \right) \end{cases}$$

$$II = -R \cot \theta d\theta^2 + R \sin \theta \cos \theta d\phi^2$$

## إنحناء غاوس

إنحناء غاوس في الإحداثيات المنحنية، يساوي النسبة بين مميزة الشكل الأساسي الثاني، الى مميزة الشكل الأساسي الأول أي:

$$K = \frac{b}{g} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

$$K = \frac{b}{g} = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

$$K = \frac{b}{g} = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - (\Gamma_{11}^r \Gamma_{22}^s - \Gamma_{12}^r \Gamma_{12}^s) g_{rs} \right]$$

$$K = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \Gamma_{11}^s}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^s}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^r \Gamma_{r2}^s - \Gamma_{12}^r \Gamma_{r1}^s \right] g_{s2}$$

إنحناء غاوس الكره:

$$K = \frac{R^2 \cos^2 \theta}{R^4 \cos^2 \theta} = \frac{1}{R^2}$$

إنحناء غاوس شبه الكره:

$$K = \frac{-R^2 \cos^2 \theta}{R^4 \cos^2 \theta} = -\frac{1}{R^2}$$

الصفحة في الإحداثيات الكارتيزية:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$II = 0$$

$$K = \frac{0}{1} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = f(u) \cos v \\ y = f(u) \sin v \\ z = h(u) \end{array} \right\} \Rightarrow K = \frac{-h'^2 f'' + f h' h''}{f(f'^2 + h'^2)^2}$$

إنحناء غاوس للسطوح الدورانية هو:

نتيجة: الإنحناء الغاوسي على السطوح الإهليلجية موجب (علامته زائد)، و على السطوح الهلولية سالب (علامته ناقص) و على سطح مستوي صفر.

طول المتقاصر أو الجيوديسي على سطوح ذات إنحناء موجب متناهي، و على سطوح ذات إنحناء سالب لامتناهي.

الإنحناءان الرئيسيان (principal curvature)  $k_1$  و  $k_2$  هما القيمة العظمى و الصغرى للإنحناء الناظمي (normal curvature) عند نقطة في سطح. الإنحناء الغاوسي في هذه النقطة يساوي حاصل ضرب هذان الإنحناءان أي:

$$K = k_1 k_2$$

عند أي نقطة على سطح، إنحناء المنحنيان الحاصلان من تقاطع صفتان متعامدتان مع هذا السطح في تلك النقطة هما  $k_1$  و  $k_2$ .

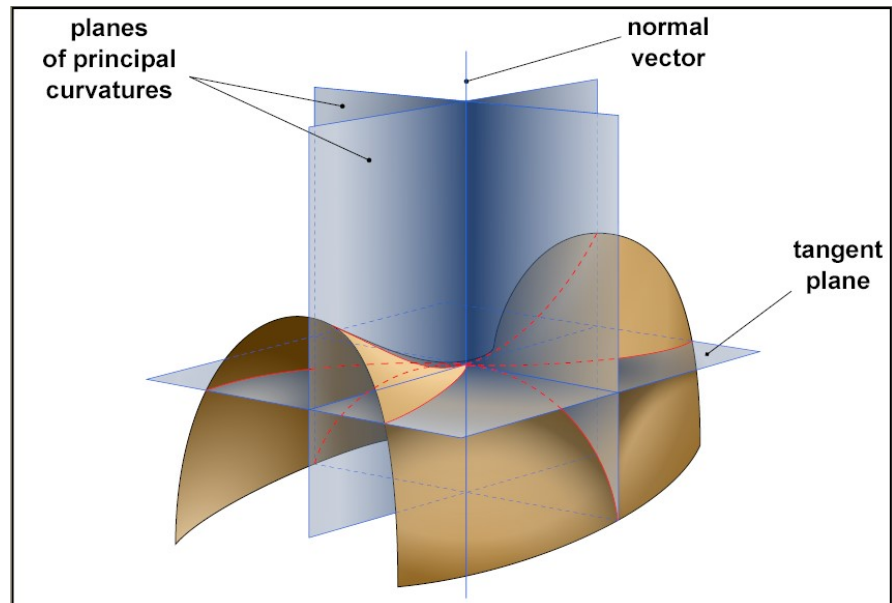
في هذا الشكل السرجي:

$$k_1 < 0 \text{ هلولي}$$

$$k_2 > 0 \text{ مكافئ}$$

إذن إنحناء هذا السطح

$$K < 0$$



علائم كريستوفل

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$$

في حالة  $g_{12} = g_{21} = 0$

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) = + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}$$

$$\Gamma_{121} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$$

$$\Gamma_{221} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$$

$$\Gamma_{112} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$$

$$\Gamma_{122} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \right) = + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}$$

بما أن  $g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$  لذلك:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = \frac{1}{g_{11}}$$

$$g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = \frac{1}{g_{22}}$$

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{21} \\ g^{12} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$g^{12} = g^{21} = - \frac{g_{12}}{g} \Rightarrow g_{12} = g_{21} = 0 \wedge g \neq 0 \Rightarrow g^{12} = g^{21} = 0$$

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left( \frac{g_{sj}}{\partial u^k} + \frac{g_{sk}}{\partial u^j} - \frac{g_{jk}}{\partial u^s} \right)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}$$

## مساحة السطح

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2$$

مثال: مساحة الكرة

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2$$

$$g = R^4 \cos^2 \theta$$

$$A = \iint R^2 \cos \theta d\theta d\varphi = R^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2$$

## طول قوس منحنى

طول قوس منحنى بين نقطتين  $t=a$  ,  $t=b$

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j}$$

من هذه الرابطة يتضح إنه  $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$  لذلك:

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2$$

## الإنحناء الجيوديسي

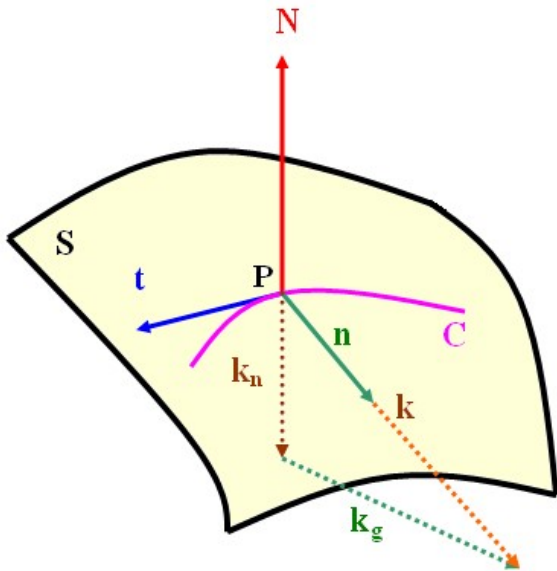
تقوس سطح فضائي في نقطة واقعه على السطح مثل النقطة  $p$  ، عباره عن متجهه جهتها في إتجاه القائم على هذا السطح. طول هذه المتجهه هو إنحناء المنحن في تلك النقطة.

تجزئة متجهة الإنحناء لمنحن على سطح الى متجهتين، عموديه و أفقيه، متجهة الإنحناء الأفقيه هي متجهة الإنحناء الجيوديسي  $k_g$

$$k_g = \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) r_n$$

إنحناء جيوديسي منحن على سطح يساوي:

$$k_g = \sqrt{g} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \\ \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} & \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \end{array} \right|$$



المنحني  $C$  على السطح  $S$  يمر من النقطة  $P$  متجهة الوحدة للمماس و الناطمي في النقطة  $P$  هما بالترتيب  $t$  و  $n$  ، التقوس في هذه النقطة :

$$k = \frac{dt}{ds} = \kappa n = k_n + k_g$$

$k_n$  متجهة التقوس الناطمي ، و  $k_g$  متجهة التقوس الجيوديسي للمنحني في النقطة  $P$  . و هما عناصر أو مكونات التقوس  $k$  .



## الجيوديسي

خط أو منحن متقاصر أو بعبارة أخرى مسار جيوديسي، هو عبارة عن مسير أقصر فاصلة بين نقطتين على سطح أو في الفضاء. وبتعبير آخر، هو منحن على سطح (أو في الفضاء) بحيث، إنحناء الجيوديسي لهذا المنحني على هذا السطح (أو في الفضاء) يساوي صفر. أي:

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0$$

في هذه المعادلة s متغير المنحن يصدق في هذه الرابطة:

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1$$

الطرف الأيمن في هذا التساوي هو مقدار ثابت و قد اخترناه هنا واحد.

- المنحنيات المتقاصره أو الجيوديسي في الصفحة هي خطوط مستقيمه و ذلك لأن:

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} = 0$$

كل علائم كريستوفل في الصفحة مساويه صفر ، لذا:

جواب هذه المعادلة الإشتقاقية عبارة عن خطوط مستقيمه.

المنحنيات المتقاصره أو الجيوديسي على الكره هي دوائر.

◆ الإحداثيات الشبه متقاصرة (Semi-geodesic coordinates)

$$g_{22} = G(u) \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad g_{11} = 1$$

$$ds^2 = (du^1)^2 + G(du^2)^2 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^1 \partial u^1}$$

تقوس غاوس في الإحداثيات نصف أو شبه متقاصرة

◆ الإحداثيات الإيزومترية أو المتقايسة (Isometric coordinates)

$$g_{11} = g_{22} = \rho^2 \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad \Rightarrow \quad ds^2 = \rho^2 (du^1)^2 + \rho^2 (du^2)^2$$

$$K = -\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial u^1 \partial u^1} + \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial u^2 \partial u^2} \right)$$

تقوس غاوس في هذه الإحداثيات :

## رياضيات النسبية العامة

إذا كانت  $(x, y, z)$  و  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  إحداثيات نقطتان مجاورتان في إحداثي كارتيزية، و  $(u, v, w)$  و  $(u + du, v + dv, w + dw)$  إحداثيات هذه النقطتين في إحداثي منحني، التحويلات بين هذين الإحداثيين هي:

$$z = z(u, v, w) \quad \text{و} \quad y = y(u, v, w) \quad \text{و} \quad x = x(u, v, w)$$

إذن:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw$$

إذا كانت  $ds^2$  الفاصلة بين هاتين النقطتين إذن:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

إذا وضعنا  $dx$  و  $dy$  و  $dz$  في هذه الرابطة نحصل على:

$$ds^2 = Adu^2 + Bdv^2 + Cdw^2 + 2Fdvdu + 2Gdwdu + 2Hdudv$$

المعامل  $A$  و  $B$  و  $C$  و غيرها هي دوال متغيراتها  $(u, v, w)$ . نكتب هذه الرابطة بهذه الصورة:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

كذلك في هذه الرابطة  $g_{ij}$  دوال متغيراتها  $x^i$  و  $x^j$ . يعرف الطرف الأيمن من هذه الرابطة، بمتريية فضاء ريمان.

نفرض أن  $x^i$  إحداثيات نقطة P في مرجع من فضاء نوني، و  $\bar{x}^i$  إحداثيات هذه النقطة في مرجع آخر من هذا الفضاء، ترتبط إحداثيات هذين المرجعين بهذه الرابطة:

$$\bar{x}^i = x^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

نفرض أن بمجاورة هذه النقطة هناك نقطة أخرى هي  $P'$  إحداثيات هذه النقطة في هذين المرجعين بالترتيب هي  $x^i + dx^i$  و  $\bar{x}^i + d\bar{x}^i$  بحيث:

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j$$

تعريف: أي متجهة أنتقالية تصدق عليها هذه الرابطة هي متجهة مخالفة للتغير (contra variant). أي:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j$$

كل متجهة مخالفة للتغير يمكن تعريفها في نقطة واحدة من الفضاء، فإذا عرفنا هذه المتجهة في أي نقطة من الفضاء، بحيث  $A^i$  هي توابع من  $x^i$  في هذه الحالة يمكن القول بوجود حقل متجهي مخالف للتغير في هذه الناحية من الفضاء.

الكمية التي لا تتغير قيمتها مع تغير المراجع هي لا متغير (invariant) و معادلتها في فضاء نوني هي:

$$A = \bar{A}$$

لا ترتبط A بأي متغير لذلك يمكن تعريفها في أي نقطة من الفضاء، إذن هي حقل لامتغير.

هناك متجهة أخرى تعرف بمتجهة، موافقة للتغير (covariant). إذا كانت  $B_i$  متجهة موافقة للتغير إذن:

$$\bar{B}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} B_j$$

في كتابة روابط المتجهات الموافقة و المخالفة للتغير يجب الدقة في وضع الدليل (index) في أعلى أو أسفل الحرف. نذكر بأن  $dx^i$  عبارة عن متجهة مخالفة للتغير، بينما  $x^i$  بمفردها هي ليست إحداثيات متجهة. لذلك نكتب الإحداثيات بصورة  $x^i$ ، عوضاً عن  $x_i$ .

الآن نعمم نظرية المتجهات لتشمل التنسور، إذا كانت  $A^i$  و  $B^j$  متجهتان مخالفتان للتغير، توجد  $N^2$  رابطة بصورة  $A^i B^j$  عبارة عن معامل تنسور مخالف للتغير و معادلته بهذا الشكل:

$$\bar{A}^i \bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^k B^l$$

إذا كانت  $A^i$  متجهة مخالفة للتغير و  $B_j$  متجهة موافقة للتغير، في حالة  $N^2$  معامل، الرابطة  $A^i B_j$  هي تنسور مختلط و معادلته بهذا الشكل:

$$\bar{A}^i \bar{B}_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^k B_l$$

التنسور  $A_{jk}^i$ ، هو تنسور مختلط رتبه ثلثه ذو خاصية موافقة و مخالفة للتغير، شريطة أن يصدق في هذه الرابطة:

$$\bar{A}_{jk}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} A_{st}^r$$

مثال: إذا كان  $A_i$  متجهة، إحداثيتها الموافقة للتغير هي:

$$A^i = g^{ij} A_j = A_i$$

من هذا المثال نستنتج: عدم الاختلاف بين المتجهة الموافقة و المخالفة للتغير.

إذا كانت الرابطة  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$  بين أي نقطتين مجاورتين (على سطح) أو في الفضاء، فهذه الرابطة هي مترية هذا الفضاء.

بما أن  $ds^2$  لا متغير، كذلك  $dx^i dx^j$  عبارة عن تنسور متناظر، لذلك  $g_{ij}$  عبارة عن تنسور موافق

للتغير وكذلك متناظر. التنسور المخالف للتغير، لهذا التنسور هو  $g^{ij}$ ، وجود هذا التنسور مشروط بأن:

$$g = |g_{ij}| \neq 0$$

نفرض  $A^j$  متجهة مخالفة للتغير، في نقطة من الفضاء، إذن:  $g_{ij} A^j$  هي متجهة موافقة للتغير نرمز لها  $A_i$  أي:

$$A_i = g_{ij} A^j$$

$A_i$  و  $A^i$  هُنَّ المعامل الموافقة و المخالفة التغير لمتجهة، بالنسبة الى المرجع المستعمل.

مثال: كيفية نقل الدليل من فوق و من الأسفل:

$$g^{ij} A_j = g^{ij} g_{jk} A^k = \delta_k^i A^k = A^i$$

$$A_{jk}^i = g_{jr} A_k^{ir}$$

$$g^{ri} g^{sj} g_{ij} = g^{ri} \delta_i^s = g^{rs}$$

$$A^2 = g_{ij} A^i A^j$$

## الإنتقال الموازي

إشتقاق  $\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k$  بالنسبة الى  $\bar{x}^j$  هو:

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial A_k}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} A_k$$

وجود الرابطة الثانية دليل على أن  $\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j}$  هي ليست تنسور. بما أن  $dx^i$  هي متجهة، فلو أن  $\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j}$

( كذلك تكتب هذه العبارة بهذا الشكل  $A_{i,j}$  ) كانت تنسور لأصبحت الرابطة  $dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j$  عبارة

عن متجهة، أو معادلة تنسورية. لحل هذه الأشكالية نستعين بمفهوم الأنتقال الموازي.

ننقل المتجهة  $A_i$  من النقطة P الى نقطة تجاورها هي  $P'$  دون تغير طول و جهة المتجهة. إحداثيات

أي متجهة بعد الأنتقال هي ليست كإحداثياتها قبل الأنتقال، إحداثيات هذه المتجهة بعد الأنتقال هي

$A_i + \delta A_i$  و إحداثيات الحقل المتجهي في النقطة  $P'$  هي  $A_i + dA_i$ . بما أن هذه المتجهتين لنقطة

واحدة في الفضاء، إذا نقصنا هذه المتجهتين من بعضهما فالنتيجة، المتجهة  $dA_i - \delta A_i$  إذن:

$$dA_i - \delta A_i = A_{i,j} dx^j$$

إستبدلنا  $A_{i,j}$  بالرابطة  $A_{i,j}$  بما أن  $dx^j$  متجهة، و كذلك الطرف الأيسر من هذه الرابطة متجهة

نستنتج بأن  $A_{i,j}$  هي تنسور (يجب التمييز بين , و ;). بهذه الطريقة تمكنا من تعريف الإشتقاق على

التنسور.

إذا كانت  $A_i$  متجهة في النقطة P تحت أنتقال موازي الى النقطة  $P'$  و  $B_i$  إحداثيات حقل متجهي

بالنسبة للمحور Y من الإحداثي في هذه الحالة:

$$B_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} A_j \quad \text{و} \quad A_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} B_j$$

الإنتقال الموازي للمتجهة  $A_i$  لا يترك أي تغير على  $B_i$  لذلك  $\delta B = 0$  (تغيرات B تساوي صفر) من هذا:

$$\delta A_i = \delta\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} B_j\right) \Rightarrow \delta A_i = \delta\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) B_j$$

$$\delta A_i = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k} dx^k B_j$$

بما أن  $B_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} A_j$  لذلك:

$$\delta A_i = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} A_l dx^k$$

للأختصار تكتب هذه الرابطة بهذا الشكل:

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}$$

تعرف هذه الرابطة بعلائم كريستوفل.

إذن:

$$\delta A_i = \Gamma_{ik}^l A_l dx^k$$

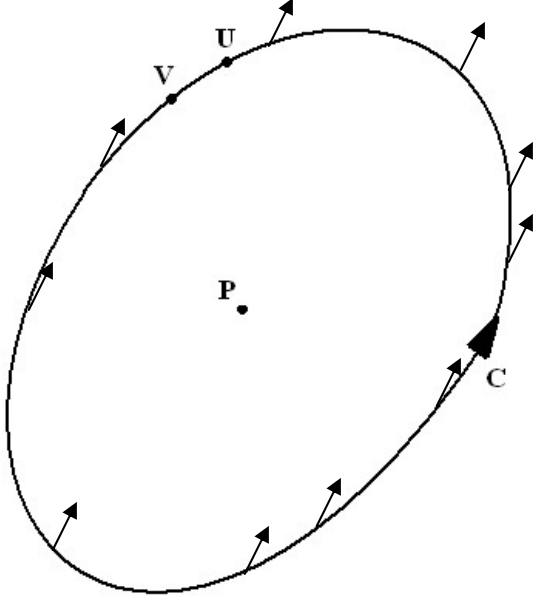
هذه المعادلة، هي معادلة إنتقال موازي متجهة موافقة التغير.

كذلك معادلة إنتقال موازي، متجهة مخالفة التغير هي:

$$\delta B^k = -\Gamma_{ij}^k B^i dx^j$$

## تسور إنحناء ريمان – كريستوفل

نفرض أن المتجهة  $A^i$  واقعة على المنحني  $C$  في فضاء إقليدي أو غير إقليدي، و تنتقل بشكل موازي دورة كاملة حول هذا المنحني، تتغير إحداثيات هذه المتجهة حين حركتها حول المنحن، إذا كانت هذه التغيرات هي  $\Delta A^i$  فإنها لا تساوي صفر. نحن بصدد محاسبة قيمة هذه التغيرات لدورة كاملة للمتجهة  $A^i$  على محيط منحني صغير  $C$  مركزه النقطة  $P$ .



نفرض أن إحداثيات النقطة  $U$  هي:  $x^i + \xi^i$

و نقطة  $V$  مجاورة إلى  $U$  إحداثياتها هي:  $x^i + \xi^i + d\xi^i$

عند انتقال المتجهة  $A^i$  من النقطة  $U$  إلى النقطة  $V$  فإن إحداثيات هذه المتجهة تتغير طبقاً لهذه الرابطة:

$$\delta A^i = -\Gamma_{jk}^i A^j d\xi^k \quad \text{I}$$

يجب تعيين كل من  $A^j$  و  $\Gamma_{jk}^i$  في النقطة  $U$ . مع العلم إن قيمة  $\xi^i$  قليلة جداً. أنتقال جداً صغير من  $p$  إلى  $U$ ، أول تقريب  $\Gamma_{jk}^i$  من خلال متتالية تيلور في حساب التكامل و التفاضل في النقطة  $U$  هو:

$$\Gamma_{jk}^i + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} \xi^l \quad \text{II}$$

الإنتقال الموازي للمتجهة  $A^j$  من النقطة  $P$  إلى النقطة  $U$  هو عبارة عن:

$$A^j - \Gamma_{rl}^j A^r \xi^l \quad \text{III}$$



في هذه الرابطة يجب تعيين كل من  $A^j$  و  $A^r$  و  $\Gamma_{rl}^j$  في النقطة P .  
نضع كل من II و III في الرابطة I ، مع تقريب من المرتبة الأولى بالنسبة الى  $\xi^l$  نحصل على:

$$\delta A^i = - \left[ \Gamma_{jk}^i A^j + (A^j \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} - \Gamma_{jk}^i \Gamma_{rl}^j A^r) \xi^l \right] d\xi^k$$

تكامل هذه الرابطة حول المنحنى C.

$$\Delta A^i = -\Gamma_{jk}^i A^j \oint_C d\xi^k + (\Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}) A^j \oint_C \xi^l d\xi^k$$

قمنا بتبديل الدليل ز و r في العبارة الأولى داخل القوسين. التكامل حول المنحنى C يستطلب:

$$\oint_C d\xi^k = 0$$

$$\oint_C \xi^l d\xi^k = -\oint_C \xi^k d\xi^l$$

نستعين بهذا التعريف:

$$\alpha^{kl} = \frac{1}{2} \oint_C (\xi^l d\xi^k - \xi^k d\xi^l)$$

نحصل على:

$$\Delta A^i = (\Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}) A^j \alpha^{kl}$$

العبارة داخل القوسين ليست تنسور، لحل هذه الأشكالية هناك قضية نغض النظر عن إثباتها و نكتفي بنتيجتها بخصوص هذه المسئلة و هي إمكانية إستبدال الدليل k و l إذن:

$$\Delta A^i = (\Gamma_{rl}^i \Gamma_{jk}^r - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k}) A^j \alpha^{lk}$$

من جمع الرابطتين الأخيرتين و احتساب هذه الرابطة  $\alpha^{kl} = -\alpha^{lk}$  نحصل على:

$$\Delta A^i = -\frac{1}{2}(\Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{jk}^r + \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}) A^j \alpha^{lk}$$

الآن أصبحت العبارة داخل القوسين تخالفية التناظر (skew-symmetric) للدلائل k و l إذن الرابطة:

$$(\Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{jk}^r + \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}) A^j$$

هي تنسور، ثم ننتخب  $A^j$  بحيث:

$$B_{jkl}^i = \Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{jk}^r + \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}$$

هذه الرابطة تنسور، و تعرف بتنسور إنحناء ريمان – كريستوفل.

