٣. مقاييس النزعة المركزية (مقاييس الموضع)
Measures of Central Tendency (Location Measures)

(٣-١) مقدمة:

مقاييس النزعة المركزية هي مقاييس عددية تستخدم لقياس موضع تركز أو تجمع البيانات. إذ أن بيانات أي ظاهر تنزع في الغالب إلى التركز والتجمع حول قيم معينة. هذه القيم هي ما يسمى بمقاييس النزعة المركزية. ومقاييس النزعة المركزية تستخدم لتلخيص البيانات عدديًا إذ أنها تعتبر قيم نموذجية أو مثالية للبيانات. كما أن هذه المقاييس تستخدم لوصف مجموعة البيانات وكذلك لمقارنة مجموعات البيانات المختلفة. ومن أهم هذه المقاييس نذكر: الوسط الحسابي (أو المتوسط)، الوسط الموزون (أو المرجح)، الوسيط، والمنوال.

تعريف رمز التجميع:

إذا كان عدد البيانات هو n وكانت البيانات هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإن مجموع هذه البيانات هو:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

ويتمتع التجميع بالخواص التالية:

- $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$
- $\sum_{i=1}^{n} c\, x_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i$
- $\sum_{i=1}^{n} c = n\, c$

(٣-٢) الوسط الحسابي (المتوسط): Arithmetic Mean (Mean)

يعتبر المتوسط من أهم وأفضل مقاييس النزعة المركزية ومن أكثرها شيوعًا واستخدامًا في التحليل الإحصائي وذلك لما يتمتع به من خصائص وصفات إحصائية جيدة. ولإيجاد المتوسط للبيانات فإننا لابد أن نفرق بين البيانات المفردة (غير مبوبة في جدول تكراري) والبيانات المبوبة (الملخصة في جدول تكراري).

أولاً: المتوسط للبيانات المفردة (غير المبوبة):

إذا كان عدد البيانات (حجم العينة) هو n وكانت قيم أو مشاهدات العينة هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإن المتوسط (الوسط الحسابي) يرمز له بالرمز $\bar{x}$ ويعرف بالصيغة التالية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عدد البيانات}}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

مثال (٣-١):

أوجد المتوسط (الوسط الحسابي) للمشاهدات التالية والتي هي عبارة عن أوزان (بالكيلوجرام) مجموعة مكونة من سبعة أشخاص: 25, 30, 40, 45, 35, 55, 50

الحل:

$x_1=25,\ x_2=30,\ x_3=40,\ x_4=45,\ x_5=35,\ x_6=55,\ x_7=50$

$n = 7$

المتوسط هو:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_7}{7}$$

$$= \frac{25+30+40+45+35+55+50}{7} = \frac{280}{7} = 40 \quad \text{(كيلوجرامًا)}$$

ثانياً: المتوسط للبيانات المبوبة:

ينبغي علينا ملاحظة ما يلي في حالة البيانات الملخصة في توزيع تكراري مبوب:

- البيانات الأصلية غير معروفة.
- عدد البيانات في كل فترة (تكرار الفترة) معروف.
- يستخدم مركز الفترة كقيمة تقريبية لجميع البيانات في الفترة.

إذا كان لدينا بيانات عددها n وكانت هذه البيانات ملخصة في جدول تكراري بحيث أن:

- عدد الفترات هو k

- مراكز الفترات هي $x_1, x_2, \ldots, x_k$
- تكرارات الفترات هي $f_1, f_2, \ldots, f_k$

أي أن البيانات قد تم تلخيصها في التوزيع التكراري المبوب التالي:

التكرار f	مركز الفترة x	الفترة
f_1	x_1	الفترة رقم 1
f_2	x_2	الفترة رقم 2
⋮	⋮	⋮
f_k	x_k	الفترة رقم k
$n = \sum f$		المجموع

لحساب المتوسط بالطريقة الحسابية فإنه يلزمنا فقط معرفة ما يلي:

- حجم العينة = عدد البيانات = $n = \sum f$
- مجموع البيانات = $\sum x f$

لذلك فإن المتوسط للتوزيع التكراري المبوب يمكن حسابه بشكل تقريبي بالصيغة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{\sum xf}{n} = = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k}$$

ويكمن تلخيص عملية إيجاد المتوسط باستخدام الجدول التالي:

x f	التكرار f	مركز الفترة x	الفترة
$x_1 f_1$	f_1	x_1	الفترة رقم 1
$x_2 f_2$	f_2	x_2	الفترة رقم 2
⋮	⋮	⋮	⋮
$x_k f_k$	f_k	x_k	الفترة رقم k
$\sum x f$	$\sum f = n$		المجموع

مثال (٣-٢):

أوجد المتوسط لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢).