من تقليص التنسور  $B_{jkl}^i$  ، بالنسبة الى i و l نحصل على تنسور ريتشي  $R_{jk}$  أي:

$$R_{jk} = B_{jki}^i$$

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{jl}^i - \frac{\partial}{\partial u^l} \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{mk}^i \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{ml}^i \Gamma_{jk}^m$$

$$R_{ijkl} = g_{im} R_{jkl}^m$$

### بعض أهم معادلات النسبية العامة:

أهم معادلات النسبية العامة لمتريية بهذا الشكل:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{و} \quad g^{ij} = \frac{1}{g_{ij}}$$

هي:

مسار الجيوديسي

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad \text{مع الشرط:} \quad g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1$$

تنسور ريمان

$$R_{ijk}^{\mu} = \Gamma_{ik,j}^{\mu} - \Gamma_{ij,k}^{\mu} + \Gamma_{sj}^{\mu} \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{sk}^{\mu} \Gamma_{ij}^s$$

$$R_{ijk}^{\mu} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\mu}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\mu}}{\partial x^k} + \Gamma_{sj}^{\mu} \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{sk}^{\mu} \Gamma_{ij}^s$$

تنسور ريتشي

$$R_{ij} = R_{ijk}^k$$

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

تنسور أنشتاين

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$$

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R$$

هذه التنسورات هي بمثابة الهيكل العظمي لنظرية النسبية العامة، و من خلالها يمكن حساب:

- انحراف الضوء عند مروره قرب كتلة ضخمة.
- تقدم نقطة حضيض الكواكب.
- إنزياح الطيف نحو الأحمر.
- بناء نموذج رياضي للكون (على سبيل المثال نموذج فريدمان).

## مراحل طرح وحلّ و البحث في مسائل النسبية العامة

- تعيين مترية الفضاء، و كتابتها في نظام إحداثي مناسب كالإحداثي الكروي أو القطبي أو الكارتيدي. الأفضل أن تكون هذه المترية متناظرة و ذلك لسهولة المحاسبات، و كذلك ترضي الخصائص الهندسية و الفيزيائية للفضاء الذي نريد البحث فيه، يمكن فرض هذه الخصائص قبل بدأ الحلّ أو فرض معامل ذات متغيرات نتوصل لقيّمها و الى روابطها بعد حلّ المعادلات الإشتقاقية أو الجبرية الحاصلة.

- تعيين متغيرات المترية، مثلاً إذا كانت الإحداثيات كروية يجب تعيين  $r$  و  $\theta$  و  $\phi$  و إذا كانت رباعية الأبعاد تعيين بعد الزمان  $t$  و إذا كانت الإحداثيات كارتيزية يجب تعيين المتغيرات  $x$  و  $y$  و  $z$  و  $t$  و هكذا. مثلاً الإحداثيات الكروية رباعية الأبعاد بهذه الصورة:

$$x^1 = r$$

$$x^2 = \theta$$

$$x^3 = \phi$$

$$x^4 = t$$

- تعيين المعامل  $g_{ij}$  للمترية  $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$  ، الأفضل أن تكون المترية قطرية و ذلك لسهولة المحاسبات.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{bmatrix}$$

- تعيين علائم كريستوفل  $\Gamma_{ij}^k$  المخالفة للصفر.

- تعيين معادلات الجيوديسي لهذه المترية. تمثل هذه المعادلات مسير المتقاصرات في هذا الفضاء سواء منحنيات متناهية أو غير متناهية. في بعض النماذج الكونية تمثل هذه الجيوديسي مسير حركة الكواكب و الأجرام السماوية.
- محاسبة تنسور ريمان  $R_{ijk}^S$  ، في بعض المتريات الأفضل محاسبة هذا الشكل من تنسور ريمان:  $R_{1212}$  و ذلك لسهولة المحاسبات من خلال هذا التنسور.
- محاسبة تنسور ريتشي  $R_{ij}$  ، من تنسور ريمان يمكن محاسبة تنسور ريتشي. لهذا التنسور أهمية بالغة في نظرية النسبية العامة و ذلك لأنه يمثل معادلات حقل أنشتاين. من تساوي جميع معامل هذا التنسور مع الصفر نحصل على مجموعة من المعادلات الإشتقاقية. يُعَيَّن و يُعَرَّف الفضاء من خلال هذه المعادلات. كذلك من هذه المعادلات يمكن تعيين معامل المترية في حال كانت بصورة متغيرات مجهولة، كما هو الحال مع مترية شوارتزشيلد.
- محاسبة سلمية ريتشي  $R$  ، تمثل الرابطة أو القيمة التي نحصل عليها من هذه السلمية تقوس أو إنحناء الفضاء، سواء كان سالب، موجب أو صفر. كذلك من خلال هذه السلمية يمكن محاسبة تنسور أنشتاين.
- محاسبة تنسور أنشتاين  $G_{ij}$  ، تكمن أهمية هذا التنسور في الفضاء الذي تتواجد فيه المادة، كالفضاء الناتج من مترية روبرتسون – واكر.

## نموذج رياضي لروابط النسبية العامة يمكن تطبيقه على الحاسوب

العمليات الحسابية على هذه التنسورات مملة و متعبة، و لكي نتمكن من حسابها نحن بحاجة الى نموذج رياضي يختصر المحاسبات، يقلل التكرار، و يبسط الرابطة و يختصرها. النموذج هو بهذه الصورة<sup>1</sup>:

نكتب معادلة مسار الجيوديسي في فضاء النسبية بهذه الصيغة:

$$ds^2 = A(x, y, z, t)dx^2 + B(x, y, z, t)dy^2 + C(x, y, z, t)dz^2 + D(x, y, z, t)dt^2$$

$$\alpha(x, y, z, t) = \frac{1}{2A(x, y, z, t)}$$

$$\beta(x, y, z, t) = \frac{1}{2B(x, y, z, t)}$$

$$\gamma(x, y, z, t) = \frac{1}{2C(x, y, z, t)}$$

$$\delta(x, y, z, t) = \frac{1}{2D(x, y, z, t)}$$

للاختصار نكتب هذه الروابط بهذا الشكل:

$$ds^2 = Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + Ddt^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2A}$$

$$\beta = \frac{1}{2B}$$

$$\gamma = \frac{1}{2C}$$

$$\delta = \frac{1}{2D}$$

تستنتج علائم كريستوفل من هذه الرابطة:

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} (g_{\tau\nu,\sigma} + g_{\tau\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\tau})$$

1- يوجد على موقعي الخاص برنامج بسيط كتبته بالمث كد (Math CAD) يمكن من خلاله مشاهدة و محاسبة أهم روابط النسبية العامة . بعد وضع متغيرات المترية في الحقول الموجودة ستجد النتيجة في إنتهاء الصفحة ، النتائج نظرية و غير عملية . لتتمكن من فتح البرنامج أنت بحاجة الى برنامج مث كد . الرباط :

للتذكير نكرربأن:

$$A_\mu = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}$$

$$B_{12} = \frac{\partial^2 B}{\partial x^1 \partial x^2}$$

في هذه الروابط يمكن ان يكون  $\partial x^1 = \partial x$  و كذلك  $\partial x^2 = \partial y$  (الأعداد هنا ليست بمعنى الأس).

### علائم كريستوفل

في الصفحة السابقة عرضنا كل الروابط التي يمكن من خلالها حساب قيمّ علائم كريستوفل لكل الحالات. الأستعانة بالحاسوب و من خلال برنامج بسيط مثل MATLAB أو MATCAD أو MAPLE أو من خلال برمجة بأحد البرامج، يمكن حساب هذه المعامل. كذلك كتبنا صورة مبسطة لبعض معامل هذه التنسورات يمكن محاسبتها أو تعيين قيمها أو علامة قيمها من خلال هذه البرامج.

يجب لا ننسى إن في معادلة الجيوديسي  $g_{12} = g_{21} = 0$ .

$$\Gamma_{23}^2 = -\beta C_2 \text{ و } \Gamma_{44}^4 = \delta D_4 \text{ و } \Gamma_{1\mu}^1 = -\alpha A_\mu \text{ و } \Gamma_{23}^1 = 0$$

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \alpha \cdot \frac{d}{dx} A & -\beta \cdot \frac{d}{dy} A & -\gamma \cdot \frac{d}{dz} A & -\delta \cdot \frac{d}{dt} A \\ \alpha \cdot \frac{d}{dy} A & \beta \cdot \frac{d}{dx} B & 0 & 0 \\ \alpha \cdot \frac{d}{dz} A & 0 & \gamma \cdot \frac{d}{dx} C & 0 \\ \alpha \cdot \frac{d}{dt} A & 0 & 0 & \delta \cdot \frac{d}{dx} D \\ \alpha \cdot \frac{d}{dy} A & \beta \cdot \frac{d}{dx} B & 0 & 0 \\ -\alpha \cdot \frac{d}{dx} B & \beta \cdot \frac{d}{dy} B & -\gamma \cdot \frac{d}{dz} B & -\delta \cdot \frac{d}{dt} B \\ 0 & \beta \cdot \frac{d}{dz} B & \gamma \cdot \frac{d}{dy} C & 0 \\ 0 & \beta \cdot \frac{d}{dt} B & 0 & \delta \cdot \frac{d}{dy} D \\ \alpha \cdot \frac{d}{dz} A & 0 & \gamma \cdot \frac{d}{dx} C & 0 \\ 0 & \beta \cdot \frac{d}{dz} B & \gamma \cdot \frac{d}{dy} C & 0 \\ -\alpha \cdot \frac{d}{dx} C & -\beta \cdot \frac{d}{dy} C & \gamma \cdot \frac{d}{dz} C & -\delta \cdot \frac{d}{dt} C \\ 0 & 0 & \gamma \cdot \frac{d}{dt} C & \delta \cdot \frac{d}{dz} D \\ \alpha \cdot \frac{d}{dt} A & 0 & 0 & \delta \cdot \frac{d}{dx} D \\ 0 & \beta \cdot \frac{d}{dt} B & 0 & \delta \cdot \frac{d}{dy} D \\ 0 & 0 & \gamma \cdot \frac{d}{dt} C & \delta \cdot \frac{d}{dz} D \\ -\alpha \cdot \frac{d}{dx} D & -\beta \cdot \frac{d}{dy} D & -\gamma \cdot \frac{d}{dz} D & \delta \cdot \frac{d}{dt} D \end{pmatrix}$$

$\Gamma_{11}^1$	$\Gamma_{11}^2$	$\Gamma_{11}^3$	$\Gamma_{11}^4$
$\Gamma_{12}^1$	$\Gamma_{12}^2$	$\Gamma_{12}^3$	$\Gamma_{12}^4$
$\Gamma_{13}^1$	$\Gamma_{13}^2$	$\Gamma_{13}^3$	$\Gamma_{13}^4$
$\Gamma_{14}^1$	$\Gamma_{14}^2$	$\Gamma_{14}^3$	$\Gamma_{14}^4$
$\Gamma_{21}^1$	$\Gamma_{21}^2$	$\Gamma_{21}^3$	$\Gamma_{21}^4$
$\Gamma_{22}^1$	$\Gamma_{22}^2$	$\Gamma_{22}^3$	$\Gamma_{22}^4$
$\Gamma_{23}^1$	$\Gamma_{23}^2$	$\Gamma_{23}^3$	$\Gamma_{23}^4$
$\Gamma_{24}^1$	$\Gamma_{24}^2$	$\Gamma_{24}^3$	$\Gamma_{24}^4$
$\Gamma_{31}^1$	$\Gamma_{31}^2$	$\Gamma_{31}^3$	$\Gamma_{31}^4$
$\Gamma_{32}^1$	$\Gamma_{32}^2$	$\Gamma_{32}^3$	$\Gamma_{32}^4$
$\Gamma_{33}^1$	$\Gamma_{33}^2$	$\Gamma_{33}^3$	$\Gamma_{33}^4$
$\Gamma_{34}^1$	$\Gamma_{34}^2$	$\Gamma_{34}^3$	$\Gamma_{34}^4$
$\Gamma_{41}^1$	$\Gamma_{41}^2$	$\Gamma_{41}^3$	$\Gamma_{41}^4$
$\Gamma_{42}^1$	$\Gamma_{42}^2$	$\Gamma_{42}^3$	$\Gamma_{42}^4$
$\Gamma_{43}^1$	$\Gamma_{43}^2$	$\Gamma_{43}^3$	$\Gamma_{43}^4$
$\Gamma_{44}^1$	$\Gamma_{44}^2$	$\Gamma_{44}^3$	$\Gamma_{44}^4$



## تنسور ريتشي:

$$R_{ij} = R_{ijk}^k$$

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

أحد معامل تنسور ريتشي:

$$w_{11} := \beta \cdot \left( \frac{d^2}{dy^2} A \right) + \gamma \cdot \left( \frac{d^2}{dz^2} A \right) + \delta(x, y, z, t) \cdot \left( \frac{d^2}{dt^2} A \right)$$

$$w_{12} := \beta \cdot \left( \frac{d^2}{dx^2} B \right) + \gamma \cdot \left( \frac{d^2}{dx^2} C \right) + \delta \cdot \left( \frac{d^2}{dx^2} D \right)$$

$$w_{13} := \left[ \beta \cdot \left( \frac{d}{dx} B \right) \right]^2 + \left[ \gamma \cdot \left( \frac{d}{dx} C \right) \right]^2 + \left[ \delta \cdot \left( \frac{d}{dx} D \right) \right]^2$$

$$w_{14} := \alpha \cdot \left( \frac{d}{dx} A \right) \cdot \left[ \beta \cdot \left( \frac{d}{dx} B \right) + \gamma \cdot \left( \frac{d}{dx} C \right) + \delta \cdot \left( \frac{d}{dx} D \right) \right]$$

$$w_{15} := \beta \cdot \left( \frac{d}{dy} A \right) \cdot \left[ \alpha \cdot \left( \frac{d}{dy} A \right) + \beta \cdot \left( \frac{d}{dy} B \right) - \gamma \cdot \left( \frac{d}{dy} C \right) - \delta \cdot \left( \frac{d}{dy} D \right) \right]$$

$$w_{16} := \gamma \cdot \left( \frac{d}{dz} A \right) \cdot \left[ \alpha \cdot \left( \frac{d}{dz} A \right) - \beta \cdot \left( \frac{d}{dz} B \right) + \gamma \cdot \left( \frac{d}{dz} C \right) - \delta \cdot \left( \frac{d}{dz} D \right) \right]$$

$$w_{17} := \delta \cdot \left( \frac{d}{dt} A \right) \cdot \left[ \alpha \cdot \left( \frac{d}{dt} A \right) - \beta \cdot \left( \frac{d}{dt} B \right) - \gamma \cdot \left( \frac{d}{dt} C \right) + \delta \cdot \left( \frac{d}{dt} D \right) \right]$$

$$R_{11} := w_{11} + w_{12} - w_{13} - w_{14} - w_{15} - w_{16} - w_{17}$$

معمل آخر لتنسور ريتشي:

$$R_{12} := \gamma \cdot \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dy} C \right) \right] + \delta \cdot \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dy} D \right) \right] - \gamma \cdot \gamma \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx} C \right) \cdot \left( \frac{d}{dy} C \right) \right] - \delta \cdot \delta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx} D \right) \cdot \left( \frac{d}{dy} D \right) \right] \\ - \alpha \cdot \gamma \cdot \left[ \left( \frac{d}{dy} A \right) \cdot \left( \frac{d}{dx} C \right) \right] - \alpha \cdot \delta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dy} A \right) \cdot \left( \frac{d}{dx} D \right) \right] - \beta \cdot \gamma \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dy} C \right) \right] - \beta \cdot \delta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dy} D \right) \right]$$

عدد المعامل المستقلة في تنسور ريتشي هي 10 معامل، و هو قانون حقل الخلاء أو الفراغ في نظرية النسبية العامة شريطة أن تكون كل من هذه العشرة معامل تساوي صفر، هذا ما فرضه و طرحه أنشتاين عام 1915. أعطى هذا القانون نتائج صادقة و صحيحة في إنحناء الضوء و أثر دوبلر و تقدم حضيض الكواكب.

**تنسور ريمان:**

$$R_{ijk}^{\mu} = \Gamma_{ik,j}^{\mu} - \Gamma_{ij,k}^{\mu} + \Gamma_{sj}^{\mu} \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{sk}^{\mu} \Gamma_{ij}^s$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\tau} R_{\nu\rho\sigma}^{\tau}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0$$

$$R_{1234} = 0$$

$$R_{1213} := \frac{1}{2} \cdot \left[ -\frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dz} A \right) + \alpha \cdot \left( \frac{d}{dy} A \right) \cdot \left( \frac{d}{dz} A \right) + \beta \cdot \left( \frac{d}{dy} A \right) \cdot \left( \frac{d}{dz} B \right) + \gamma \cdot \left( \frac{d}{dz} A \right) \cdot \left( \frac{d}{dy} C \right) \right]$$

$$R_{1212} := -\left( \frac{d^2}{dy^2} A \right) - \left( \frac{d^2}{dx^2} B \right) + \alpha \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx} A \right) \cdot \left( \frac{d}{dx} B \right) + \left( \frac{d}{dy} A \right)^2 \right] + \beta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dy} A \right) \cdot \left( \frac{d}{dy} B \right) + \left( \frac{d}{dx} B \right)^2 \right] - \gamma \cdot \left( \frac{d}{dz} A \right) \cdot \left( \frac{d}{dz} B \right) - \delta \cdot \left( \frac{d}{dt} A \right) \cdot \left( \frac{d}{dt} A \right)$$

## سَلْمِيَّة رِيْتَشِي:

يمكن تعيين تقوس أو إنحناء الفضاء من خلال القيمة السَلْمِيَّة لتنسور ريتشي:

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

$$w1 = \left(\frac{d}{dy^2} A\right) + \left(\frac{d}{dx^2} B\right) - \alpha \cdot \left(\frac{d}{dy} A\right)^2 - \beta \cdot \left(\frac{d}{dy} B\right)^2 - \alpha \cdot \left(\frac{d}{dx} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} B\right) - \beta \cdot \left(\frac{d}{dy} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} B\right) + \gamma \cdot \left(\frac{d}{dz} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dz} B\right) + \delta \cdot \left(\frac{d}{dt} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} B\right)$$

$$w2 = \left(\frac{d}{dz^2} A\right) + \left(\frac{d}{dx^2} C\right) - \alpha \cdot \left(\frac{d}{dz} A\right)^2 - \gamma \cdot \left(\frac{d}{dx} C\right)^2 - \alpha \cdot \left(\frac{d}{dx} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} C\right) + \beta \cdot \left(\frac{d}{dy} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} C\right) - \gamma \cdot \left(\frac{d}{dz} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dz} C\right) + \delta \cdot \left(\frac{d}{dt} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} C\right)$$

$$w3 = \left(\frac{d}{dz^2} B\right) + \left(\frac{d}{dy^2} C\right) - \beta \cdot \left(\frac{d}{dz} B\right)^2 - \gamma \cdot \left(\frac{d}{dy} C\right)^2 + \alpha \cdot \left(\frac{d}{dx} B\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} C\right) - \beta \cdot \left(\frac{d}{dy} B\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} C\right) - \gamma \cdot \left(\frac{d}{dz} B\right) \cdot \left(\frac{d}{dz} C\right) - \delta \cdot \left(\frac{d}{dt} B\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} C\right)$$

$$w4 = \left(\frac{d}{dt^2} A\right) + \left(\frac{d}{dx^2} D\right) - \alpha \cdot \left(\frac{d}{dt} A\right)^2 - \delta \cdot \left(\frac{d}{dx} D\right)^2 - \alpha \cdot \left(\frac{d}{dx} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} D\right) + \beta \cdot \left(\frac{d}{dy} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} D\right) + \gamma \cdot \left(\frac{d}{dz} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dz} D\right) - \delta \cdot \left(\frac{d}{dt} A\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} D\right)$$

$$w5 = \left(\frac{d}{dt^2} B\right) + \left(\frac{d}{dy^2} D\right) - \beta \cdot \left(\frac{d}{dt} B\right)^2 - \delta \cdot \left(\frac{d}{dy} D\right)^2 + \alpha \cdot \left(\frac{d}{dx} B\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} D\right) - \beta \cdot \left(\frac{d}{dy} B\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} D\right) + \gamma \cdot \left(\frac{d}{dz} B\right) \cdot \left(\frac{d}{dz} D\right) - \delta \cdot \left(\frac{d}{dt} B\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} D\right)$$

$$w6 = \left(\frac{d}{dt^2} C\right) + \left(\frac{d}{dz^2} D\right) - \gamma \cdot \left(\frac{d}{dt} C\right)^2 - \delta \cdot \left(\frac{d}{dz} D\right)^2 + \alpha \cdot \left(\frac{d}{dx} C\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} D\right) + \beta \cdot \left(\frac{d}{dy} C\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} D\right) - \gamma \cdot \left(\frac{d}{dz} C\right) \cdot \left(\frac{d}{dz} D\right) - \delta \cdot \left(\frac{d}{dt} C\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} D\right)$$

**Ricci Scalar**

$$R := 4 \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot w1) + 4 \cdot (\alpha \cdot \gamma \cdot w2) + 4 \cdot (\beta \cdot \gamma \cdot w3) + 4 \cdot (\alpha \cdot \delta \cdot w4) + 4 \cdot (\beta \cdot \delta \cdot w5) + 4 \cdot (\gamma \cdot \delta \cdot w6)$$

## تنسور أنشتاين:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

أحد معامل هذا التنسور هي:

$$g_1 = \left( \frac{d^2}{dz^2} B \right) - \left( \frac{d^2}{dy^2} C \right) + \beta \cdot \left( \frac{d}{dz} B \right)^2 + \gamma \cdot \left( \frac{d}{dy} C \right)^2 - \alpha \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dx} C \right) \right] + \beta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dy} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dy} C \right) \right] + \gamma \cdot \left[ \left( \frac{d}{dz} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dz} C \right) \right] - \delta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dt} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dt} C \right) \right]$$

$$g_2 = \left( \frac{d^2}{dt^2} B \right) - \left( \frac{d^2}{dy^2} D \right) + \beta \cdot \left( \frac{d}{dt} B \right)^2 + \delta \cdot \left( \frac{d}{dy} D \right)^2 - \alpha \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dx} D \right) \right] + \beta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dy} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dy} D \right) \right] - \gamma \cdot \left[ \left( \frac{d}{dz} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dz} D \right) \right] + \delta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dt} B \right) \cdot \left( \frac{d}{dt} D \right) \right]$$

$$g_3 = \left( \frac{d^2}{dt^2} C \right) - \left( \frac{d^2}{dz^2} D \right) + \gamma \cdot \left( \frac{d}{dt} C \right)^2 + \delta \cdot \left( \frac{d}{dz} D \right)^2 - \alpha \cdot \left[ \left( \frac{d}{dx} C \right) \cdot \left( \frac{d}{dx} D \right) \right] - \beta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dy} C \right) \cdot \left( \frac{d}{dy} D \right) \right] + \gamma \cdot \left[ \left( \frac{d}{dz} C \right) \cdot \left( \frac{d}{dz} D \right) \right] + \delta \cdot \left[ \left( \frac{d}{dt} C \right) \cdot \left( \frac{d}{dt} D \right) \right]$$

$$G_{11} := \left( \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha} \right) \cdot g_1 + \left( \frac{\beta \cdot \delta}{\alpha} \right) \cdot g_2 + \left( \frac{\gamma \cdot \delta}{\alpha} \right) \cdot g_3$$

لمحاسبة معادلات خلاً أنشتاين يجب تعيين كل معامل هذا التنسور، من ثم أستنتاج الروابط من تساوي هذه الروابط مع الصفر ( هذا التنسور هنا بهذا الشكل لفضاء يخلو من المادة).

الرابطة بين إنحناء غاوس و تنسور ريمان

K تقوس غاوس

$$R_{ijkl} = K (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$$

$$R_{1212} = K (g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}) \Rightarrow R_{1212} = K g$$

## مبدأ الكوسومولوجيا The Cosmological Principle

لهذا المبدأ أهمية كبيرة في نظرية النسبية العامة و يمكن القول بأن أهمية هذا المبدأ في النسبية العامة كأهمية مبدأ ماخ في النسبية الخاصة. يشترك هذا المبدأ من حيث المفهوم مع بعض مفاهيم مبدأ ماخ إلا أن حالته الافتراضية تضع الكثير من التحفظات عليه ، فهو ليس كمبدأ حفظ الطاقة، و لا تشجع الأرصاد الفلكية على تركه.

بمقياس واسع جداً ينصّ هذا المبدأ على أن: الكون متجانس و موحد الخواص.

النموذج الكوني الذي يمكن الاستناد عليه هو أن نرفض الكون عبارة عن مجموعة لا متناهية من المجرات منتشرة في الكون و بنسبة متساوية و تبتعد كلّ عن الأخرى، يمكن أن نستنتج من هذا النموذج بأن جميع المجرات ذات نسبة متساوية للكون كلّها. يتنافى هذا النموذج مع فكرة عالم متناهي في فضاء لا متناهي. في هذا النموذج لا وجود لمراجع عطالة منتشرة كما هو الحال لمراجع العطالة في النموذج النيوتني المنتشرة فيه الى ما لا نهايه. التجانس و وحدة الخواص الكونية الموجودة حولنا أحد الدلائل على هذا المبدأ لكن من الصعب الادعاء بأننا في المكان المثالي من الكون.

هناك نسخة كاملة من هذا الأصل و وضعت عام 1948 تنصّ على (الدوام) أو تجانس الكون ليس فضائياً فحسب و إنما كذلك زمنياً، بمعنى أن متوسط ظاهر الكون في كل زمان متساوي. ليس هناك بداية و نهاية للكون! عندما يتوسع الكون لملأ الفضاء الناتج يجب أن توجد مادة كافية لملأ هذا الفضاء الفارغ. تتعدى هذه العبارة قانون حفظ الطاقة لكن ليس بمقياس واسع و إنما حدود ذرة هيدروجين واحده في كل 60 كيلو متر مكعب من الفضاء في السنة. نالت هذه النظرية شهرة واسعة لكنما الأرصاد الفلكية شككت بمصداقيتها مما أجبر حتى مدافعيها بالتخلي عنها.

مبدأ الكوسومولوجيا أو صيغته الكامله أو أي فرض آخر مشابه، عنواين لنسبية الكون، لذلك يمكن القول بأن كل معرفة كونية معتمدة على كهذه المبدأ هي نظرية نسبية. يمكن تعريف النسبية بأنها كلّ نظريه فيزيائيه مع مجموعة من التحويلات التي لا تغير قوانين هذه النظرية. على سبيل المثال

الميكانيك النيوتني هو نسبية مجموعة غاليلو، النسبية الخاصة هي نسبية مجموع بوانكره أو مجموعة لورنتز، النسبية العامة هي نسبية مجموعة تحويلات واحد الى واحد، و العلوم الكونية الأخرى هي نسبية تناظرات مختلفة لكون واسع جداً. حتى النظرية التي تصدق في فضاء إقليدي مطلق شريطة أن يكون ذلك الفضاء متجانس فهي نسبية مجموعة من الدوران و الأنتقالات.

التعريف الأساسي للتجانس في هذا المبدأ هو، مجموعة الأرصاد الكونية للكون من مراقب، هي نفسها التي يؤديها مراقب آخر. الأرصاد التي نقوم بها نحن على الأرض (مثل توسع الكون و كثافة الكون) و هذه الأرصاد نفسها يقوم بها مراقبين في مجرة أخرى في زمن رصدها متكافئة. يسوقنا هذا الى مفهوم آخر وهو الزمن الكوني.

أحد نتائج هذا التجانس هو وجود لحظات مطلقة للكون كله، إن كانت هناك تغيرات في هذا الكون المتجانس فكل نقطة تعمل عمل التزامن. ننتخب مبدأ الزمن لساعة المرجع في زمن تتساوى فيه كل الأرصاد، في هذه الحالة نتائج هذه الأرصاد هي للزمن الكوني  $\tau$  ، هذا الزمن الكوني هو في كل مجرة. في عالم ثابت يمكن تنظيم الساعات كلها، حسب الزمن الكوني.

## أهم مفاهيم المترية في نظرية النسبية العامة

أحد أهم موارد أستعمال مترية الزمكان هو محاسبة مسير الأشعة الضوئية، هذا المسير عبارة عن متقاصر أو جيوديسية هذه المترية. كذلك من خلال المترية يمكن تعيين نوع الفضاء و تقوّسه و محاسبة حقل جاذبيته. تتم هذه المحاسبات من خلال تنسور ريمان و ريتشي، و الأهم معادلات حقل أنشتاين سواء في الخلاء أم في حالة تواجد المادة في حقل الجاذبية. سنبحث في هذا الفصل بعض أهم أنواع المتريات التي طرحت في نظرية النسبية العامة.

الصورة العامة لمترية في فضاء زمان هي:

$$ds^2 = Adt^2 + Bdx_1dt + \dots Edx_1^2 + \dots Hdx_2dx_3 + \dots$$

المعامل A و B و غيرها هي توابع من t و  $x_1$  و  $x_2$  و غيرها. لكن في حقل ساكن الحالة الخاصة لهذه المترية هي:

$$ds^2 = Adt^2 - d\sigma^2$$

في هذه الرابطة  $d\sigma^2$  هي  $d\sigma^2 = dx_i^2$  و  $i = 1$  و  $2$  و  $3$  فمثلاً  $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$  فالخطوط العالمية لهذه المترية هي:

$$ds^2 = Adt^2$$

إذا كان  $\varphi$  هي جهد حقل جاذبية و  $A = c^2 e^{\frac{2\varphi}{c^2}}$  إذن:

$$ds^2 = c^2 e^{\frac{2\varphi}{c^2}} dt^2 - d\sigma^2$$

في حقل ضعيف معامل هذه المترية متساوية.

إذا أستعملنا هذا التقريب  $e^{\frac{2\varphi}{c^2}} \approx 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$  في هذه الحالة لحقل خارج الشمس  $\left| \frac{2\varphi}{c^2} \right| < 0.5 \times 10^{-5}$  و  
من هذا تصبح معامل الإحداثية  $c^2 dt^2$  تقريباً تساوي واحد وهذا بمعنى أن الزمكان حول كتلة ضخمة  
مثل الشمس تقريباً منكوفسكي أي:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$$

من خلال مترية منكوفسكي و مترية شوارتزشيلد سنطالع الارتباط بين فضاء منكوفسكي و فضاء  
شوارتزشيلد، و ذلك من خلال هذه التحويلات:

$$x = X \cosh T \quad y = Y \quad z = Z \quad t = X \sinh T$$

$$x^2 - t^2 = X^2 \quad \frac{t}{x} = \tanh T \quad \text{إذن:}$$

كذلك:

$$\cosh^2 T - \sinh^2 T = 1$$

$$A = F(x, y) \Rightarrow dA = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$dx = \cosh T dX + X \sinh T dt \Rightarrow dx^2 = dX^2 \cosh^2 T + 2X \cosh T \sinh T dXdT + X^2 \sinh^2 T dT^2$$

$$dt = \sinh T dX + X \cosh T dt \Rightarrow dt^2 = dX^2 \sinh^2 T + 2X \cosh T \sinh T dXdT + X^2 \cosh^2 T dT^2$$

إذن:

$$dt^2 - dx^2 = X^2 dT^2 - dX^2$$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \Rightarrow ds^2 = X^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

$$ds^2 = X^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

هذه مترية منكوفسكي في فضاء  $(X, Y, Z, T)$  رباعي الأبعاد.



متريّة شوارتزشيلد هي:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2$$

للتبسيط نكتبها بهذا الشكل:

$$c = G = 1 \text{ كذلك نستبدل } r \text{ و } t \text{ بهذه الإحداثيات } R \text{ و } T \text{ و نفرض } m = \frac{1}{4}$$

نحصل على:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{2R}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{1}{2R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

النقطة  $R = \frac{1}{2}$  هي نقطة غامضة في هذه المتريّة

إذا فرضنا  $2R - 1 = x^2 - t^2 = X^2$  في هذه الحالة:

$$2R - 1 = X^2 \Rightarrow 2dR = 2XdX \Rightarrow dX^2 = \frac{1}{X^2} dR^2$$

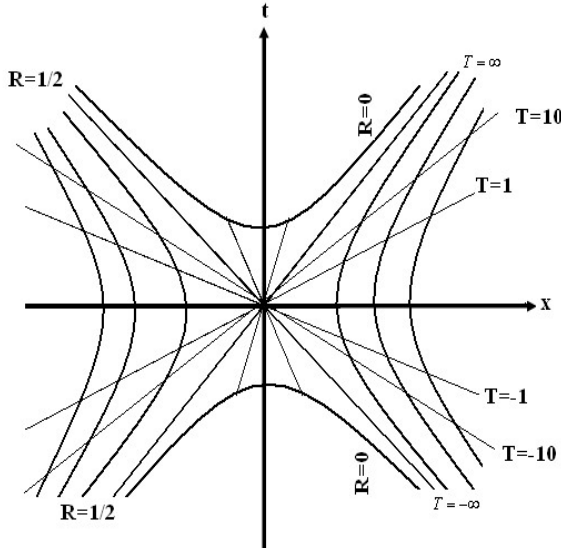
نحصل على:

$$ds^2 = X^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \Rightarrow ds^2 = (2R - 1) dT^2 - (2R - 1)^{-1} dR^2 - dY^2 - dZ^2$$

في هذه المتريّة يجب أن تكون  $R > \frac{1}{2}$

هذه صيغة أخرى لمتريّة منكوفسكي و قد لاحظنا الأرتباط بين متريّة منكوفسكي أو فضاء منكوفسكي و

متريّة شوارتزشيلد أو فضاء شوارتزشيلد



يمكن فرض هذا الشكل نموذج لفضاء كروسكال

Kruskal ، إحداثيات كروسكال  $x$  و  $t$  ( عادة

تستعمل  $u$  و  $v$ ) متريّة فضاء كروسكال رباعي

الأبعاد بهذه الصورة :

$$ds^2 = \left[ \frac{1}{2Re^{2R}} \right] (dt^2 - dx^2) - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

في هذه المترية R تابع من  $x^2 - t^2$  وتصدق فيه هذه الرابطة:

$$[e^{2R}] (2R-1) = x^2 - t^2$$

تصدق هذه المترية في معادلات خلأ أنشتاين، هذه المترية لكل  $R > 0$  منتظمة لكن النقطة  $R = 0$  هي نقطة غامضة. إذا كانت قيمة  $t$  في كل لحظة ثابتة فهذه المترية ذات تناظر كروي. يمثل إحداثي كروسكال مسير أشعة  $\phi = \text{const}$  و  $\theta = \text{const}$  و  $\theta = \text{const}$  و  $\phi = \text{const}$ ، كذلك الخطوط 45 درجة في شكل الصفحة السابقة هي كذلك مسير أشعة ضوئية في إحداثي كروسكال.

نكتب هذه المترية حسب إحداثيات T و R أي:

$$e^{2R} (2R-1) = x^2 - t^2 \Rightarrow dX^2 = \frac{2e^{2R}}{2R-1} dR^2$$

$$dt^2 - dx^2 = X^2 dT^2 + dX^2$$

إذن:

$$ds^2 = \left( \frac{2R-1}{2R} \right) dT^2 - \left( \frac{2R-1}{2R} \right)^{-1} dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

هذه المترية متكافئه مع مترية شوارتزشيلد (و النقطة الغامضة أو) أفق الحدث في هذه المترية هي

النقطة  $R = \frac{1}{2}$ . تصدق هذه المترية في معادلات خلأ أنشتاين.

معادلات خلا أنشتاين هي  $R_{\mu\nu} = 0$  إذا كان الحقل غير فارغ و هناك مادة في هذا الحقل في هذه الحالة  $R_{\mu\nu} \neq 0$  و تصبح معادلات أنشتاين بهذا الشكل  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$  سنبحث هذه المعادلات في الفصل القادم.

المتريية التي تصدق في معادلات أنشتاين لحقل غير فارغ هي:

$$ds^2 = e^A dt^2 - e^B dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} A'' - \frac{1}{4} A' B' + \frac{1}{4} A'^2 - \frac{B'}{r}$$

$$R_{22} = e^{-B} \left[ 1 + \frac{1}{2} r (A' - B') \right] - 1$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

$$R_{44} = -e^{A-B} \left( \frac{1}{2} A'' - \frac{1}{4} A' B' + \frac{1}{4} A'^2 + \frac{A'}{r} \right)$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu \quad \text{إذا}$$

تستطلب معادلات حقل أنشتاين لفضاء فارغ أن يكون  $R_{\mu\nu} = 0$  لجميع  $R_{\mu\nu}$  و من بينها الروابط أعلاه بينما لفضاء غير فارغ يجب أن يكون  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$  إذن :

$$A' = -B'$$

$$A = -B$$

$$e^A (1 + rA') = 1 - \Lambda r^2$$

من  $R_{22} = \Lambda g_{22}$  نحصل على

$$\alpha = e^A \quad \text{نفرض}$$

$$\alpha + r\alpha' = (r\alpha)' = 1 - \Lambda r^2$$

$$\alpha = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2$$

هذا الجواب يصدق في معادلات انشتاين  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$  في هذه الرابطة m ثابت التكامل، ثم نحصل على هذه المتريية:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

مدار الحركة في فضاء هذه المترية تقريباً أشبه بمدار نيوتن في جهد مركزي  $\varphi = -\frac{m}{r} - \frac{1}{6}\Lambda r^2$

في حالة سعي  $m$  نحو الصفر أي  $m \rightarrow 0$  تصبح مترية هذا الفضاء بهذا الشكل:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

تعرف هذه المترية بمترية دي سيتر (de sitter) في القوانين الكونية كشفها عام 1917، و الفضاء

الناتج من هذه المترية هو فضاء دي سيتر. تمثل هذه المترية فضاء شبه كروي ذو تقوس قيمته  $-\frac{1}{3}\Lambda$

هذه أشبه بمترية شوارتزشلد لكن النقطة  $r = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$  هي أفق الحدث في هذه المترية. في حالة  $m \neq 0$

يصبح مبدأ الإحداثية (نقطة غامضه أو) أفق الحدث لمترية دي سيتر.

إذا كانت المعادلات  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$  هي الحاكمة على فضاء فارغ في هذه الحالة فضاء دي سيتر هو

البديل لفضاء منكوفسكي.

المترية الأخرى التي سنبحثها هي المترية الناتجة من نموذج ميلن Milen الذي طرحه عام 1932.

يستند هذا النموذج على مبدأ الكوسومولوجيا (الكون متجانس فضائياً و زمنياً) في فضاء فارغ

منكوفسكي رباعي الأبعاد مع غضّ النظر عن الجاذبية لمجموعة لا متناهية لذرات عديمة الوزن و

الحجم، ذات سرعة تنتشر في كلّ جهات الفضاء. تنتشر هذه الذرات من مبدأ الإحداثي  $O$  في المرجع

$S(x, y, z, t)$  بسرعة أقلّ من سرعة الضوء. يمكن فرض هذه الذرات المنتشرة بكرة غبار لا حدود

لها و سرعة توسعها تساوي سرعة الضوء. يصدق قانون هابل في هذه الكرة و الذي ينصّ على

تناسب السرعة و الفاصلة. حدود المادة في هذا النموذج أشبه بصدر موجة wavefront.

لأستنتاج هذه المترية نبدأ من مترية منكوفسكي في  $M_4$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

الفرضيات:

الزمن الكوني  $\tau$  و  $\rho$  إحداثية جديدة ( ليست الكثافة ) و  $u = \frac{r}{t}$

$$\rho = \sinh \psi \quad \text{و} \quad t = \tau \cosh \psi \quad \text{و} \quad r = c\tau \sinh \psi$$

إذن:

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$c\rho = u \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

نصل من هذه الروابط الى المترية التاليه:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - c^2 \tau^2 \left\{ \frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\}$$

إذا فرضنا أن الزمن الكوني ثابت يعني  $d\tau = 0$  إذن:

$$d\sigma^2 = c^2 \tau^2 \left\{ \frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\}$$

العبارة داخل  $\{ \}$  تمثل فضاء ذو تقوس ثابت أي  $K = -1$  في نفس الوقت تمثل  $d\sigma^2$  فضاء تقوسه

$$-\frac{1}{c^2 \tau^2}$$

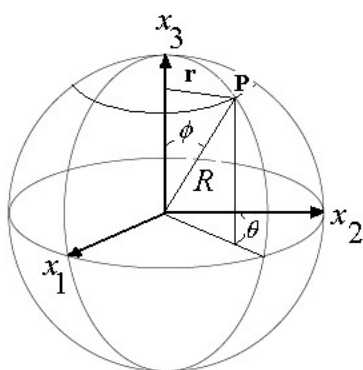
(ضرب مترية ما في عامل ثابت مثل  $A$  يؤدي الى ازدياد كلِّ معامل هذه المترية بنسبة  $A$  و

نقصان تقوس فضاء هذه المترية بنسبة  $\frac{1}{A^2}$ )

إذن نموذج ميلن عبارة عن فضاء ثلاثي الأبعاد ذو تقوس سالب و ثابت  $K = -\frac{1}{c^2 \tau^2}$

آخر مترية نتناول بحثها هي مترية روبرتسون واكر Robertson-Walker metric

R نصف قطر دائره في فضاء شبه إقليدي رباعي الأبعاد و k ضريب



$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{k} R^2 k \quad k = \pm 1 \text{ و } k \rightarrow 0$$

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{k} R^2 k \Rightarrow x_4^2 = \frac{1}{k} R^2 k - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

$$x_4 dx_4 = -(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3) \Rightarrow x_4^2 dx_4^2 = (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2$$

$$dx_4^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{\frac{1}{k} R^2 k - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

إذن:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{\frac{1}{k} R^2 k - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \quad \text{I}$$

نستعين بهذه التحويلات:

$$x_1 = Rr \cos \phi \sin \theta$$

$$x_2 = Rr \sin \phi \sin \theta$$

$$x_3 = Rr \cos \theta$$

$$dx_1 = R \cos \phi \sin \theta dr - Rr \cos \phi \cos \theta d\theta + Rr \sin \phi \sin \theta d\phi$$

$$dx_2 = R \sin \phi \sin \theta dr - Rr \sin \phi \cos \theta d\theta - Rr \cos \phi \sin \theta d\phi$$

$$dx_3 = R \cos \theta dr + Rr \sin \theta d\theta$$

نضع هذه الروابط في المعادله I نحصل على:

$$dl^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

في هذه الرابطة  $dl^2$  مستقلة عن الزمن

أستناداً على مبدأ الكوسومولوجيا بأن الكون متجانس (homogenous) و متحد الخواص (isotropic) في هذه الحالة:  $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$  ، و نفرض بأن الكون يتوسع و هذا التوسع تابع للزمن أي:  $R \rightarrow R(t)$  إذن:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

تُعرف هذه المترية، بمترية روبرتسون- واكر

## قانون الجاذبية لأنشتاين

طبقا لقانون نيوتن في الجاذبية أن حقل الجاذبية الموجود في أي نقطة من الفضاء تُعَيِّنُه الكتلة أو بالأحرى توزيع المادة الموجودة في ذلك الفضاء، لذلك يمكن تعيين تنسور يقوم بربط المادة بحقل الجاذبية. أولاً يجب البحث عن تنسور يربط توزيع المادة بإحداثيات الزمكان، ثم ربط ذلك التنسور بتنسور الجيوديسية. التنسور الذي يؤدي هذه الوظائف هو تنسور الطاقة – ممنتوم، أستناداً على النسبية الخاصة هناك تكافؤ بين الطاقة و الكتلة لذلك يمكن القول بأن جميع القوى لها تأثير على حقل الجاذبية بما فيها الطاقة الكهرومغناطيسية.

أستناداً على قوانين نيوتن إذا كانت  $\mu$  كثافة المادة الموجودة في فضاء فإن حقل الجاذبية في ذلك الفضاء يمكن تعيينه من خلال دالة الجهد  $\varphi$  التي تصدق في هذه الرابطة:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \mu$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi G \mu$$

G في هذه الرابطة هي ثابت الجاذبية العام لنيوتن

القانون الجديد للجاذبية الذي نحن في صده يجب أن تكون  $\nabla^2 \varphi = 4\pi G \mu$  هي أحد نتائجه، و بما أن هذا القانون يضم إشتقاق من الدرجة الثانية و كذلك حقل الجاذبية فيه متناسب مع كثافة المادة لذلك يجب البحث عن تنسور يضم هذه الخصائص. تنسور أنشتاين يملك جميع هذه الخصائص و نكتبه بهذا الشكل:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\kappa T_{ij}$$

في هذه الرابطة  $\kappa$  ضريب متناسب مع ثابت الجاذبية العام لنيوتن، و  $T_{ij}$  تنسور الطاقة – ممنتوم .  
تنطبق نتائج هذا القانون على نتائج الأرصاد الفلكية للمجرات.