الحل:

مستوى الهيموجلوبين	مركز الفترة x	التكرار f	xf
12.95 – 13.95	13.45	3	40.35
13.9 5– 14.95	14.45	5	72.25
14. 95– 15.95	15.45	15	231.75
15. 95– 16.95	16.45	16	263.20
16. 95– 17.95	17.45	10	174.50
17. 95– 18.95	18.45	1	18.45
المجموع		$n=\sum f=50$	$\sum xf=800.5$

المتوسط (الوسط الحسابي) هو:

$$\bar{x}=\frac{\sum xf}{\sum f}=\frac{800.5}{50}=16.01$$

بعض خصائص الوسط الحسابي (المتوسط):

١. المجموع الجبري لانحرافات القيم عن الوسط الحسابي $\bar{x}$ يساوي الصفر. أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\dots+(x_n-\bar{x})=0$$

ملاحظة: $(x_i-\bar{x})$ = انحراف القيمة x_i عن وسطها الحسابي $\bar{x}$.

٢. الوسط الحسابي (المتوسط) يخضع للعمليات الجبرية بسهولة كما يلي:

المشاهدات	الوسط الحسابي (المتوسط)
$x_1, x_2, \dots, x_n$	$\bar{x}$
$x_1 \pm b, x_2 \pm b, \dots, x_n \pm b$	$\overline{(x\pm b)}=\bar{x}\pm b$
$ax_1, ax_2, \dots, ax_n$	$\overline{ax}=a\bar{x}$
$ax_1 \pm b, ax_2 \pm b, \dots, ax_n \pm b$	$\overline{(ax\pm b)}=a\bar{x}\pm b$

- مثال:

المشاهدات		الوسط الحسابي (المتوسط)
$: x$	$2, 6, 4, 3, 5$	$\bar{x} = 4$
$: x+5$	$7, 11, 9, 8, 10$	$\bar{x} + 5 = 9$
$:3x$	$6, 18, 12, 9, 15$	$3\bar{x} = 12$
$: 3x + 5$	$11, 23, 17, 14, 20$	$3\bar{x} + 5 = 17$

- مثال:

إذا كان الوسط الحسابي للمشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو 15 فإن الوسط الحسابي للمشاهدات $\frac{x_1-10}{2}, \frac{x_2-10}{2}, \ldots, \frac{x_n-10}{2}$ هو $\frac{\bar{x}-10}{2} = \frac{15-10}{2} = 2.5$.

٣. إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات بحيث أن عدد بيانات المجموعة الأولى هو n_1 ومتوسطها هو $\bar{x}_1$ وكان عدد بيانات المجموعة الثانية هو n_2 ومتوسطها هو $\bar{x}_2$ فإن متوسط المجموعة الكلية المكونة من دمج هاتين المجموعتين يمكن حسابه بالصيغة التالية:

$$\text{متوسط المجموعة الكلية} \quad \bar{X} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

- مثال:

إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات بحيث أن عدد بيانات المجموعة الأولى هو 10 ومتوسطها هو 5 وكان عدد بيانات المجموعة الثانية هو 20 ومتوسطها هو 2 فإن متوسط المجموعة الكلية المكونة من دمج هاتين المجموعتين هو:

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{10 \times 5 + 20 \times 2}{10 + 20} = \frac{90}{30} = 3$$

بعض مميزات وعيوب الوسط الحسابي (المتوسط):

- **مميزات المتوسط:** إن المتوسط يعتبر من أفضل مقاييس النزعة المركزية ومن أكثرها شيوعًا وذلك لما يتمتع به من صفات جيدة. ومن مميزات المتوسط نذكر ما يلي:
  ١. المتوسط سهل التعريف والحساب ويخضع للعمليات الجبرية بسهولة.
  ٢. المتوسط وحيد لمجموعة البيانات الواحدة.
  ٣. يأخذ المتوسط في الاعتبار جميع البيانات.

- **عيوب المتوسط:** بالرغم من أن المتوسط يعتبر من أفضل مقاييس النزعة المركزية إلا أن له بعض العيوب نذكر منها ما يلي:
  ١. يتأثر المتوسط بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
  ٢. المتوسط غير معرف للبيانات الوصفية (النوعية) إذ يمكن حسابه للبيانات الكمية فقط.

ملاحظة:

وحدة المتوسط هي نفس وحدة البيانات الأصلية. فإذا كانت وحدة البيانات هي الكيلوجرام فإن وحدة المتوسط هي الكيلوجرام.