الصيغة السّمية لهذا القانون هي:

$$R = \kappa T$$

لذلك:

$$R_{ij} = \kappa \left( \frac{1}{2} g_{ij} T - T_{ij} \right)$$

الروابط و المحاسبات بعد هذه الرابطة فيها بعض التعقيدات و نكتفي بالنتيجة النهائية التي نستنتجها منها و التي سنستخدمها في الصفحات القادمة ، إذن :

$$R_{44} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \varphi$$

إذا كان حقل الجهد السّمي لنيوتن في حقل جاذبيه ضعيف و ساكن في هذه الحالة:

$$g_{44} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

هذه النتيجة مهمه و سنستخدمها في حلّ شولترتزشيلد . لأن الجهد  $\varphi$  في الفاصلة  $r$  من جسم كروي كتلته  $M$  يساوي :

$$\varphi = -\frac{GM}{r}$$

و منها :

$$g_{44} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

## حلّ شوارتزشيلد

نبدأ من هذه المترية او المترية

$$ds^2 = adr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - bc^2 dt^2$$

هذه المترية ذات تناظر كروي و  $a$  و  $b$  توابع من  $r$  و قيمة كلاهما تقريباً واحد، و  $c$  سرعة الضوء في الفراغ ،

المتغيرات في هذه المترية هنّ:

$$x^1 = r \quad \text{و} \quad x^2 = \theta \quad \text{و} \quad x^3 = \phi \quad \text{و} \quad x^4 = t$$

هذه المترية هي لفضاء خالي من المادة، ماعدى جسم كروي مركزه منطبق على مركز الإحداثي. خارج هذا الجسم تنسور الطاقة - ممنتوم صفر، و تنسور ريتشي  $R_{ij} = 0$  و هذا يستطلب أن تصبح كل معامل هذا التنسور مساوية للصفر.

$$g_{11} = a$$

$$g_{22} = r^2$$

$$g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{44} = -bc^2$$

$$g = -abc^2 r^4 \sin^2 \theta$$

$$g^{11} = \frac{1}{a}$$

$$g^{22} = \frac{1}{r^2}$$

$$g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$g^{44} = -\frac{1}{bc^2}$$

علائم كريستوفل

علائم كريستوفل ليست بتنسور و هي متناظرة بالنسبة ل  $i$  و  $j$

نحسب قيمة هذه العلائم من الروابط المذكوره في الفصل السابق و العلائم المخالفه للصفر هي كالاتي:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{a'}{2a}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4 = \frac{b'}{2b}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{a}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{r}{a} \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{44}^1 = \frac{c^2 b'}{2a}$$

$a'$  و  $b'$  إشتقاق بالنسبه للمتغير  $r$

تنسور ريتشي لهذا المترية

$$R_{ij} = R_{ijk}^k$$

المعامل المخالفة للصفر في تنسور ريتشي هي :

إذن:

$$R_{11} = \frac{b''}{2b} - \frac{b'^2}{4b^2} - \frac{a'b'}{4ab} - \frac{a'}{ar}$$

$$R_{22} = \frac{rb'}{2ab} - \frac{ra'}{2a^2} + \frac{1}{a} - 1$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

$$R_{44} = c^2 \left( -\frac{b''}{2a} + \frac{b'^2}{4ab} + \frac{a'b'}{4a^2} - \frac{b'}{ar} \right)$$

تقوس فضاء أو أنطواء الفضاء لهذه المترية هو:

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

$$R = \frac{b''}{ab} - \frac{b'^2}{2ab^2} - \frac{a'b'}{2a^2b} + \frac{2b'}{abr} - \frac{2a'}{a^2r} + \frac{2}{ar^2} - \frac{2}{r^2}$$

في قانون الجاذبية لأنشتاين جميع معامل تنسور ريتشي تساوي صفر، أي:

$$\frac{b''}{2b} - \frac{b'^2}{4b^2} - \frac{a'b'}{4ab} - \frac{a'}{ar} = 0$$

$$\frac{rb'}{2ab} - \frac{ra'}{2a^2} + \frac{1}{a} - 1 = 0$$

$$-\frac{b''}{2a} + \frac{b'^2}{4ab} + \frac{a'b'}{4a^2} - \frac{b'}{ar} = 0$$

نستنتج من الرابطة الاولى و الثالثة هذه الرابطة:

$$ab' + a'b = 0$$

لهذا

ثابت  $a \cdot b =$  ، (اي قيمه ثابتة)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a \rightarrow 1$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b \rightarrow 1$$

$$ab = 1$$

نحذف b من المعادله  $\frac{rb'}{2ab} - \frac{ra'}{2a^2} + \frac{1}{a} - 1 = 0$  نحصل على

$$ra' = a(1-a)$$

من تكامل هذه الرابطة نحصل على

$$a = \frac{1}{1 - 2m/r}$$

في هذه الرابطة m ثابت التكامل، ثم نحصل على

$$b = 1 - 2m/r$$

تصبح المترية لهذا الفضاء بهذا الشكل:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \quad \text{I}$$

هذه المترية ذات تناظر كروي و تُعبر عن حقل جاذبيه خارج جسم كروي، مركز الإحداثي الكروي منطبق على مركز هذا الجسم. إحداثيات هذا الإحداثي هي  $(r, \theta, \phi)$  هذه المترية وضعها شوارتزشيلد. سنثبت لاحقاً ان m متناسبة مع كتلة الجسم.

$$- \text{ نفرض أن } m = \frac{GM}{c^2}$$

-  $G$  في هذه الرابطة هو ثابت الجاذبية العام لنيوتن

-  $M$  الكتله

-  $c$  سرعة الضوء في الفراغ

النتيجة النهائية هي:

$$ds^2 = adr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - bc^2 dt^2 \quad \text{II}$$

من تساوي معامل إحداثية الزمان لكلا هاتين المتريةتين I و II نحصل على:

$$bc^2 = c^2(1 - 2m/r)$$

و من هذه الرابطة  $m = \frac{GM}{c^2}$  نحصل على:

$$b = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

إذا كانت  $b = 0$  إذن  $r = 2m = \frac{2GM}{c^2}$

الحد الأدنى لقيمة  $r$  بمجاورة حقل جاذبية الأرض:

$$M = 5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$$
 كتلة الأرض

$$G = 6.67428 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$
 ثابت الجاذبية

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
 سرعة الضوء

في حدود 9 ملي متر، لذلك يجب أن يكون نصف قطر هذا الجسم الكروي أكبر من 9 ملي متر كي تصبح قيمة الإحداثيه الرابعه أو بعد الزمان مخالفاً للصفر و كذلك ذو قيمه سالبه.

لو وضعنا هذه القيمه  $m = \frac{GM}{c^2}$  في سلمية ريتشي

$$R = \frac{b''}{ab} - \frac{b'^2}{2ab^2} - \frac{a'b'}{2a^2b} + \frac{2b'}{abr} - \frac{2a'}{a^2r} + \frac{2}{ar^2} - \frac{2}{r^2}$$

تكون النتيجة  $R = +\frac{4m}{r^3}$

نصف قطر الأرض 6378000 متر  $r =$  لذلك تقوس الفضاء الناتج عن حقل جاذبية الأرض أو كتلة

الأرض حدود  $6.8 \times 10^{-23} \frac{1}{m^2}$

من بين نتائج مترية شوارتزشيلد نظرية الثقوب السوداء، حيث فيها نصف قطر شوارتزشيلد

$$r = \frac{2GM}{c^2}$$

## مدار الكواكب

قوة جاذبية الكواكب على الشمس تؤدي الى تباطؤ تعجيل الشمس بالنسبة لإحداثي ساكن، إذا فرضنا إن الإحداثي يتحرك مع الشمس فعلاوة على حقل جاذبية الشمس و الكواكب هناك حقل جاذبيه ينتج من التعجيل في هذا الإحداثي. إذا فرضنا أن مركز الإحداثي الكروي منطبق على مركز الشمس و متقاصرة أو جيوديسية شوارتزشيلد هي التي تعين إحداثيات هذا الإحداثي، و جميع الكواكب حكمها حكم ذرات لها حقول جاذبيه ضعيفة جداً يمكن غض النظر عنها في هذه الحالة جميع المنحنيات في هذا الفضاء هي جيوديسية إحداثياتها زمان - مكان.

نضع مقادير a و b من هذه الروابط ثم نحسب علائم كريستوفل.

$$a = \frac{1}{1 - 2m/r}$$

$$b = 1 - 2m/r$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{m}{r(r-2m)}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{14}^4 = \frac{m}{r(r-2m)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -(r-2m)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot \theta$$

$$\Gamma_{33}^1 = -(r-2m) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{44}^1 = \frac{mc^2}{r^3} (r-2m)$$

نضع هذه الروابط في المعادله العموميه للجيوديسيه



$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

النتيجة أربع روابط بهذا الشكل:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{m}{r(r-2m)} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - (r-2m) \left\{ \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - \frac{mc^2}{r^3} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \right\} = 0$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{2m}{r(r-2m)} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

كذلك متريّة شوارتزشيلد

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2$$

إنتخاب الإحداثي الكروي يتم على هذا الغرار بأن الكواكب تبدأ حركتها في الصفحة  $\theta = \frac{\pi}{2}$  و في بداية

الحركة يكون  $\frac{d\theta}{ds} = 0$  لذلك تصبح هذه المعادلات بهذا الشكل:

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{2m}{r(r-2m)} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0$$

$$\frac{r}{r-2m} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - \frac{c^2}{r} (r-2m) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1$$

نفرض هذين الفرضين  $w = \frac{d\phi}{ds}$  و  $v = \frac{dt}{ds}$  ونضعهما في المعادلات الأولى و الثانية (تغير المتغير)

$$\frac{dw}{dr} + \frac{2}{r}w = 0$$

$$\frac{dv}{dr} + \frac{2m}{r(r-2m)}v = 0$$

يعطي تكامل هذه الروابط هذه النتيجة:

$$w = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\alpha}{r^2}$$

$$v = \frac{dt}{ds} = \frac{\beta r}{r-2m}$$

نضع  $\frac{d\phi}{ds}$  و  $\frac{dt}{ds}$  في المعادلة  $\frac{r}{r-2m} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - \frac{c^2}{r} (r-2m) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1$  النتيجة:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^3}(r-2m) = 1 + c^2\beta^2 - \frac{2m}{r}$$

نحذف  $ds$  بين هذه المعادلة و المعادلة  $w = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\alpha}{r^2}$  النتيجة معادلة مدار الكواكب:

$$\left(\frac{\alpha}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = 1 + c^2\beta^2 - \frac{2m}{r} + \frac{2m\alpha^2}{r^3}$$

نضع  $u = \frac{1}{r}$  تصبح هذه المعادلة بهذا الشكل:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{1 + c^2\beta^2}{\alpha^2} - \frac{2m}{\alpha^2}u + 2mu^3$$

إشتقاق من هذه المعادلة بالنسبة ل  $\phi$ :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{\alpha^2} + 3mu^2$$

معادلة مدار الكواكب و السيارات في الميكانيك الكلاسيكي هي:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

في هذه المعادلة  $M$  كتلة الجسم الجاذب (ذو الجاذبية العاليه) و  $h$  سرعة عزم السياره بالنسبة لمحور الجاذبيه أي:

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = h$$

المعادله التي تشابه هذه المعادلة في النسبية العامة هي المعادلة  $w = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\alpha}{r^2}$  و استناداً على مترية

شوارتزشيلد فإن  $ds = icdt$  لذلك المعادلة  $w = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\alpha}{r^2}$  هي تشابه هذه المعادلة:

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = ic\alpha$$

لذا  $h = ic\alpha$  و تصبح المعادلة  $\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{\alpha^2} + 3mu^2$  بهذا الشكل:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mc^2}{h^2} + 3mu^2$$

(سنستعين بهذه المعادلة في الفصل القادم لمحاكاة إنحناء الضوء)

إذا غطينا النظر عن  $3mu^2$  تصبح هذه المعادلة مساوية للمعادلة الكلاسيكية بشرط أن تكون

$$m = \frac{GM}{c^2}$$

نسبة  $3mu^2$  الى  $\frac{mc^2}{h^2}$  تساوي:

$$\frac{3h^2u^2}{c^2} = \frac{3}{c^2} r^2 \phi^2$$

$r\phi$  هي أحد معامل حركة السيارات و عطاردها لها النصب الأكبر من بين سيارات المنظومه الشمسيه أي 48 كيلو متر في الثانيه و هذه النسبه قيمتها هي  $7.7 \times 10^{-8}$  قيمتها صغيره جداً .

جواب المعادلة الكلاسيكيه  $\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2}$  هو:

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos(\phi - \omega)\}$$

في هذه الرابطة:

$\mu = GM = mc^2$  و  $e$  خروج عن المركز (eccentricity) و  $\omega$  طول الحضيض (longitude of perihelion)

هذا الجواب أشبه بجواب المعادلة الناتجة من النسبية العامة  $u = \frac{mc^2}{h^2} + 3mu^2$  مع خطأ يمكن غض النظر عنه هو :

$$3mu^2 = \frac{3m\mu^2}{h^4} \{1 + e \cos(\phi - \omega)\}^2$$

المعادلة النهائية:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} + \frac{3m\mu^2}{h^4} \{1 + e \cos(\phi - \omega)\}^2$$

جواب هذه المعادلة:

$$u = \frac{\mu}{h^2} \left\{ 1 + e \cos(\phi - \omega) + \frac{3m\mu e}{h^2} \phi \sin(\phi - \omega) \right\}$$

من خلال بعض الروابط المثلثاتيه و غض النظر عن عبارة صغيرة جداً هي  $\delta\omega^2$  و فرض  $\delta\omega = \frac{3m\mu\phi}{h^2}$  نصل الى هذه المعادلة:

$$u = \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos(\phi - \omega - \delta\omega)\}$$

لو قايينا هذه المعادلة مع المعادلة الكلاسيكيه  $u = \frac{\mu}{h^2} \{1 + e \cos(\phi - \omega)\}$  لوجدنا الزاويه  $\delta\omega$  هي تقدم نقطة الحضيض لمدار السيارات، هذه الزاويه هي أحد نتائج النسبية العامة و التي أثبتت صحتها الارصاد الفلكية خصوصاً تقدم نقطة حضيض عطارد، حيث عجز الميكانيك الكلاسيكي من إعطاء برهان رياضي عليها.

إستناداً على هذه المعادله يجب إضافة طول الحضيض على الدوام طبقاً لهذه الرابطة:

$$\delta\omega = \frac{3m\mu}{h^2} \phi = \frac{3\mu^2}{c^2 h^2} \phi = \frac{3\mu}{c^2 l} \phi$$

في هذه الرابطة:

$$\mu = GM_{sun} \Rightarrow \mu = \left( 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2} \right) \times (1.99 \times 10^{30} kg) = 1.327 \times 10^{20} \frac{m^3}{s^2}$$

$$l = \frac{h^2}{\mu}$$

$$h = \sqrt{(1-e^2) \mu a}$$

$$\phi = 2\pi$$

$$\delta\omega = \frac{3GM}{c^2 \frac{h^2}{\mu}} \phi = \frac{6\pi GM}{c^2 (1-e^2) a}$$

$$\delta\omega = \frac{6\pi GM}{c^2 (1-e^2) a}$$

لكوكب عطارد:

$$a = 5.79 \times 10^{10} m$$

نصف قطر مدار عطارد حول الشمس (القطر الأطول)

$$e = 0.206$$

خروج عن المركز لمدار عطارد

$$c = 299\,792\,458 \frac{m}{s}$$

سرعة الضوء

$$\delta\omega = 5.019775 \times 10^{-7} \text{radian} \quad \text{إذن:}$$

$$\frac{360^\circ}{2\pi} \times 60' \times 60'' = (2.0626 \times 10^5)'' / \text{radian} \quad \text{واحد راديان يساوي ثانيه من الدرجة على راديان}$$

إذن:

$$\delta\omega = 5.019775 \times 10^{-7} \text{radian} \times (2.0626 \times 10^5)'' / \text{radian} = 0.10354''$$

السنة العطارديه 88 يوم و السنه الأرضيه 365.25 إذن تقدم نقطة حضيض عطارد في السنه الأرضيه يساوي:

$$\delta\omega = \frac{365.25}{88} \times 0.10354'' = 0.4297''$$

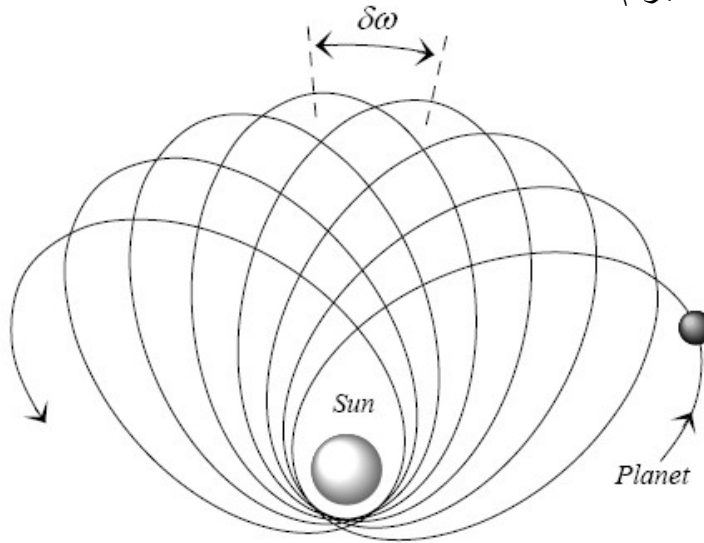
في مائة سنه أرضيه يكون تقدم نقطة حضيض عطارد حدود 43 ثانيه. هذه أحد أهم نتائج النسبية العامة و أكدت الأرصاد الفلكيه صحة هذه النتيجة.

تقدم نقطة الحضيض في القرن لهذه الأجرام

عطارد 43".0

الزهرة 8".3

الأرض 3".8



## إنحراف مسير الضوء

في فضاء تحكمه مترية شوارتزشيلد

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2$$

يقطع الضوء الفاصله بين نقطتين في هذا الفضاء على مسير متقاصر أو جيوديسية أي  $ds = 0$  كذلك توصلنا لهذه المعادله في الفصل السابق:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{mc^2}{h^2} + 3mu^2$$

$h = \infty$  لأن  $ds = 0$  (راجع معادلات الفصل السابق وضع  $ds = 0$ ) تصبح المعادله بهذه الصوره:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3mu^2$$

لو غضينا النظر عن الطرف الأيمن للمعادله يصبح جواب هذه المعادله في إحداثي قطبي خط مستقيم بهذا الشكل:

$$u = \frac{1}{R} \cos(\phi + \alpha)$$

$R$  و  $\alpha$  ثوابت التكامل، إذا كان حقل الجاذبيه ضعيف فمسير حركة الضوء عبارة عن خطوط مستقيمه. فرضنا في الفصل السابق و لخصنا مترية شوارتزشيلد في صفحه الأستواء أي  $\theta = 0$  كذلك نفرض ان مسير حركة الضوء بموازات الخطوط  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$  و هذا يستطلب  $\alpha = 0$ . نضع هذا الجواب مع هذا الفرض الأخير في الطرف الأيمن للمعادله تصبح:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3m}{R^2} \cos^2 \phi$$

جواب هذه المعادله الإشتقاقية (مع العلم بأن جواب خاص هذه المعادله  $\frac{m}{R^2} (2 - \cos^2 \phi)$  هو:

$$u = \frac{1}{R} \cos \phi + \frac{m}{R^2} (2 - \cos^2 \phi)$$

في بداية و نهاية هذا الشعاع الضوئي  $u = 0$  لذلك:

$$\frac{m}{R} \cos^2 \phi - \cos \phi - \frac{2m}{R} = 0$$

إذا فرضنا قيمة  $\frac{m}{R}$  صغيرة ، هذه معادله درجه ثانيه ذات جوابين الجواب ذو القيمة الأقل هو:

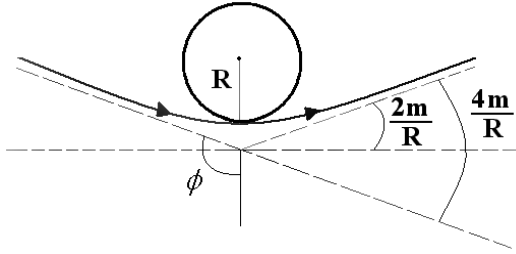
$$\cos \phi = -\frac{2m}{R}$$

في إنتهائين هذا الشعاع الضوئي يكون

$$\phi = \pm \left( \frac{\pi}{2} + \frac{2m}{R} \right)$$

لذلك القيمة المطلقة لإنحراف مسير الضوء نتيجة عبوره من حقل جاذبيه قوي حسب الراديان يساوي:

$$\frac{4m}{R}$$



في هذه الرابطة  $m = \frac{GM}{c^2}$  إذن:

$$\frac{4GM}{c^2 R}$$

مقدار إنحراف شعاع ضوئي مماس لسطح الشمس عن مسيره الأفقي يساوي:

$$M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

$$R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$$

كتلة الشمس

سرعة الضوء في الفراغ

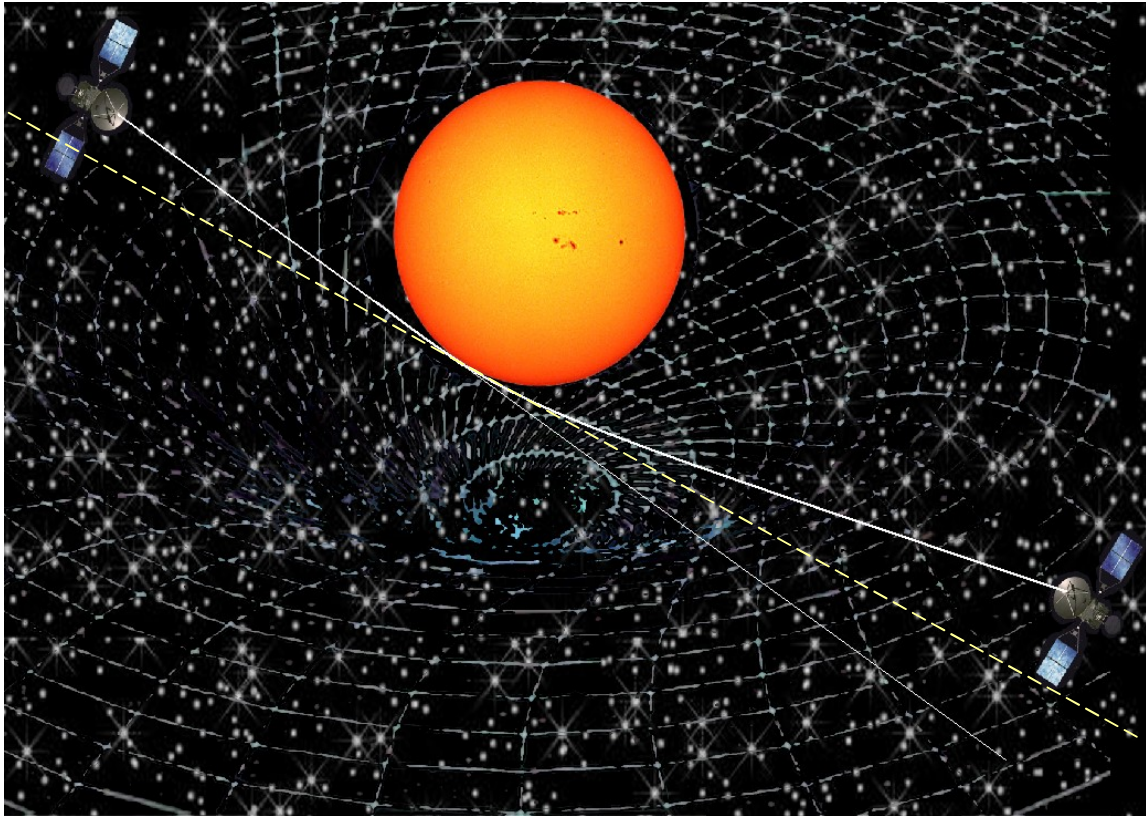
ثابت الجاذبيه العام لنيوتن

نصف قطر الشمس



$$\frac{4 \times 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2} \times 1.99 \times 10^{30} kg}{\left(299\,792\,458 \frac{m}{s}\right)^2 \times 6.95 \times 10^8 m} = 8.5 \times 10^{-6} \text{radian} = 1.75''$$

أي: إنحراف مسير الضوء عند عبوره من على سطح الشمس يساوي 1.75 ثانية من الدرجة. هذه النتيجة النظرية الناتجة عن هذه المحاسبات كانت مساوية للنتيجة العملية الحاصلة من رصد الضوء الساطع من كوكب قرب قرص الشمس عند كسوف كامل للشمس. تسمى هذه الظاهرة بعدسة الجاذبية.



## إنزياح الطيف

الإنزياح نحو الأحمر: يصدر الجسم المعتم الساخن طيف ضوئي تتعلق شدة هذا الطيف بدرجة حرارة هذا الجسم، لا تستثنى نجوم السماء من هذه الخاصية فكل نجم من نجوم السماء يصدر طيف ضوئي خاص به و بمكوناته وبدرجة حرارته. عند دراسة الطيف الصادر من بعض النجوم في مجرة درب التبانة، شاهد المتخصصين بهذا المجال، فقدان بعض ألوان طيف هذه النجوم كذلك شاهدوا إنزياح ألوان الطيف نحو اللون الأحمر.

لو راجعنا ظاهرة دوبلر في أختلاف تواتر الأمواج الصادرة من منبع موجي متحرك لوجدنا ارتفاع تواتر الموج القادم نحونا و إنخفاض تواتر الموج المبتعد عننا، هذه الظاهرة لجميع الأمواج سواء الصوتية أم الضوئية (أو كهرومغناطيسية) إذ كان منبع الضوء يبتعد عننا فهو ذو تواتر منخفض أي طيف هذا المنبع الضوئي منزاح نحو الأحمر و إذا كان منبع الضوء يقترب نحونا فطيفه ذو تواتر عالي أي منزاح نحو الأزرق أو البنفسجي .

إذا كان الكون في حالة سكون ففي هذه الحالة مجموع الإنزياحات نحو الأحمر تساوي مجموع الإنزياحات نحو الأزرق بينما عملياً سجلت الأرصاد الفلكية أن طيف جميع المجرات منزاح نحو الأحمر و نسبة هذا الإنزياح تتناسب طردياً مع بُعد المجرة عن الأرض و هذا يؤيد فكرة الكون المتسع.

لم تفسر نظرية نيوتن علة الإنزياح نحو الأحمر في الطيف الصادر من النجوم حتى فسرت النسبية العامة هذه الظاهرة و أرجعت السبب الى حقل الجاذبية ، و نسبياً أطلقت على هذه الظاهرة الإنزياح نحو الأحمر بالجاذبية (Gravitational redshift) ، و هي لو أن نجماً ذو حقل جاذبية قوي يصدر شعاع ضوئي ، تردد هذا الشعاع الضوئي قرب هذا النجم نتيجة هذا الحقل ، عالي جداً ، إذن هو منزاح نحو البنفسجي ، لكن كلما أبتعد هذا الشعاع الضوئي عن هذا النجم ، قلّ أثر حقل الجاذبية عليه و بالتالي ينخفض تردده ، يؤدي إنخفاض التردد الى إنزياح لون هذا الشعاع الضوئي نحو الأحمر.

ساعة المرجع التي يقاس بها الزمن يمكن أن تكون أي وسيلة ذات حركة تناوبية منتظمة وغير متمايزه. إذا كانت A و B حادثتان بمجاورة ساعة المرجع و الحادثه B وقعت بعد الحادثه A في هذه الحاله إحدائيه الزمن للحادثه B أكبر من إحدائيه الزمن للحادثه A.

نفرض أن A و B بداية و نهاية حادثتان كذلك C و D لحادثتان في مرجع آخر. الرابطه الهندسيه في الزمكان بين A و B مساويه للرابطه الهندسيه بين C و D، لكلا هاتين الحالتين من الحوادث يتم قياس الزمان في فاصلتان متساويتان من الجيوديسه ds، إذن:

$$\int ds$$

$$ds^2 = g_{ii} (dx^i)^2$$

$x^i$  إحدائيات حادثه في مرجع زمكان الإحدائيات  $x^1$  و  $x^2$  و  $x^3$  فيزيائياً إحدائيات فضاء الإحدائي المرجع و  $\frac{x^4}{ic}$  عباره عن الزمن. إذا كانت الساعه التي يقاس بها زمن حدوث هذه الحوادث ساكنه

بالنسبه للمرجع ففي هذه الحاله  $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$  لذلك:

$$ds^2 = g_{44} (dx^4)^2 = -c^2 g_{44} dt^2$$

في هذه الرابطه  $x^4 = tci$ ، إذن الرابطه للفاصله s التي t إحدائيه الزمن في النقطه ( $x^1$  و  $x^2$  و  $x^3$ ) هي:

$$s = ic \int \sqrt{g_{44}} dt$$

في هذه الرابطه s خياليه و ذلك لأن ds بين فاصلتين زمنييتين خيالييتين، و يمكن تدريج الساعه المرجع، بحيث  $T = \frac{s}{ic}$  و ستصبح الرابطه بين الزمن T في الساعه المرجع و إحدائيه الزمن t بهذه الصوره:

$$T = \int \sqrt{g_{44}} dt$$

إذا كان حقل الجاذبيه ضعيف و ساكن، في هذه الحاله  $g_{44}$  حسب الجهد السلمي لنيوتن  $\phi$  هي:

$$g_{44} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

لذلك:

$$dT = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}} dt$$

إنتشار الطيف الصادر من ذرة يعتبر كساعة معيار، إذن الفاصله الزمنية التي تناظر تناوب إنتشار خطوط الطيف الصادرة من ذرتين متشابهتين ساكنتين في مكانين متفاوتين متساوية. إذا كانت هذه الفاصله الزمنية  $dT$  و  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  الجهد السلمي في حقل جاذبيه هاتين الذرتين و  $dt_1$  و  $dt_2$  دوره

تناوبيه كامله حسب إحداثية الزمن. من الرابطة  $dT = \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}} dt$  نحصل على:

$$dT = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}} dt_1 = \sqrt{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}} dt_2$$

ثم نحصل على:

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}}}$$

نفرض إن الذرات في حالة تشعشع (أو ومضات ضوئيه) في نقطة من حقل جاذبيه، و  $t_a$  إحداثيه زمنية لقمة الموجه الناتجه من أشعاعات هذه الذرة و  $t_b$  إحداثيه زمنية لقمة موج ثانيه و  $t'_a$  و  $t'_b$  الزمن الذي يستغرق من لحظة صدور هذه الومضات أو الأشعاعات حتى وصولها لتلك النقطة من حقل الجاذبية، بما إن هذين المرجعين ساكنين فالفاصله الزمنية من لحظة صدور قمة موج حتى و وصولها لهذه النقطة ثابتة، إذن:

$$t'_a - t_a = t'_b - t_b \Rightarrow t'_a - t'_b = t_a - t_b$$

من هذه الرابطه يتضح أن تذبذب هذه الذرة في هذه النقطة مستقل عن مكان هذه النقطة ويساوي الفاصله الزمنية لتذبذب كل من هاتين الذرتين حسب الساعة الموجودة في مكان تواجد الذرة نفسها، إذا كان  $v_1$  و  $v_2$  تذبذب خطوط طيف هذه الذرتين في هذه النقطة، إذن:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}}{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}}}$$

من بعض الأعمال الجبريه على هذه الرابطه نصل الى:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}} \Rightarrow \left(1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{V_1}{c^2} \\ \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}}} \Rightarrow \left(1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{\varphi_2}{c^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 + \frac{2\varphi_2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\varphi_1}{c^2}}} \approx 1 + \frac{\varphi_1}{c^2} - \frac{\varphi_2}{c^2}$$

في هذه الروابط قد غضيبتنا النظر عن العبارات الصغيرة جداً كالعبارة  $\frac{\varphi_2\varphi_1}{c^4}$

إذن:

$$\frac{v_1}{v_2} = 1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}$$

مثلاً لذرة واقعة على سطح الشمس و أخرى مشابه لها على سطح الأرض في هذه الحالة:

$$c = 299\,792\,458 \frac{m}{s} \quad \text{سرعة الضوء في الفراغ}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2} \quad \text{ثابت الجاذبية العام لنيوتن}$$

$$M_s = 1.99 \times 10^{30} kg \quad \text{كتلة الشمس}$$

$$R_s = 6.95 \times 10^8 m \quad \text{نصف قطر الشمس}$$

$$M_e = 5.97 \times 10^{24} kg \quad \text{كتلة الأرض}$$

$$R_e = 6356000m \quad \text{نصف قطر الأرض}$$

جهد الجاذبية Gravitational Potential عند نقطه في مجال (حقل) الجاذبيه هو، الشغل المبذول

$$\varphi = -\frac{GM}{R} \quad \text{لنقل وحدة الكتلته من هذه النقطه الى مالا نهايه. بعباره أخرى}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_e &= -\frac{GM_e}{R_e} = -6.27 \times 10^7 \\ \varphi_s &= -\frac{GM_s}{R_s} = -1.907 \times 10^{11} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_e}{V_s} = 1 + \frac{\varphi_e - \varphi_s}{c^2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 1.00000212$$

هذه القيمه صغيرة جداً و لايمكن قياسها، لكن لو أستبدلنا الشمس بشعري اليمانية فالنتيجه ثلاثين مرة أكبر من هذه القيمه و النتيجه تنطبق على نتائج الأرصاد الفلكيه.

## معادلات الحقل عند تواجد المادة

سنبحث في هذا الفصل الحقل في حالة وجود المادة فيه، ثم نستنتج معادلات حقل أنشتاين. معادلات حقل خلا أنشتاين  $R_{\mu\nu} = 0$  أشبه لمعادلات لابلاس لدالة الجهد النيوتني في فضاء فارغ  $\Delta^2\phi = 0$ ، لكن إذا أردنا أستنتاج معادلات حقل جاذبيه متأثراً بالمادة أو الكتلة الموجودة فيه (يمكن أن تكون هذه المادة مثلاً الكتلة الموجودة داخل الأرض أو الغبار و الدخان الموجود في الكون) في هذه الحالة نحن بحاجة الى النظرية النسبية العامة المتكافئة مع معادلات بواسون (poisson)  $\Delta^2\phi = 4\pi\rho G$  (في هذه المعادله G ثابت الجاذبيه الكوني لنيوتن و  $\rho$  الكثافة).

للحصول على معادلات الحقل الماديّ يجب أن يكون تنسور ريتشي مساوي لتنسور مخالف للصفر، التنسور المناسب هو التنسور اللا متغير للطاقة  $T^{\mu\nu}$ ، لا يمكن التساوي بين تنسور لا متغير  $T^{\mu\nu}$  مع

تنسور متغير  $R_{\mu\nu}$

نكتب التنسور  $R_{\mu\nu}$  بصيغة لا متغير بهذه الصورة:

$$R^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma}$$

إذن:

$$R^{\mu\nu} = -kT^{\mu\nu}$$

في هذه الرابطة k ثابت و العلامة السالبة لتسهيل بعض العمليات الحسابيه ليس لها تأثير فيزيائي. أحد الأستنتاجات التي يمكن أستنتاجها من هذه الرابطة هي أستلزام  $T^{\mu\nu} = 0$  في الزمكان المسطح. بما إن الفضاء يتقوس جزئياً أثر وجود المادة فيه لذلك قيمة k في هذه الرابطة صغيرة و يمكن غض النظر عنها في الزمكان المسطح.

في الهندسه الريمانيه أستناداً على متطابقة بيانكي

$$\left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = 0$$

في هذه الرابطة العلامه خارج القوسين هي التفاضل المطلق، و الرابطة بين التفاضل المطلق و التفاضل اللا متغير هي:

$$\frac{D}{ds} A_v^\mu = A_v^\mu \left( \frac{dx^\sigma}{ds} \right)$$

إذا كان  $T_{;v}^{\mu\nu} = 0$  يستلزم هذا  $R_{;v}^{\mu\nu} = 0$  متطابقة بيانكي تستوجب  $R_{;v} = R_{,v}$

إذن:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -k T^{\mu\nu}$$

هذه هي معادلات حقل أنشتاين التي طرحها عام 1915. إذا ضربنا طرفين هذه المعادله في  $g_{\mu\nu}$  كذلك نستعين بهذه الروابط من حساب التنسور:

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$$

دلتاي كرونكر  $\delta_{ij}$  تعريفها بهذه الصيغه:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu = \nu \\ 0 & \text{if } \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{44} = 1+1+1+1=4$$

نحصل على هذه المعادلات:

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = -k g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

$$R - \frac{1}{2} (1+1+1+1) R = -k T \Rightarrow R = k T$$



$$R = kT$$

لذلك يمكن كتابة  $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -kT^{\mu\nu}$  بهذه الصورة:

$$R^{\mu\nu} = -k(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T)$$

من نتائج هذه المعادلات:

1- في الخلاء  $T^{\mu\nu} = 0$  و تصبح هذه المعادلات بصورة  $R^{\mu\nu} = 0$  و هذه النتيجة متكافئة مع

$$R_{\mu\nu} = 0$$

2- معادلات هذا الحقل هي حسب  $g_{\mu\nu}$  و مشتقاتها فهي غير خطية لذلك لا يمكن جمع نتائج هذه

المعادلات، على سبيل المثال الحقل الكروي هو ليس مجموع حقلين كل منهما هو نصف كره. لكي

يعطي عمومية أكثر لمعادلات الحقل، غَضَّ أنشتاين النظر عن هذه الحالة اللا خطية و ذلك بأضافة

ثابت كوني لهذه المعادلات هو  $\Lambda$  ، هذا الثابت يمكن أن يكون سالب، موجب أو صفر. بحضور هذا

الثابت الكوني تصبح معادلات الحقل بهذه الصورة:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = -kT^{\mu\nu}$$

الثابت الكوني  $\Lambda$  مشابه الى  $R$  تقوَس الفضاء و وحدته  $\frac{1}{m^2}$  ، إذا كانت قيمة  $\Lambda$  موجبة فتأثيره مضاد

للجاذبيه. يمكن الاستفادة من هذا الثابت في نموذج كوني منبسط مع تعجيل. حسب التخمينات، القيمة

المطلقة لهذا الثابت هي في حدود  $|\Lambda| < 10^{-50} \frac{1}{m^2}$  في المحاسبات اللا كونييه يمكن غَضَّ النظر عن

هذا الثابت.

إذا ضربنا هذه الرابطة في  $g_{\mu\nu}$  نحصل على:

$$R = kT + 4\Lambda$$

و من هذه الرابطة نحصل على:

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} - k(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T)$$

في الزمكان المسطح و في غياب المادة هذه الرابطة بصورة:

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu}$$

كل فضاء تصدق فيه هذه الرابطة هو فضاء أينشتاين، و كل فضاء ذو تقوس ثابت هو فضاء أينشتاين لكن، لا كل فضاء تقوسه ثابت (سوى فضاء ثلاثي الأبعاد) هو فضاء أينشتاين. في هذه الروابط و المعادلات k هو ثابت الجاذبية العام الأينشتاين و يساوي:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \Rightarrow k = 2.073 \times 10^{-43} \frac{s^2}{kg.m}$$

G ثابت الجاذبية الكوني لنيوتن و c سرعة الضوء. أثر هذا الثابت في حدود المنظومه الشمسيه قليل جداً و يمكن غضّ النظر عنه.

إذا كانت الكتلة في الفضاء عبارة عن غبار في هذه الحالة يمكن تعيين قيمة الطاقة من هذه الرابطة  $T = c^2 \rho$  في هذه الرابطة c سرعة الضوء و  $\rho$  الكثافة.

## ديناميكا الكون

## ■ إستناداً على النظرية الشبه نيوتنيه

قبل البدء بالديناميكا الكونية لنظرية النسبية العامة الأفضل أن نبدأ بالنظرية الشبه نيوتنيه لأستنتاج معادله و نموذج يمكن إنتزاعه لاحقاً من نظرية النسبية العامة.

نبدأ من معادلة بواسون  $\Delta^2\varphi = 4\pi\rho G$  في هذه المعادله  $\rho$  الكثافه و هي دالة المتغير فيها الزمن أي  $\rho(t)$ . نفرض أن الزمان الذي يحيط بالمراقب الواقف في النقطة P هو فضاء ذو تناظر كروي، و لايمكن ان تكون  $\varphi$  في هذه النقطة ما لا نهايه و جوابها هو  $\varphi = a + b\sigma + c\sigma^2 + d\sigma^3 + \dots$  في هذا التساوي  $\sigma$  الفاصله في الفضاء الإقليدي من النقطة P ، أو بالأحرى كرة مركزها النقطة P. أحد أجوبة  $\varphi$  هي:

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi G\rho\sigma^2$$

معادلات نيوتن للحركة الدورانية هي  $\ddot{\sigma} = -\frac{d\varphi}{d\sigma}$  لذلك  $\ddot{\sigma} = -\frac{4}{3}\pi G\rho\sigma$  إذا فرضنا أن الفضاء حول النقطة P هو كره نصف قطرها  $\sigma$  و الكتلة الموجودة في هذه الكرة هي  $M'$  لهذا  $M' = \frac{4}{3}\pi\rho\sigma^3$  إذن:

$$\ddot{\sigma} = -\frac{GM'}{\sigma^2}$$

إذا فرضنا أن الفواصل في حدود المجرات و الفاصله من المجرة Q الى النقطة P تساوي r في هذه الحالة الكتلة الموجودة في هذه الفاصله من الفضاء ثابتة و لا تتغير مع الزمن، لأن في حالة أنبساط الفضاء فأن المادة لا تدخل و لا تخرج من هذه الكرة و هذا أستناداً على قانون نيوتن في الحفاظ. إذا فرضنا أن الفاصله بين المجرة Q و المجرة P عبارة عن الدالة  $R(t)$  هذه دالة متغيرها الزمن إذن:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}$$

في هذه الرابطة  $\ddot{R} = \frac{d^2R}{dt^2}$  و  $M = \frac{M'}{h}$  هنا h ثابت فلكي و M الكتلة الموجودة في كره نصف قطرها

$R(t)$

لقد فرضنا أن جواب  $\varphi$  حسب الفاصله  $\sigma$  بصورة  $\varphi = a + b\sigma + c\sigma^2 + d\sigma^3 + \dots$  و توصلنا الى الجواب  $\varphi = \frac{2}{3}\pi G\rho\sigma^2$  بما أن  $\frac{2}{3}\pi G\rho$  هو ثابت لذلك يمكن فرض جواب آخر مع ثابت آخر كالثابت  $\Lambda$  و سنحصل على جواب آخر هو  $\varphi = -\frac{1}{6}c^2\Lambda\sigma^2$  إذا أستعنا باتفاقية الجمع أو التراكم و جمعنا هذين الجوابين سنحصل على:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{4}{3}\pi\rho G\sigma - \frac{1}{3}c^2\Lambda\sigma$$

لقد فرضنا أن الفاصله بين المجرتين P و Q عبارته عن الداله  $R(t)$  لهذا  $R = \sigma$  و  $\ddot{R} = \ddot{\sigma}$  إذن:

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi\rho GR + \frac{1}{3}c^2\Lambda R \Rightarrow \ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} + \frac{c^2\Lambda R}{3}$$

نضرب طرفين المعادله  $\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} + \frac{c^2\Lambda R}{3}$  في  $2\dot{R}$  (هذا الضرب عبارته عن تكامل) مع العلم أن

$$2\dot{R}\ddot{R} = (\dot{R}^2)' \text{ و } 2R\dot{R} = (R^2)' \text{ نصل الى:}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{2GM}{R} + \frac{c^2\Lambda R^2}{3} - \tilde{k}c^2$$

في هذه الرابطه  $\tilde{k}c^2$  ثابت التكامل إذا فرضنا أن  $C = 2GM$  نصل الى هذه المعادله:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{c^2\Lambda}{3}R^2 - \tilde{k}c^2$$

تعمدنا في هذه المعادلات بالاستفاده من ثوابت خاصه و ذلك للتوفيق بين هذه المعادله و المعادله التي سنستنتجها من ميكانيك النسبية العامة:

■ إستناداً على نظريه النسبية العامة

نبدأ هذا البحث بمتريه روبرتسون – واكر

في هذه المتريه  $k = 0$  و  $k = \mp 1$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{R^2(t)}{1-kr^2} dr^2 - R^2(t)r^2 d\theta^2 - R^2(t)r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

معادلات حقل أنشتاين لهذه المتريه:

$$G_{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = -k T^{\mu\nu}$$

$$A = g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1-kr^2}$$

$$\alpha = -\frac{1-kr^2}{2R^2(t)}$$

$$B = g_{22} = -R^2(t)r^2$$

$$\beta = -\frac{1}{2R^2(t)r^2}$$

$$C = g_{33} = -R^2(t)r^2 \sin^2 \theta$$

$$\gamma = -\frac{1}{2R^2(t)r^2 \sin^2 \theta}$$

$$D = g_{44} = c^2$$

$$\delta = \frac{1}{2c^2}$$

إذن:

$$\frac{G_{11}}{g^{11}} = \frac{G_{22}}{g^{22}} = \frac{G_{33}}{g^{33}} = -\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} - \frac{k}{R^2} + \Lambda$$

$$\frac{G_{44}}{g^{44}} = -\frac{3\dot{R}^2}{R^2c^2} - \frac{3k}{R^2} + \Lambda$$

كذلك يمكن مراجعة المثال الثامن.