(٣-٣) الوسط المرجح (الموزون): Weighted Mean

في بعض الأحيان تكون المشاهدات $x_1, x_2, \dots, x_n$ مقرونة بالأوزان $w_1, w_2, \dots, w_n$ على التوالي. وفي هذه الحالة نعرف الوسط المرجح كما يلي:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum x w}{\sum w} = \; = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

مثال (٣-٣):

أوجد الوسط المرجح لدرجات الطلاب باعتبار أن الوزن هو عدد الساعات للمقرر فيما يلي:

المقرر	عدد الساعات (w)	الدرجة (x)
إحص	2	40
فيز	4	65
ريض	3	70

الحل:

x	w	wx
40	2	80
65	4	260
70	3	210
	$\sum w = 9$	$\sum x w = 550$

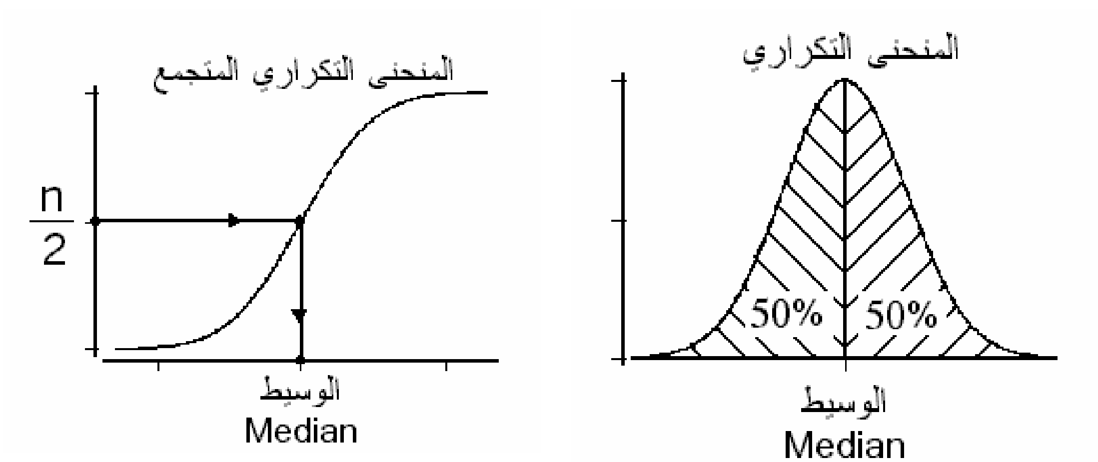
$$\bar{x}_w = \frac{\sum x w}{\sum w} = \frac{550}{9} = 61.11 \quad \text{(درجة)}$$

ملاحظات:

۱. المعدل التراكمي والمعدل الفصلي للطالب في جامعة الملك سعود هما وسطان مرجحان للنقاط باعتبار أن أعداد الساعات هي الأوزان.
۲. الوسط الحسابي $\bar{x}$ هو وسط مرجح جميع أوزانه متساوية (أو مساوية للواحد).
۳. الوسط الحسابي للبيانات المبوبة هو وسط مرجح لمراكز الفترات باعتبار أن تكرار الفترات هي الأوزان.

(۳-٤) الوسيط: Median

الوسيط هو أحد مقاييس النزعة المركزية المشهورة. ويعرف الوسيط لمجموعة من البيانات على أنه تلك القيمة التي تتوسط البيانات عند ترتيبها تصاعديًا (أو تنازليًا) أي أنه تلك القيمة التي تقسم البيانات بعد ترتيبها إلى جزأين متساويين فتكون البيانات في الجزء الأول تقل عن أو تساوى الوسيط والبيانات في الجزء الثاني تزيد عن أو تساوى الوسيط. أي أن 50% من البيانات تساوي أو تقل عن الوسيط و 50% من البيانات تساوي أو تزيد عن الوسيط. يرمز للوسيط بالرمز (Med).



أولاً: الوسيط للبيانات المفردة (غير مبوبة):

إذا كانت قيم العينة هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وحجم العينة هو n فإن الوسيط يعرف كما يلي:

- **أولاً: إذا كان حجم العينة n عددًا فرديًا:**

الوسيط = القيمة التي في منتصف البيانات بعد ترتيبها وهي القيمة المرتبة ذات الترتيب $\frac{n+1}{2}$.

البيانات مرتبة	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	…	$X_{(\frac{n+1}{2})}$	…	$X_{(n)}$
الترتيب	1	2	…	$\frac{n+1}{2}$	…	n.

القيمة في المنتصف = $X_{(\frac{n+1}{2})}$ = الوسيط

- **ثانيًا: إذا كان حجم العينة n عددًا زوجيًا:**

الوسيط = متوسط القيمتين في منتصف البيانات بعد ترتيبها وهما القيمتان المرتبتان ذاتا الترتيب $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$.

البيانات مرتبة	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	…	$X_{(\frac{n}{2})}$	$X_{(\frac{n}{2}+1)}$	…	$X_{(n)}$
الترتيب	1	2	…	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}+1$	…	n.