إذا كانت  $\mu \neq \nu$  في هذه الحالة  $G_{\mu\nu} = 0$  كذلك  $T = c^2\rho$  (في هذه الرابطة T الطاقة و c سرعة الضوء و  $\rho$  الكثافة) إذا وضعنا هذه الرابطة و المعادلتين أعلاه في قانون حقل عام أنشتاين

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

سنحصل على هذين الشرطين:

$$\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \Lambda = 0$$

الطرف الأيمن في هذه المعادلة هو  $-\frac{8\pi GP}{c^4}$  قيمة الضغط P صفر

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi\rho G}{3c^2}$$

إذا نقصنا المعادله الثانيه من المعادله الأولى نحصل على:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi\rho G}{3}$$

نضرب طرفين المعادله  $\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi\rho G}{3c^2}$  في  $R^3$  نحصل على:

$$\dot{R}^2 R + kc^2 R - \frac{\Lambda c^2 R^3}{3} = \frac{8\pi\rho G}{3} R^3$$

إشتقاق الطرف الأيسر يساوي  $2\ddot{R}\dot{R} + \dot{R}^3 + kc^2\dot{R} - \Lambda c^2\dot{R}R^2$

نضرب طرفين المعادلة  $\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \Lambda = 0$  في  $\dot{R}R^2$  نحصل على

$$\frac{2\ddot{R}}{Rc^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \Lambda = 0 \Rightarrow 2\ddot{R}\dot{R} + \dot{R}^3 + kc^2\dot{R} - \Lambda c^2\dot{R}R^2 = 0$$

الآن يمكن أن نستنتج أن تفاضل الرابطة  $\frac{8\pi\rho G}{3}R^3$  يساوي صفر إذن تكامل هذه الرابطة يساوي عدد

ثابت مثل C أي:

$$\left(\frac{8\pi\rho G}{3}R^3\right)' = 0 \Rightarrow \frac{8\pi\rho G}{3}R^3 = C$$

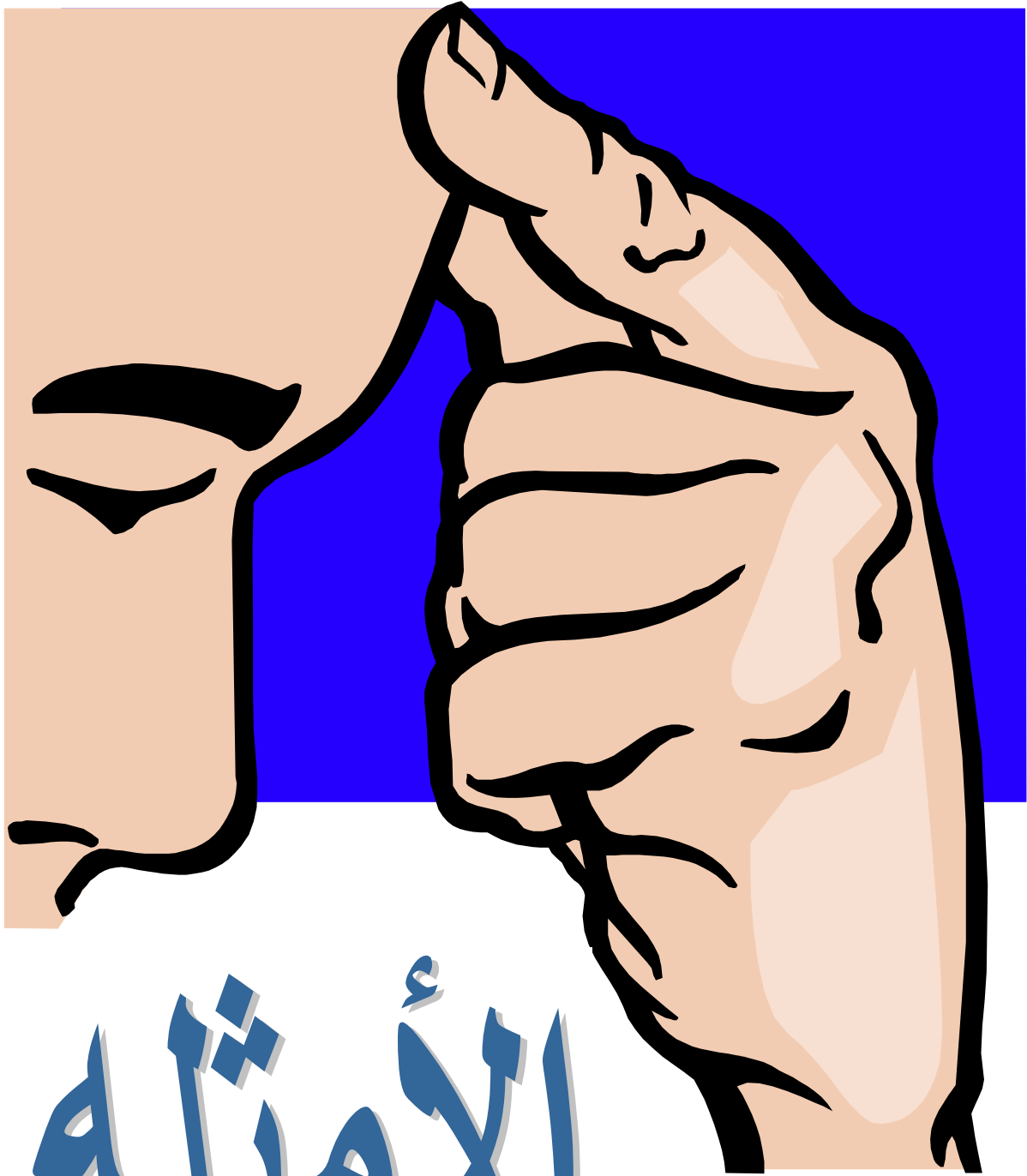
إذا وضعنا هذه النتيجة أي  $\frac{8\pi\rho G}{3}R^3 = C$  في المعادلة  $\frac{\dot{R}^2}{R^2c^2} + \frac{k}{R^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi\rho G}{3c^2}$  نحصل على:

$$\dot{R}^2 = \frac{C}{R} + \frac{\Lambda c^2 R^2}{3} - kc^2$$

هذه هي المعادلة الإشتقاقية لفريدمان وقد تمكنا من إستنتاجها من النظرية الشبه نيوتنية و من نظرية النسبية العامة. تمثل هذه المعادلة حدود النسبية العامة في النموذج " الغباري " لروبرتسون - واكر، لسنا هنا بصدد حلّ هذه المعادلة و البحث في نتائجها، يمكن مراجعة المصادر للتعرف على هذه المعادلة و أجوبتها. في نموذج فريدمان هناك نتائج شيقة للكون يمكن إستنتاجها من هذه المعادلة و حلّها، كذلك يمكن مقايسة ناتج هذا الحلّ مع النموذج الشبه نيوتني.

في النسبية العامة ثابت التقوس  $k$  هو بديل الثابت النيوتني  $\tilde{k}$  "للطاقة" في معادلة فريدمان. في جميع النماذج النيوتنية يفرض إن الفضاء مسطح أي  $\tilde{k} = 0$  ، لهذا فالنموذج النسبي العام الوحيد الذي هندسياً يشابه النموذج النيوتني هو النموذج الذي فيه  $k = 0$ . نماذج النسبية العامة التي فيها  $k = \pm 1$  تشابه نظائرها النيوتنية التي فيها  $\tilde{k} = \mp 1$  هذا التشابه هو تشابه موضعي، أي الدالة  $R^2(t)$  لكلا هذان النموذجان مساوية أما فضاء النسبية متقوس. من مقايسة هذان النموذجان، إذا كانت الطاقة الكنماتيكية الموضعية أكبر من طاقة الهروب، في النسبية العامة تقوس الفضاء سالب، وإذا كانت أقل فتقوس الفضاء موجب. إستناداً على ثابت هابل، طاقة الهروب متناسبة مع الكثافة الكونية، لذلك ناتج الكثافة العالية هو كون مغلق و ناتج الكثافة القليلة كون مفتوح.





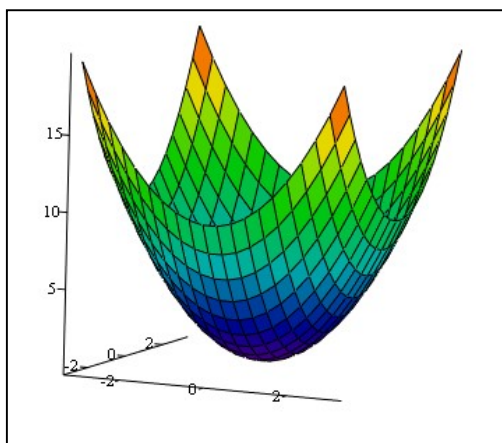
الأمة



## المثال 1

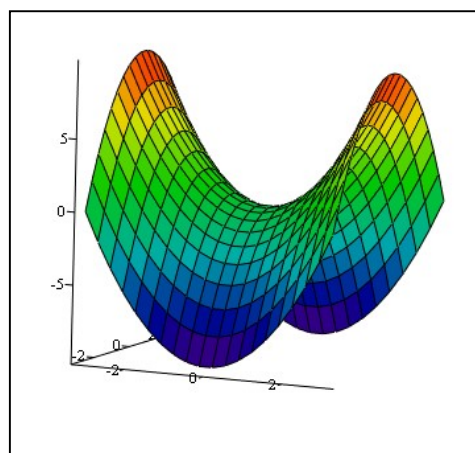
المطلوب مترية كل من هذه السطوح:

Paraboloid  
مجسم مكافئ



$$z = \frac{a}{2}(x^2 + y^2)$$

Hyperbolic Paraboloid  
مجسم مكافئ هذلولي



$$z = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)$$

عند رسم المجسمين أنتخبت  $a = 1$

المجسم المكافئ:  
إحداثيات التحويل لهذه المترية هي:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

إذن:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \Rightarrow dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ y = r \sin \theta \Rightarrow dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$z = \frac{a}{2}((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2) = \frac{ar^2}{2} \Rightarrow dz = ar dr$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow ds^2 = (1 + a^2 r^2) dr^2 + r^2 d\theta^2$$

## المجسم المكافئ الهذلولي:

هذا المجسم هو سطح غير دوراني و مترية هذا السطح هي اكثر تعقيد من مترية السطوح الدورانية، يعرف هذا المجسم كذلك بالشكل السرجي (saddle-shaped). لإستنتاج مترية هذا الشكل نستعين بهذه التحويلات:

$$\begin{cases} x=r+\theta \\ y=r-\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=r+\theta \Rightarrow dx=dr+d\theta \\ y=r-\theta \Rightarrow dy=dr-d\theta \end{cases}$$

$$z = \frac{a}{2} \left( (r+\theta)^2 - (r-\theta)^2 \right) \Rightarrow z = 2ar\theta \Rightarrow dz = 2a\theta dr + 2ard\theta$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow ds^2 = (2+4a^2\theta^2)dr^2 + 8ar\theta drd\theta + (2+4a^2r^2)d\theta^2$$

$$\begin{cases} g_{11}=g_{rr}=2+4a^2\theta^2 \\ g_{21}=g_{\theta r}=8ar\theta \\ g_{22}=g_{\theta\theta}=2+4a^2r^2 \end{cases} \Rightarrow ds^2 = g_{rr}dr^2 + g_{\theta r}drd\theta + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

كذلك يمكن الإستعانة بهذه التحويلات:

$$\begin{cases} x=r \cosh \theta \\ y=r \sinh \theta \end{cases}$$

## المثال 2

معادلة الجسم المكافئ بهذا الشكل:

$$z = \frac{1}{2}a(x^2 + y^2)$$

المطلوب إنحناء رينشي و إنحناء غاوس لهذا الجسم. في هذه الرابطة a مقدار ثابت أكبر من الصفر.

الحل: هذه مسألة في الهندسة التفاضلية يمكن حلها من خلال تنسور ريمان

نكتب معادلة هذا الجسم المكافئ في الإحداثي القطبي، التحويلات هي:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + a^2 r^2) dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$\begin{cases} g_{11} = 1 + a^2 r^2 \\ g_{22} = r^2 \end{cases} \quad g_{21} = g_{12} = 0 \quad \begin{cases} g^{11} = \frac{1}{1 + a^2 r^2} \\ g^{22} = \frac{1}{r^2} \end{cases} \quad g^{21} = g^{12} = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \Rightarrow \Gamma_{11}^1 = \frac{a^2 r}{1 + a^2 r^2}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{1 + a^2 r^2}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} \Rightarrow \Gamma_{11}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \Rightarrow \Gamma_{22}^2 = 0$$

سَلْمِيَّة ريتشي لهذا السطح الدوراني يمكن حسابها من خلال تنسور ريمان و تنسور ريتشي بهذه الصورة:

$$R_{1212} = g_{22} \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 \right)$$

$$R_{1212} = g_{22} \left( -\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 \right)$$

$$R_{1212} = g_{22} \left( -\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 \right) \Rightarrow R_{1212} = r^2 \left( \frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{1+a^2 r^2} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{a^2 r^2}{1+a^2 r^2}$$

$$R_{11} = g^{22} R_{1212} = \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{a^2 r^2}{1+a^2 r^2} \right) = \frac{a^2}{1+a^2 r^2}$$

$$R_{22} = g^{11} R_{1212} = \left( \frac{1}{1+a^2 r^2} \right) \left( \frac{a^2 r^2}{1+a^2 r^2} \right) = \frac{a^2 r^2}{(1+a^2 r^2)^2}$$

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \left( \frac{1}{1+a^2 r^2} \right) \left( \frac{a^2}{1+a^2 r^2} \right) + \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{a^2 r^2}{(1+a^2 r^2)^2} \right) = \frac{2a^2}{(1+a^2 r^2)^2}$$

$$R = \frac{2a^2}{(1+a^2 r^2)^2}$$

إنحناء غاوس لهذا الجسم حسب هذا القانون:

$$K = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \Gamma_{11}^s}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{12}^s}{\partial r} + \Gamma_{11}^r \Gamma_{r2}^s - \Gamma_{12}^r \Gamma_{r1}^s \right] g_{s2}$$

في هذا القانون  $r=1,2$  و  $s=1,2$  و بما أن  $g_{21} = g_{12} = 0$  لذلك:

$$K = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 \right] g_{22}$$

هو:

$$K = \frac{1}{r^2(1+a^2r^2)} \left[ -\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 \right] r^2 \Rightarrow K = \frac{1}{r^2(1+a^2r^2)} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{1+a^2r^2} - \frac{1}{r^2} \right] r^2$$

$$K = \frac{a^2}{(1+a^2r^2)^2}$$

## المثال 3

متريّة زمكان بهذا الشكل:

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + e^{-2ax} dt^2$$

a مقدار ثابت. المطلوب:

- أحسب كل علائم كريستوفل المخالفة للصفر لهذه المتريّة.
- عيّن معامل تنسور ريمان.
- الإنحناء السلمي
- من معادلة حقل أنشتاين أوجد معامل تنسور الطاقة لهذا الفضاء.
- أوجد معادلة الجيوديسي  $x(t)$  لهذا الفضاء.

نفرض:  $x^1 = x$  و  $x^2 = y$  و  $x^3 = z$  و  $x^4 = t$

علائم كريستوفل المخالفة للصفر هي:

$$\left. \begin{array}{l} g_{11} = -1 \\ g_{22} = -1 \\ g_{33} = -1 \\ g_{44} = e^{-2ax} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma_{44}^1 = -ae^{-2ax} \\ \Gamma_{14}^4 = -\frac{1}{2g_{44}} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma_{14}^4 = -a \end{array} \right.$$

معامل تنسور ريمان و ريتشي:

$$R_{11} = R_{141}^4 = \frac{\partial \Gamma_{14}^4}{\partial x^1} - \frac{\Gamma_{14}^4}{\partial x^1} + \Gamma_{s4}^1 \Gamma_{11}^s - \Gamma_{s1}^4 \Gamma_{14}^s \Rightarrow R_{11} = R_{141}^4 = -\Gamma_{s1}^4 \Gamma_{14}^s = -\Gamma_{41}^4 \Gamma_{14}^4 = -a^2$$

$$R_{11} = R_{141}^4 = -a^2$$

$$R_{44} = R_{414}^1 = \frac{\partial \Gamma_{44}^1}{\partial x^1} - \frac{\Gamma_{44}^1}{\partial x^1} + \Gamma_{s1}^1 \Gamma_{44}^s - \Gamma_{s4}^1 \Gamma_{41}^s \Rightarrow R_{44} = R_{414}^1 = \frac{\partial \Gamma_{44}^1}{\partial x^1} - \Gamma_{s4}^1 \Gamma_{41}^s = \frac{\partial \Gamma_{44}^1}{\partial x^1} - \Gamma_{44}^1 \Gamma_{41}^4$$

$$\Rightarrow R_{44} = R_{414}^1 = \frac{\partial}{\partial x} (-ae^{-2ax}) - (-ae^{-2ax})(-a) = a^2 e^{-2ax}$$

$$R_{44} = R_{414}^1 = a^2 e^{-2ax}$$



الإنحناء السلمي:

$$R = g^{ij} R_{ij} \Rightarrow R = g^{11} R_{11} + g^{44} R_{44} = (-1)(-a^2) + \left(\frac{1}{e^{-2ax}}\right)(a^2 e^{-2ax}) = 2a^2$$

$$R = 2a^2$$

معامل تنسور الطاقة لهذا الفضاء:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = kT_{ij} \Rightarrow kT_{44} = R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R = a^2 e^{-2ax} - \frac{1}{2} (e^{-2ax})(2a^2) = 0$$

$$kT_{44} = 0$$

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = kT_{ij} \Rightarrow kT_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = -a^2 - \frac{1}{2} (-1)(2a^2) = 0$$

$$kT_{11} = 0$$

هذه معامل قطرية لمصفوفة تنسور جهد الطاقة في هذا الفضاء.

معادلة الجيوديسي لهذا الفضاء:

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$$

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = C$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} - 2a \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - (ae^{-2ax}) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1 \Rightarrow (ae^{-2ax}) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1$$

نفرض أن  $v = \frac{dx}{ds}$  إذن:

$$v \frac{dv}{ds} = a(1+v^2) \Rightarrow \ln(1+v^2) = 2a(x-x_0) \Rightarrow 1+v^2 = e^{2a(x-x_0)}$$

$$1+v^2 = e^{2a(x-x_0)}$$

## المثال 4

متريّة زمكان بهذا الشكل:

$$ds^2 = -a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2$$

المطلوب:

علائم كريستوفل المخالفة للصفر

معامل تنسور ريتشي المخالفة للصفر

الإنحناء السلمي لهذا الفضاء

علائم كريستوفل:

نفرض:  $x^1 = x$  و  $x^2 = y$  و  $x^3 = z$  و  $x^4 = t$

$$\left. \begin{array}{l} g_{11} = -a^2(t) \\ g_{22} = -a^2(t) \\ g_{33} = -a^2(t) \\ g_{44} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = -\frac{1}{2g_{44}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \Rightarrow \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(-a^2(t)) \\ \Gamma_{14}^1 = \Gamma_{24}^2 = \Gamma_{34}^3 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^4} \Rightarrow \Gamma_{14}^1 = \Gamma_{24}^2 = \Gamma_{34}^3 = \frac{1}{-a^2(t)} \frac{\partial}{\partial t}(-a^2(t)) \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = a\dot{a}$$

$$\Gamma_{14}^1 = \Gamma_{24}^2 = \Gamma_{34}^3 = \frac{\dot{a}}{a}$$

معامل تنسور ريمان و ريتشي:

$$R_{414}^1 = -\frac{\partial \Gamma_{41}^1}{\partial x^4} - \Gamma_{41}^1 \Gamma_{41}^1 \Rightarrow R_{414}^1 = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{414}^1 = R_{424}^2 = R_{434}^3 = -\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{141}^4 = -\frac{\partial \Gamma_{11}^4}{\partial x^4} - \Gamma_{11}^4 \Gamma_{14}^1 \Rightarrow R_{414}^1 = \frac{\partial}{\partial t}(a\dot{a}) - (a\dot{a})\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2$$

$$R_{141}^4 = R_{242}^4 = R_{343}^4 = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2$$

$$R_{44} = R_{414}^1 + R_{424}^2 + R_{434}^3 = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = R_{141}^4 = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2$$

$$R_{22} = R_{242}^2 = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2$$

$$R_{33} = R_{343}^3 = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2$$

الإنحناء السلمي:

$$R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44} = \frac{3}{-f^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - 3\frac{\ddot{a}}{a} = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$$

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)$$

معادلة الجيوديسي لهذا الفضاء:

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \ddot{a}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \ddot{a}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \ddot{a}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{dt}{ds} \frac{dy}{ds}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds}\right) = 0$$

في هذا الفضاء ذرة في النقطة  $(x_0, y_0, z_0)$ ، تحت هذا الشرط  $\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} = 0$  في لحظة  $t_0$  إذن:

من معادلات الطرف الأيسر:

$$\frac{d^2t}{ds^2} = 0 \Rightarrow t = t_0 + bs$$

من معادلات الطرف الأيمن:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

هذه الذرة في هذا الفضاء تبقى في مكانها.

## المثال 5

المتريته:

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

تعرف بمتريّة كُرتين، علائم كريستوفل لهذا الفضاء هي:

$$x^2 = \phi \text{ و } x^1 = \theta \text{ و } \begin{cases} g_{11} = r^2 \\ g_{22} = r^2 \sin^2 \theta \end{cases} \text{ في هذه المتريّة}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma_{11}^1 = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = -\cos \theta \sin \theta$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma_{11}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma_{22}^2 = 0$$

محاسبة معامل تنسور ريمان  $R_{1212}$  لهذا الفضاء:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{sj}^l \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{sk}^l \Gamma_{ij}^s$$

$$R_{1212} = g_{12} R_{121}^1 = g_{22} R_{121}^2$$

$$R_{1212} = g_{22} \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 \right)$$

$$R_{1212} = r^2 \sin^2 \theta \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 \right) = r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$R_{1212} = r^2 \sin^2 \theta$$

$$R_{11} = g^{22} R_{1212} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$R_{12} = R_{21} = 0$$

$$R_{22} = g^{11} R_{1212} = \frac{1}{r^2} r^2 \sin^2 \theta = \sin^2 \theta$$

سَلْمِيَّة رِيْتَشِي لِهَذَا الْفَضَاء هِي كَذَلِكَ إِنْحَاء هَذَا الْفَضَاء

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{1}{r^2} \times 1 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \times \sin^2 \theta = \frac{2}{r^2}$$

$$R = \frac{2}{r^2}$$

سَلْمِيَّة رِيْتَشِي لِهَذِهِ الْمَتْرِيَّة هِي مَتْنَوْعَة (manifold) ذَات بَعْدَيْن و هِي عِبَارَةٌ عَنِ إِنْحَاء كَرْتَيْن، الْمَتْنَوْعَة فِي الْحَدِّ الْأَقْصَى مِنَ التَّنَاطُرِ.

لَأَيِّ عِدَدٍ مِنَ الْأَبْعَادِ، إِنْحَاءُ فَضَاءٍ فِي غَايَةِ التَّنَاطُرِ يَصْدُقُ فِي هَذِهِ الرَّابِطَةِ:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{r^2} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$$

(فِي هَذِهِ الرَّابِطَةِ r عِبَارَةٌ عَنِ ثَابِتٍ) يُمْكِنُ تَحْقِيقَ صِحَّةِ هَذِهِ الرَّابِطَةِ لِهَذَا الْمَثَلِ.

## المثال 6

لكل  $i$  و  $j$  و  $k$  و  $l$  برهن على إن:

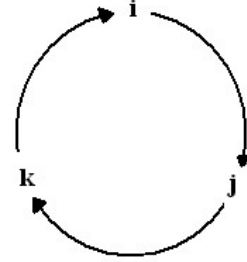
$$R^l_{ijk} + R^l_{kij} + R^l_{jki} = 0$$

بما إن:

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{sj} \Gamma^s_{ik} - \Gamma^l_{sk} \Gamma^s_{ij}$$

إذن:

$$\begin{aligned} R^l_{ijk} + R^l_{kij} + R^l_{jki} &= \\ &= \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{sj} \Gamma^s_{ik} - \Gamma^l_{sk} \Gamma^s_{ij} \\ &+ \frac{\partial \Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{si} \Gamma^s_{kj} - \Gamma^l_{sj} \Gamma^s_{ki} \\ &+ \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^l_{sk} \Gamma^s_{ji} - \Gamma^l_{si} \Gamma^s_{jk} \\ &= 0 \end{aligned}$$



موقع الدليل في الأسفل بهذا  
الترتيب في جهة السهم

## المثال 7

مترية فضاء منكوفسكي في إحداثي كروي  $(t, r, \theta, \phi)$  هي:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 \Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - dt^2$$

إذا كانت مترية هذا الفضاء بهذا الشكل:

$$ds^2 = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - e^{2\alpha(r)} dt^2$$

علائم كريستوفل لهذه المترية هي:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{41}^4 = \alpha' & \Gamma_{44}^1 = e^{2(\alpha-\beta)} \alpha' & \Gamma_{11}^1 = \beta' \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{22}^1 = -re^{2\beta} & \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^1 = -re^{2\beta} \sin^2 \theta & \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \end{array}$$

لو إن  $\alpha(r) = \beta(r) = 0$  تصبح هذه المترية كالمترية الأولى أي:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - dt^2$$

ثم تصبح علائم كريستوفل بهذا الشكل:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{41}^4 = 0 & \Gamma_{44}^1 = 0 & \Gamma_{11}^1 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{22}^1 = -r & \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta & \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \end{array}$$



## المثال 8

مترية روبرتسون - واكر

$$ds^2 = a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] - dt^2$$

في هذه المترية:

$$\begin{array}{l} g_{11} = \frac{a^2(t)}{1-kr^2} \\ g_{22} = a^2(t)r^2 \\ g_{33} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \\ g_{44} = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^1 = r \\ x^2 = \theta \\ x^3 = \phi \\ x^4 = t \end{array}$$

علائم كريستوفل لهذه المترية إذا كان  $\frac{da}{dt} = \dot{a}$  هي:

$$\Gamma_{11}^4 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}$$

$$\Gamma_{22}^4 = a\dot{a}r^2$$

$$\Gamma_{33}^4 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{41}^1 = \Gamma_{14}^1 = \Gamma_{42}^2 = \Gamma_{24}^2 = \Gamma_{43}^3 = \Gamma_{34}^3 = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

معامل تنسور ريتشي المخالفة للصفر هي:

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$$

$$R_{33} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\sin^2 \theta$$

$$R_{44} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

سليمة ريتشي لهذا الفضاء هي:

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{44}R_{44} = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$$

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$$

تنسور أنشتاين

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{1 - kr^2} \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$$

$$G_{11} = -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{1 - kr^2}$$

$$G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) - \frac{1}{2}(a^2r^2) \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$$

$$G_{22} = -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$$

$$G_{33} = R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\sin^2 \theta - \frac{1}{2}(a^2r^2 \sin^2 \theta) \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$$

$$G_{33} = -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)\sin^2 \theta$$

$$G_{44} = R_{44} - \frac{1}{2}g_{44}R = -\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(-1)\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$$

$$G_{44} = \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2}$$

$$\frac{G_{11}}{g_{11}} = \frac{G_{22}}{g_{22}} = \frac{G_{33}}{g_{33}} = -\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)$$

## المثال 9

متريّة فضاء بهذا الشكل:

$$ds^2 = e^{-2\phi(x)} dx^2 - e^{-2\psi(x)} dt^2$$

برهن في حالة  $\phi(x) = \psi(x)$  فهذا الفضاء هو فضاء مسطح.

$$\begin{cases} g_{11} = e^{-2\phi(x)} \\ g_{22} = -e^{-2\psi(x)} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = \phi'$$

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = \psi'$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x} \Rightarrow \Gamma_{11}^1 = -\phi'$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial t} \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x} \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = -\psi' e^{2(\phi-\psi)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial t} \Rightarrow \Gamma_{11}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x} \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\psi'$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial t} \Rightarrow \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$R_{1212} = g_{22} \left( \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 \right)$$

$$R_{1212} = -e^{-2\psi} (\psi'' + \psi' \phi' - \psi'^2)$$

$$R_{11} = g^{22} R_{1212} = \frac{1}{-e^{-2\psi}} \left( -e^{-2\psi} (\psi'' + \psi' \phi' - \psi'^2) \right) = \psi'' + \psi' \phi' - \psi'^2$$

$$R_{12} = R_{21} = 0$$

$$R_{22} = g^{11} R_{1212} = \frac{1}{e^{-2\phi}} \left( -e^{-2\psi} (\psi'' + \psi' \phi' - \psi'^2) \right) = -e^{2(\phi-\psi)} (\psi'' + \psi' \phi' - \psi'^2)$$

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{1}{e^{-2\phi}} (\psi'' + \psi' \phi' - \psi'^2) - \frac{1}{-e^{-2\psi}} \left( -e^{2(\phi-\psi)} (\psi'' + \psi' \phi' - \psi'^2) \right)$$

$$R = 0$$

## المثال 10

عَيّن كلّ من علائم كريستوفل و معادلة الجيوديسي للمترية:

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} dx^2 + \frac{1}{y^2} dy^2$$

تعرف هذه المترية بصفحة لوباتشفسكي أو الصفحة الهذلولية

الحل:

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2} \quad \text{و} \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

نفرض:  $x^1 = x$  و  $x^2 = y$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma_{11}^1 = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \Rightarrow \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

معادلة الجيوديسي لهذه المترية هي:

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0$$

$$g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = C$$

C في هذه الرابطة مقدار ثابت.

حسب علائم كريستوفل نكتب معادلات الجيوديسي:

بما أن  $x^1 = x$  و  $x^2 = y$  إذن:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{y} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{(y(t))^2} \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right) = a^2$$

$a^2$  مقدار ثابت كما فرضنا C

جواب المعادلة الإشتقاقية الأولى هو:

y عبارة عن دالة المتغير فيها t و نفرض  $\frac{dx}{dt} = F$  إذن:

$$\frac{dx}{dt} = F \Rightarrow \frac{dF}{dt} = \left( \frac{2}{y} \frac{dy}{dt} \right) F \Rightarrow \frac{dF}{F} = 2 \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln F = \ln y^2 + \ln b \Rightarrow \ln F = \ln by^2$$

$$F = by^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = by^2$$

نضع هذا الجواب في المعادلة الثالثة النتيجة:

$$\left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + b^2 y^4(t) = a^2 y^2(t)$$

جواب هذه المعادلة الإشتقاقية هو:

$$y(t) = \frac{ay_0}{a \cdot \cosh at - \sqrt{a^2 - (b^2 y_0^2)} \sinh at}$$

$y_0$  هي قيمة بدائية لجواب هذه المعادلة

بما أن  $\frac{dx}{dt} = by^2$  إذن:

$$x(t) = x_0 + \frac{(by_0^2) \sinh at}{a \cdot \cosh at - \sqrt{a^2 - (b^2 y_0^2)} \sinh at}$$

$x_0$  قيمة بدائية.

من  $x(t)$  و  $y(t)$  نحصل على:

$$\sinh at = \frac{a}{by_0} \frac{x - x_0}{y}$$

$$\cosh at = \frac{by_0^2 - (x - x_0) \sqrt{a^2 - b^2 y_0^2}}{by_0 y}$$

بما أن  $\cosh^2 at - \sinh^2 at = 1$  يمكن حذف s من هذه الروابط و النتيجة النهائية هي:

$$(x - x_0)^2 - 2(x - x_0) \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - y_0^2} + y^2 = y_0^2$$

أو

$$\left( x - x_0 - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - y_0^2} \right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

هذه عبارة عن دائره نصف قطرها  $\frac{a}{b}$  و إحداثيات المركز  $x_0 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - y_0^2}$  المركز  $\left| \begin{matrix} x_0 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - y_0^2} \\ 0 \end{matrix} \right.$ .

هذا المركز منطبق على محور x. المتقاصر أو جيوديسية هذا الفضاء هي دائرة مغلقة، لو (إن متحرك) أو نبضة ضوئية أطلقت في هذا الفضاء، فإن مسير حركتها هي دائرة و سترجع هذه النبضة الضوئية (أو المتحرك) في هذا الفضاء الى نقطة إنطلاقها.



## المثال 11

## متريّة و فضاء غودل

في عام 1949 عرض كورت غودل (Kurt Godel) حل جديد لمعادلات حقل أنشتاين ، لكون ذو مادة دوارة ، دوران هذا الكون حدود 0.01 ثانية في القرن . في هذا النموذج الكوني وجود منحنيات الزمكان المغلقة يتيح للمنحني العبور من اي نقطة في هذا الفضاء ، و هذا بالتالي يسمح للمراقب السفر الى الماضي.

عرضنا هذا النموذج الكوني في هذا المثال و ذلك لأننا لن نستطرق الى تأثير الحركة الدورانية في النسبية ، و هو بحث خاص في النسبية الخاصة و العامة يبحث مفاهيم و قوانين النسبية على الأطار الدوار.

نبحث في هذا المثال البعد الرياضي لهذا النموذج و هناك تحقيقات و اسعة أُجريت على هذا النموذج بالأخص مفهوم السفر الى الماضي ، لكن لن يأخذ هذا النموذج الكوني مكانة في الفيزياء و علم الفلك كالمكانة التي أخذها نموذج فريدمان. سنكتفي ببعض المحاسبات التي تتماشى مع المفاهيم النسبية التي بحثناها في هذا البحث.

متريّة غودل في فضاء رباعي الأبعاد بهذا الشكل

$$ds^2 = a^2(dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2x}}{2}dy^2 - dz^2 + 2e^x dt dy)$$

في هذه المتريّة  $a > 0$  و بما أن:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

$$g_{13} dx^1 dx^3 + g_{31} dx^3 dx^1 \Rightarrow 2g_{13} dx^1 dx^3$$

لذلك:

$$2g_{13} = 2e^{-x} \Rightarrow g_{13} = e^{-x}$$

إذن:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow g_{ij} = a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & e^x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^x & 0 & \frac{e^{2x}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

و كذلك:

$$g = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & a^2 e^x & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ a^2 e^x & 0 & \frac{a^2 e^{2x}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{vmatrix} = \frac{a^8 e^{2x}}{2}$$

إذن:

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{21} & g^{31} & g^{41} \\ g^{12} & g^{22} & g^{32} & g^{42} \\ g^{13} & g^{23} & g^{33} & g^{43} \\ g^{14} & g^{24} & g^{34} & g^{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow g^{ij} = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2e^{-x} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2e^{-x} & 0 & -2e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

علائم كريستوفل لهذه المترية:

العلائم المخالفة للصفر هي:

$$\Gamma_{12}^1 = 1$$

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{13}^2 = \frac{e^x}{2}$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\Gamma_{12}^3 = -e^{-x}$$

لكل علائم كريستوفل  $\frac{\partial}{\partial x^i} = 0$  ما عدى  $i=1$  لذلك:

$$R_{ij} = \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^1 - \Gamma_{si}^t \Gamma_{tj}^s$$

إذن معامل تنسور ريتشي المخالفة للصفر هي:

$$R_{11} = 1$$

$$R_{13} = R_{31} = e^x$$

$$R_{33} = e^{2x}$$

سلمية ريتشي لهذا الفضاء هي:

$$R = g^{ij} R_{ij} \Rightarrow R = g^{11} R_{11} + g^{13} R_{13} + g^{31} R_{31} + g^{33} R_{33}$$

$$R = -\frac{1}{a^2} \times 1 + \frac{2e^{-x}}{a^2} \times e^x + \frac{2e^{-x}}{a^2} \times e^x - \frac{2e^{-2x}}{a^2} \times e^{2x} = \frac{1}{a^2}$$

$$R = \frac{1}{a^2}$$

متريّة غودل  $ds^2 = a^2(dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2x}}{2}dy^2 - dz^2 + 2e^x dt dy)$  هذه أحياناً تكتب بهذا الشكل :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2\sqrt{2}\omega x}}{2}dy^2 - dz^2 + 2e^{\sqrt{2}\omega x} dt dy$$

$\omega$  ثابت مخالف للصفر، يُعبّر عن سرعة الزاوية

هذه المتريّة في الإحداثيات الأسطوانية بهذا الشكل:

$$ds^2 = 4a^2(dt^2 - dr^2 - dy^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r)d\phi^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r d\phi dt)$$

في هذه المتريّة:

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

المادة في عالم غودل عبارة عن غبار ذو كثافة ثابتة ، تنسور الطاقة في هذا العالم هو  $T^{ij} = \rho u^i u^j$

في هذا التنسور  $\rho$  الكثافة و  $u^i$  و  $u^j$  السرعة . كذلك  $\rho = \frac{1}{8\pi G a^2}$  و  $G$  ثابت الجاذبية العام لنيوتن

، و الثابت الكوني في هذا العالم هو  $\Lambda = -\frac{1}{2a^2}$  .

تمرين:

متريّة عالم أنشتاين بهذا الشكل:

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-kr^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + c^2 dt^2$$

أوجد معادلات مسارجيوديسي هذا الفضاء، ثم برهن:

في الصفحة  $\theta = \frac{\pi}{2}$  تصدق منحنيات مسار الجيوديسي في هذه المعادلة:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^2(1-\lambda r^2)(\mu r^2 - 1)$$

في هذه المعادلة  $\mu$  ثابت.

ضع في هذه المعادلة  $r^2 = \frac{1}{\nu}$  ثم أستنتج من تكامل المعادلة الحاصلة أن مسير شعاع الضوء في

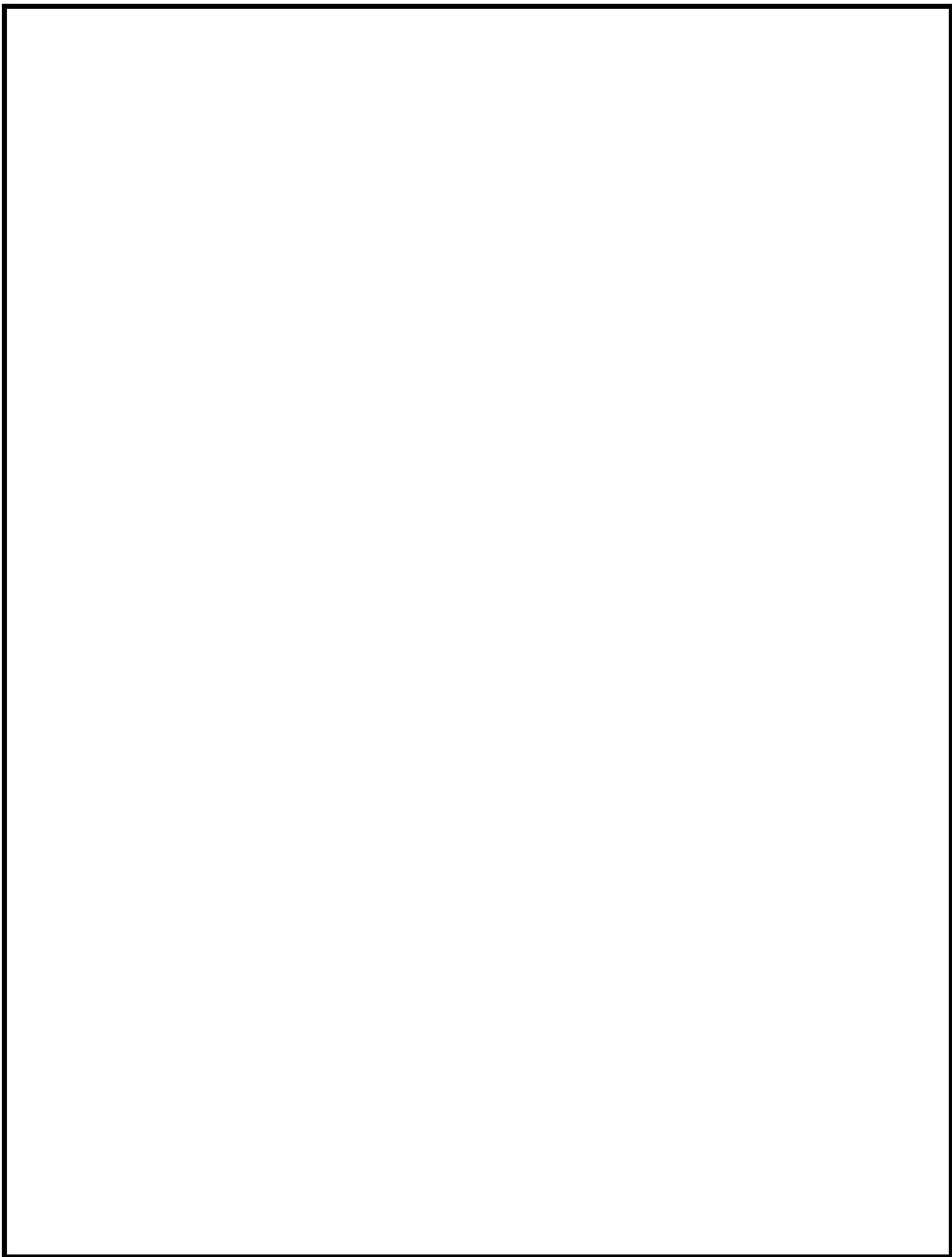
الصفحة  $\theta = \frac{\pi}{2}$  عبارة عن إهليلجي، معادلته هي:

$$\lambda x^2 + \nu y^2 = 1$$

في هذه المعادلة  $x$  و  $y$  إحداثيات الكارتيزية.

أثبت أن الزمان اللازم لدورة واحدة يدورها فوتون في مسير هذا الإهليلجي هي  $\frac{2\pi}{c\sqrt{\lambda}}$  ثانية (في هذ

الرابطه  $c$  سرعة الضوء).



بعض أهم الأصطلاحات الفيزيائية و الرياضيه و الفلسفيه في نظرية

# النسبية العامة

## General Relativity Glossary

(عربي - إنجليزي)

Dilation of time	إتساع الزمن
Summation convention	إتفاقية الجمع
Doppler effect	أثر دوبلر
Compton effect	أثر كامبتون
Parallel displacement	إزاحه موازيه
Fundamentalist	أصولي
Even horizon	أفق الحدث
Agree posteriori	الاتفاق اللاحق أو ما يأتي بعد التجربه
Agree priori	الاتفاق المسبق أو ما قبل التجربه
Aether	الأثير
Coordinate	الإحداثيات
Coordinate surface	الإحداثيات السطحيه
Gravitational red shift	الإزاحة الحمراء بالجاذبيه
Parallel transpotr	الإنتقال الموازي
Big Bang	الأنفجار العظيم
Torsion	التواء
Space warp	التواء الفضاء أو أنطواء الفضاء
First fundamental form	الشكل الأساسي الأول
Second fundamental form	الشكل الأساسي الثاني
Curvature	إنحناء أو تقوس
Geodesic curvature	إنحناء جيوديسي
Ricci curvature	إنحناء ريتشي
Scalar curvature	إنحناء مقياس أو إنحناء سلمي أو تقوس سلمي
Fitzgerald contraction	أنقباض فيتزجيرالد
Contraction	انكماش - تقلص - أدغام
Elliptic	إهليلجي
Dimension	بُعد
Bolyai	بوليائي
Evidence	بيئنة

Affinity	تألف
Affine	تألفي
Divergence	تباعد
Lorentz transformation	تبديلات لورينتز
Skew- symmetric	تخالفية التناظر
skew-symmetric	تخالفية التناظر
Gradient	تدرج
Connection	ترابطيه
Superposition	تراكب
Quadratic	تربيعيه
simultaneity	تزامن
Synchronization	تزامن
Synchronization of clocks	تزامن الساعات
Gravitational acceleration	تسارع الجاذبيه
Rectification	تصحيح
Apriori cincept	تصور قبلي
Congruence	تطابق
Mapping	تطابق
Acceleration	تعجيل
Differential	تفاضلي
Contradiction	تقليص في التنسور
Equivalence	تكافؤ
Equivalence of mass	تكافؤ الكتلة
Mass – Energy equivalence	تكافؤ الكتلة و الطاقة
Homology	تمائل
Representation	تمثل أو فكرة
Spherically symmetric	تناظر كروي
Contradiction	تناقض
Consistency	تواؤم
Curvature tensor	تنسور الإنحناء
Einstein's tensor	تنسور أنشتاين
tensor	تنسور أو موتر
Levi-Civita tensor	تنسور لوي شي و يتا
Metric tensor	تنسور متري
Gravitational constant	ثابت الجاذبيه
Cosmical constant	ثابت كوني
Black hole	ثقب أسود



Wormhole	ثقب دودي
Gravity	جاذبية
Scalar product	جداء سُلمي
Gravitational potential	جهد الجاذبيه
Potential	جهد أو كمون
Geodesic	جيوديسي أو متقاصره
Event	حادثة - واقعه
Bounded	حدّي
Kinetic	حركيه
Tensor calculus	حساب التنسور
Perihelion	حضيض
Conservation	حفظ
Gravitational field	حقل الجاذبيه
Einstein field	حقل أنشتاين
Tensor field	حقل تنسوري
Invariant field	حقل لا متغير
Vector field	حقل متجهي
Field due to	حقل مرتبط ب
Absurd statement	حكم لا معقول
Property	خصوصيه
World- line	خط عالمي
Osculation circle	دائرة الألتصاق
Kronecker delta	دلتا كرونكر
Curl	دوران
Ricci	ريتشّي
Aberation of light	زيغ الضوء أو إنحراف الضوء
Velocity	سرعه
Umbilical	سُرّية
Saddle surface	سطح سرجي
Catenoid	سطح سلسلي الشكل
Helicoid	سطح لولبي
Pseudoplane	شبه صفحه
Pseudosphere	شبه كره
Electrical intensity	شدة الحقل الكهربائي
Magnetic intensity	شدة الحقل المغناطيسي
Radiation	شعاع أو أشعة
Sirius	شعري اليمانية

Schwarzschild	شوارتزشيلد
Energy	طاقه
Centrifugal	طرد مركزي
Axiomatic method	طريقه موضوعاتيه
Phenomenon	ظاهرة
Gravitational lens	عدسة الجاذبية
Momentum	عزم - زخم - كمية الحركة
Christoffel symbols	علائم كريستوفل - رموز كريستوفل
Element	عنصر - أصل كتاب إقليدس
Defect	عيب أو نقصان
Graviton	غرافيتون
Excess	فائض
Interval	فاصله
Mass less	فاقد الكتلة
Space	فضاء
Space - time	فضاء - زمان أو زمكان
Euclidean space	فضاء إقليدي
Riemannian space	فضاء ريماني
Physical space	فضاء فيزيائي
Non- Euclidean space	فضاء لا إقليدي
Absolute future	فضاء مطلق
Ultra - ideal	فوق المثالي
Hypersphere	فوق كره
Einstein's law of gravitation	قانون الجاذبيه لأينشتاين
Galilean law of inertia	قانون العطاله لغاليلو
Biot- Savart law	قانون بيو ساوار
Force	قوة
Mass	كتلة
Mass inertial	كتلة العطالة - الكتله العطاله
Massive mass	كتلة ضخمة
Galactic mass	كتلة مجرية
Density	كثافه
Quantum	كمّ أو الكوانتوم
Universe	كون
Invariant	لا متغير
Infinite	لا متناهي
Helix	لولب

Absolute past	ماضي مطلق
Principle of equivalence	مبدأ التكافؤ
General principle of relativity	مبدأ النسبية العامه
Special principle of relativity	مبدأ لنسبيه الخاصه
Machs principle	مبدأ ماخ
Curvature vector	متجهة الإنحناء
Coaxial	متحد المحاور
Metric	مترية
Isogonal	متساوي الزوايا
Equidistance	متساوي الفاصله
Isoareal	متساوي المساحه
Bianchi identity	متطابقة بيانجي
Orthogonal	متعامد
Variable	متغير
Isometric	متقايس
Equivalent	متكافئ
Manifold	متنوّعه - مُشعب
Controversial	مثير للجدل
paraboloid	مجسم مكافئ
Conform	محافظ
Conformal	محافظ - حفاظ الشكل
Local	محلي
Paradox	محيّر
Contravariant	مخالف للتغير
Light cone	مخروط الضوء
Conoid	مخروطاني
Orbit	مدار
Observer	مراقب أو ناظر
Order	مرتبّه
Component	مركبّه أو عنصر
Rectilinear	مستقيم
Flat	مسطح
Postulate	مسأله
Trajectory	مسير
Derivative	مشتق
Assertion	مصادقه
Equation of continuity	معادلة الحفظ

Tensor equation	معادله تنسوريه
Coexistence	معيه
Fallacy	مغالطه
Asymptotic	مقارب
Parabolic	مكافئ
Discriminant	مميّزة
Curve rectifiable	منحن متناهي الطول
Catenary	منحني السلسله
Minkowski	منكو فسكي
Covariant	موافق للتعرّ
Axiom	موضوعه
System	نظام
Ideal point	نقطه مثاليه
Model	نموذج
Incidence geometry	هندسة الوقوع
Non-Euclidean geometry	هندسة لاإقليديه
Elliptic geometry	هندسه إهليلجيه
Affine geometry	هندسه تآففيه
Intrinsic geometry	هندسه ذاتيه
Parabolic geometry	هندسه شلجميه
Pan - geometry	هندسه عموميه
Spherical geometry	هندسه كرويّه
Absolute geometry	هندسه مطلقه
Hyperbolic geometry	هندسه هذلوليه
Inertial frame	هيكل أو مرجع العاطل
Existential	وجودي
Unit	وحده
Parametric	وسيطيه أو معلمي

بعض أهم الأصطلاحات الفيزيائية و الرياضيه و الفلسفيه في نظرية

# النسبية العامة

## General Relativity Glossary

(إنجليزي - عربي)

Aberation of light	زيغ الضوء أو إنحراف الضوء
Absolute future	فضاء مطلق
Absolute geometry	هندسه مطلقه
Absolute past	ماضي مطلق
Absurd statement	حكم لا معقول
Acceleration	تعجيل
Aether	الأثير
Affine	تألفي
Affine geometry	هندسه تألفيه
Affinity	تألف
Agree posteriori	الاتفاق اللاحق أو ما يأتي بعد التجربه
Agree priori	الاتفاق المسبق أو ما قبل التجربه
Apriori cincept	تصور قبلي
Assertion	مصادقه
Asymptotic	مقارب
Axiom	موضوعه
Axiomatic method	طريقه موضوعاتيه
Bianchi identity	متطابقة بيانجي
Big Bang	الأنفجار العظيم
Biot- Savart law	قانون بيو ساوار
Black hole	ثقب أسود
Bolyai	بوليائي
Bounded	حدّي
Catenary	منحني السلسله
Catenoid	سطح سلسلي الشكل
Centrifugal	طرد مركزي
Christoffel symbols	علائم كريستوفل - رموز كريستوفل
Coaxial	متحد المحاور
Coexistence	معيه

Component	مركبه أو عنصر
Compton effect	أثر كامبتون
Conform	محافظ
Conformal	محافظ - حفاظ الشكل
Congruence	تطابق
Connection	ترابطيه
Conoid	مخروطاني
Conservation	حفظ
Consistency	توافق
Contraction	انكماش - تقليص - أدغام
Contradiction	تقليص في التنسور
Contradiction	تناقض
Contravariant	مخالف للتغير
Controversial	مثير للجدل
Coordinate	الإحداثيات
Coordinate surface	الإحداثيات السطحيه
Cosmical constant	ثابت كوني
Covariant	موافق للتغير
Curl	دوران
Curvature	إنحناء أو تقوس
Curvature tensor	تنسور الإنحناء
Curvature vector	متجهة الإنحناء
Curve rectifiable	منحن متناهي الطول
Defect	عيب أو نقصان
Density	كثافه
Derivative	مشتق
Differential	تفاضلي
Dilation of time	إتساع الزمن
Dimension	بُعد
Discriminant	مميّزة
Divergence	تباعد
Doppler effect	أثر دوبلر
Einstein field	حقل أنشتاين
Einstein's law of gravitation	قانون الجاذبيه لأنشتاين
Einstein's tensor	تنسور أنشتاين
Electrical intensity	شدة الحقل الكهربائي
Element	عنصر - أصل كتاب إقليدس

Elliptic	إهليلجي
Elliptic geometry	هندسه إهليلجيه
Energy	طاقه
Equation of continuity	معادلة الحفظ
Equidistance	متساوي الفاصله
Equivalence	تكافؤ
Equivalence of mass	تكافؤ الكتلة
Equivalent	متكافئ
Euclidean space	فضاء إقليدي
Even horizon	أفق الحدث
Event	حادثة - واقعه
Evidence	بينة
Excess	فائض
Existential	وجودي
Fallacy	مغالطه
Field due to	حقل مرتبط ب
First fundamental form	الشكل الأساسي الأول
Fitzgerald contraction	إنقباض فيتزجيرالد
Flat	مسطح
Force	قوة
Fundamentalist	أصولي
Galactic mass	كتلة مجرية
Galilean law of inertia	قانون العطالة لغاليلو
General principle of relativity	مبدأ النسبية العامه
Geodesic	جيوديسي أو متقاصره
Geodesic curvature	إنحناء جيوديسي
Gradient	تدرج
Gravitational acceleration	تسارع الجاذبيه
Gravitational constant	ثابت الجاذبيه
Gravitational field	حقل الجاذبيه
Gravitational lens	عدسة الجاذبية
Gravitational potential	جهد الجاذبيه
Gravitational red shift	الإزاحة الحمراء بالجاذبيه
Graviton	غرافيتون
Gravity	جاذبية
Helicoid	سطح لولبي
Helix	لولب

Homology	تمائل
Hyperbolic geometry	هندسه هذلوليه
Hypersphere	فوق كره
Ideal point	نقطه مثاليه
Incidence geometry	هندسة الوقوع
Inertial frame	هيكل أو مرجع العاطل
Infinite	لا متناهي
Interval	فاصله
Intrinsic geometry	هندسه ذاتيه
Invariant	لا متغير
Invariant field	حقل لا متغير
Isoareal	متساوي المساحه
Isogonal	متساوي الزوايا
Isometric	متقايس
Kinetic	حركيه
Kronecker delta	دلتا كرونكر
Levi-Civita tensor	تنسور لوي شي و يتا
Light cone	مخروط الضوء
Local	محلي
Lorentz transformation	تبديلات لورينتز
Machs principle	مبدأ ماخ
Magnetic intensity	شدة الحقل المغناطيسي
Manifold	متنوعه - مُشعب
Mapping	تطابق
Mass	كتلة
Mass – Energy equivalence	تكافؤ الكتلة و الطاقة
Mass inertial	كتلة العطالة - الكتله العاطله
Mass less	فاقد الكتلة
Massive mass	كتلة ضخمة
Metric	مترية
Metric tensor	تنسور متري
Minkowski	منكو فسكي
Model	نموذج
Momentum	عزم – زخم – كمية الحركة
Non- Euclidean space	فضاء لا إقليدي
Non-Euclidean geometry	هندسة لا إقليدية
Observer	مراقب أو ناظر



Orbit	مدار
Order	مرتبه
Orthogonal	متعامد
Osculation circle	دائرة الألتصاق
Pan - geometry	هندسه عموميه
Parabolic	مكافئ
Parabolic geometry	هندسه شلجميه
paraboloid	مجسم مكافئ
Paradox	محيّر
Parallel displacement	إزاحه موازيه
Parallel transpotr	الإنتقال الموازي
Parametric	وسيطيه أو معلمي
Perihelion	حضيض
Phenomenon	ظاهرة
Physical space	فضاء فيزيائي
Postulate	مسلمه
Potential	جهد أو كمون
Principle of equivalence	مبدأ التكافؤ
Property	خصوصيه
Pseudoplane	شبه صفحه
Pseudosphere	شبه كره
Quadratic	تربيعيه
Quantum	كمّ أو الكوانتوم
Radiation	شعاع أو أشعة
Rectification	تصحيح
Rectilinear	مستقيم
Representation	تمثل أو فكرة
Ricci	ريتشى
Ricci curvature	إنحناء ريتشى
Riemannian space	فضاء ريماني
Saddle surface	سطح سرجي
Scalar curvature	إنحناء مقياس أو إنحناء سلمي أو تقوس سلمي
Scalar product	جداء سلمي
Schwarzschild	شوارتز شيلد
Second fundamental form	الشكل الأساسي الثاني
simultaneity	تزامن
Sirius	شعري اليمانية

Skew- symmetric	تخالفية التناظر
skew-symmetric	تخالفية التناظر
Space	فضاء
Space – time	فضاء - زمان أو زمان
Space warp	ألتواء الفضاء أو أنطواء الفضاء
Special principle of relativity	مبدأ النسبية الخاصة
Spherical geometry	هندسه كروي
Spherically symmetric	تناظر كروي
Summation convention	إتفاقية الجمع
Superposition	تراكب
Synchronization	تزامن
Synchronization of clocks	تزامن الساعات
System	نظام
tensor	تنسور أو موتر
Tensor calculus	حساب التنسور
Tensor equation	معادله تنسوريه
Tensor field	حقل تنسوري
Torsion	ألتواء
Trajectory	مسير
Ultra – ideal	فوق المثالي
Umbilical	سُرّية
Unit	وحدة
Universe	كون
Variable	متغير
Vector field	حقل متجهي
Velocity	سرعه
World- line	خط عالمي
Wormhole	ثقب دودي

## المصادر

- الزمان الوجودي – عبد الرحمن بدوي - دار الثقافة بيروت لبنان – 1973
- معجم الرياضيات ( أنكليزي- فرنسي- عربي ) ، د. علي مصطفى بن الأشهر، أكاديا.
- معجم الفيزياء ( أنكليزي- فرنسي- عربي ) ، د. أبراهيم حموده، أكاديا.
- كنط و فلسفته النظرية – دكتور محمود زيدان – دار المعارف – الطبعة الثالثة – 1979
- الزمان في الفلسفة و العلم – الدكتور يماني طريف الخولي – مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب – 1999
- نقد العقل المحض – عمّا نوثيل كنط – ترجمة موسى وهبة.
- المورد ، قاموس إنجليزي – عربي ، منير البعلبكي – دار العلم للملايين.
- هندسه نا اقليدسى . هارولد ا. ولف - ترجمه أحمد پيرشك
- هندسه هاى اقليدسى و نا اقليدسى - ماروين جى گرينبرگ « ترجمه م. ه. شفيعيها - مركز نشر دانشگاه
- آشنایى با هندسه ديفرانسيل - أبراهام گوئتس - ترجمه على اكبر عالم زاده - على استاد باشى زاده
- آشنایى با نسبیت خاص - رابرت رزنیک - ترجمه جعفر گودرزى - نشر دانشگاهى
- نسبیت خاص و عام و كيهانشناختى . ولفگانگ ريندلر - ترجمه رضا منصورى - حسين معصومى همدانى
- آشنایى با حساب تانسورى و نسبیت - درك لاودن - ترجمه محمد رضا بهفروز - نشر دانشگاهى

- Essential Relativity:special, General and Cosmological, Wolfgang Rindler, 1977
- Introduction to Special Relativity, Wiley Fastern, Private Limited. 1972
- Lecture Notes on General Relativity, Sean M. Carrroll, Institute for Theoretical Physics University of California, 1997
- Introduction to General Relativity, G. t Hooft, Institute for Theoretical Physics University Utrech University, version 8/4/2002
- Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Second edition, Marvin Jay Greenberg, W. H. Freeman & Co. , 1979.
- An Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosomology, Derek F. Lawden, 1982.
- Non-Euclidian Geometry, Harold E. Wolfe.
- Introduction to Differential Geometry, Abraham Goets.

## الفهرس

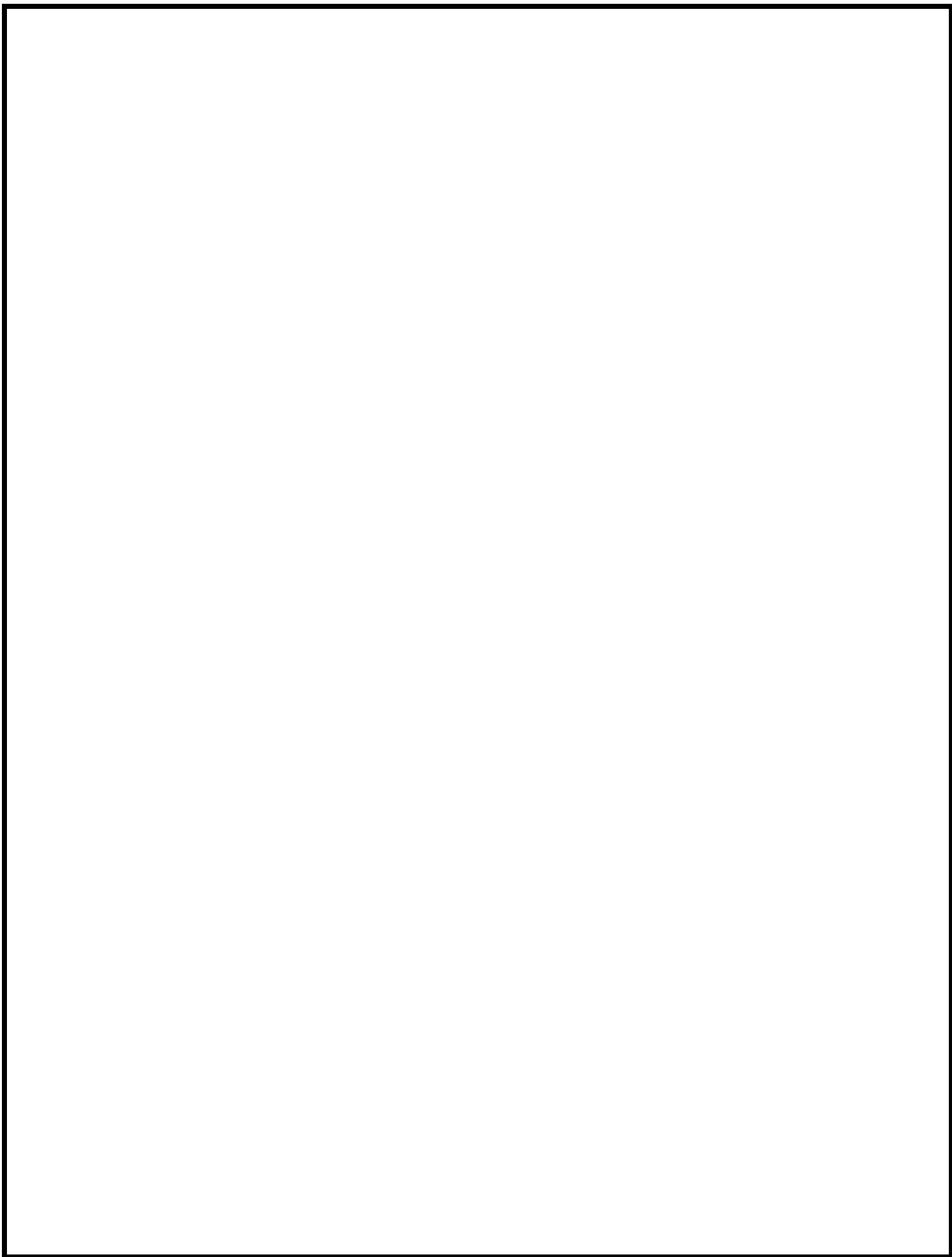
- المقدمة ----- 3
- الفضاء المطلق ----- 11
- البرهان الكانتي على أن للعالم بداية في الزمن ----- 13
- البرهان الكانتي على أن العالم محدود في المكان ----- 13
- المفهوم الفلسفي للمكان ----- 16
- النظرة الفلسفية و الفيزيائية للزمان ----- 18
- الزمان من وجهة نظر أرسطو وأفلاطون ----- 18
- الزمان من وجهة نظر نيوتن ----- 20
- الزمان من وجهة نظر ليبنتس ----- 20
- الزمان من وجهة نظر كانت ----- 21
- الزمان في النظرية النسبية ----- 23
- الزمان في نظرية الكم ----- 24
- الهندسه الهذلوليه ----- 27
- الهندسه في الفضاء المادي ----- 29
- بعض مفاهيم و قضايا الهندسه الهذلوليه ----- 31
- رباعي أضلاع ساكري ----- 31
- رباعي أضلاع لامبرت ----- 31
- نقصان المساحة ----- 32
- زاوية التوازي ----- 34
- بعض قضايا الهندسة الهذلولية ----- 36
- نموذج بلترامي - كلاين ----- 39
- النسبية الخاصة ----- 43
- الأصول التي بُنيت عليها نظرية النسبية ----- 43
- مفهوم المراقب في النسبية ----- 44

- 45----- تحويلات لورنتز -
- 48----- أهم نتائج تحويلات لورنتز -
- 51----- ديناميك النسبية الخاصة -

## النسبية العامة

- 57----- السطوح الدورانية -
- 60----- العناصر الأساسية لنظرية السطوح -
- 62----- بعض الاعمال الرياضيه على التنسور -
- 65----- الشكل الأساسي الأول للسطح -
- 66----- الشكل الأساسي الثاني للسطح -
- 68----- إنحناء غاوس -
- 71----- مساحة السطح -
- 71----- طول قوس منحنى -
- 72----- الإنحناء الجيوديسي -
- 73----- الجيوديسي -
- 74----- رياضيات النسبيه العامه -
- 78----- الأنتقال الموازي -
- 80----- تنسور إنحناء ريمان - كريستوفل -
- 83----- بعض أهم معادلات النسبية العامة -
- 84----- مراحل طرح وحلّ و البحث في مسائل النسبية العامة -
- 86----- نموذج رياضي لروابط النسبية العامة يمكن تطبيقه على الحاسوب -
- 93----- مبدأ الكوسومولوجيا -
- 95----- أهم مفاهيم المترية في نظرية النسبية العامة -
- 104----- قانون الجاذبيه لأنشتاين -
- 106----- حلّ شوارتس شيلد -
- 112----- مدار الكواكب -
- 119----- إنحراف مسير الضوء -

- 122----- إنزياح الطيف -
- 127----- معادلات الحقل عند تواجد المادة -
- 131----- ديناميكا الكون -
- 137----- الأمثلة -
- 167----- بعض أهم الأصطلاحات الفيزيائية و الرياضيه و الفلسفيه في نظرية النسبية العامة (عربي – إنجليزي)
- 173 ----- بعض أهم الأصطلاحات الفيزيائية و الرياضيه و الفلسفيه في نظرية النسبية العامة (إنجليزي – عربي)
- 179 ----- المصادر







موقع جلال الحاج عبد

[www.jalalalhajabed.com](http://www.jalalalhajabed.com)

البريد الإلكتروني :

[jalal.alhajabed@hotmail.com](mailto:jalal.alhajabed@hotmail.com)

[jalal.alhajabed@yahoo.com](mailto:jalal.alhajabed@yahoo.com)