القيمتان في المنتصف هما: $X_{(\frac{n}{2})}$ و $X_{(\frac{n}{2}+1)}$ لذلك فإن الوسيط =

$$\frac{X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}$$

مثال (٣-٤):

أوجد الوسيط لمجموعة الأوزان (بالكيلوجرام) التالية: 7.1, 2.5, 2.5, 5.4, 8.3.

الحل:

بما أن n=5 عدد فردي فإن الوسيط هو القيمة التي في المنتصف بعد ترتيب البيانات وهي القيمة ذات الترتيب $3=\frac{5+1}{2}=\frac{n+1}{2}$.

البيانات مرتبة	2.5	2.5	5.4	7.1	8.3
الترتيب	1	2	3	4	5

الوسيط هو القيمة ذات الترتيب 3 لذلك فإن: الوسيط = 5.4 كيلوجراما

مثال (٣-٥):

أوجد الوسيط لمجموعة الأوزان (بالكيلوجرام) التالية: 7.1, 2.5, 2.5, 5.4, 9.2, 8.3.

الحل:

بما أن n=6 عدد زوجي فإن الوسيط هو متوسط القيمتين اللتين في المنتصف بعد ترتيب البيانات وهما القيمتان ذاتا الترتيب $3=\frac{6}{2}=\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1=4$.

البيانات مرتبة	2.5	2.5	5.4	7.1	8.3	9.2
الترتيب	1	2	3	4	5	6

القيمتان في المنتصف هما 5.4 و 7.1 ولذلك فإن: الوسيط = $\frac{5.4+7.1}{2}$ = 6.25 كيلوجراما.

ثانيًا: الوسيط للبيانات المبوبة:

يمكن حساب الوسيط للبيانات الملخصة في جدول تكراري بطرقتين هما: طريقة حسابية وطريقة بيانية. ويستخدم الجدول التكراري المتجمع الصاعد لإيجاد الوسيط حسابيًا بينما يستخدم المضلع التكراري المتجمع الصاعد لإيجاد الوسيط بيانيًا. وفي حالة البيانات المبوبة فإننا نعرف ما يلي:

- رتبة (أو ترتيب) الوسيط = $\frac{n}{2}$ (سواءً كان عدد البيانات n زوجيًا أم فرديًا).
- الفترة الوسيطية = الفترة التي يقع فيها الوسيط

= أول فترة يزيد تكرارها المتجمع الصاعد عن $\frac{n}{2}$ أو يساويه

(أ) إيجاد الوسيط حسابيًا:

لإيجاد الوسيط حسابيًا نقوم بالخطوات التالية:

١. نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد

٢. نحدد رتبة (أو ترتيب) الوسيط = $\frac{n}{2}$ (التكرار المتجمع الوسيطي)

٣. بعد تحديد رتبة الوسيط نستخدم الجدول التكراري المتجمع الصاعد لتحديد ما يلي:

A = بداية الفترة الوسيطية   L = طول الفترة

F_1 = التكرار المتجمع الصاعد **السابق** للتكرار المتجمع الصاعد الوسيطي $\frac{n}{2}$

F_2 = التكرار المتجمع الصاعد **اللاحق** للتكرار المتجمع الصاعد الوسيطي $\frac{n}{2}$

٤. نوجد الوسيط بالعلاقة التالية:

$$\text{Med} = A + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_1}{F_2 - F_1}\right) \times L = A + \left(\frac{(\text{رتبة الوسيط}) - F_1}{F_2 - F_1}\right) \times L$$

مثال (٣-٦):

أوجد قيمة الوسيط حسابيًا لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢).

الحل:

$$\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

الفترة الوسيطية هي:

15.95 – 16.95

التكرار المتجمع الصاعد	مستوى الهيموجلوبين
0	أقل من 12.95
3	أقل من 13.9 5
8	أقل من 14. 95
23 = F_1	أقل من **15. 95** = A
39 = F_2	أقل من 16. 95
49	أقل من 17. 95
50	أقل من 18.95

Med ⇒ ; $\leftarrow \frac{n}{2} = 25$

A=15.95

L=16.95–15.95=1.0

$F_1 = 23$

$F_2 = 39$

$$\text{Med} = A + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_1}{F_2 - F_1}\right) \times L$$

$$\text{Med} = 15.95 + \left(\frac{25 - 23}{39 - 23}\right) \times 1.0 = 15.95 + \left(\frac{2}{16}\right) \times 1.0$$

$$= 15.95 + 0.125 \times 1 = 16.075$$

في هذا المثال نستطيع القول بأن 50% من الأشخاص (نصف الأشخاص) يقل مستوى الهيموجلوبين لهم عن Med=16.075.

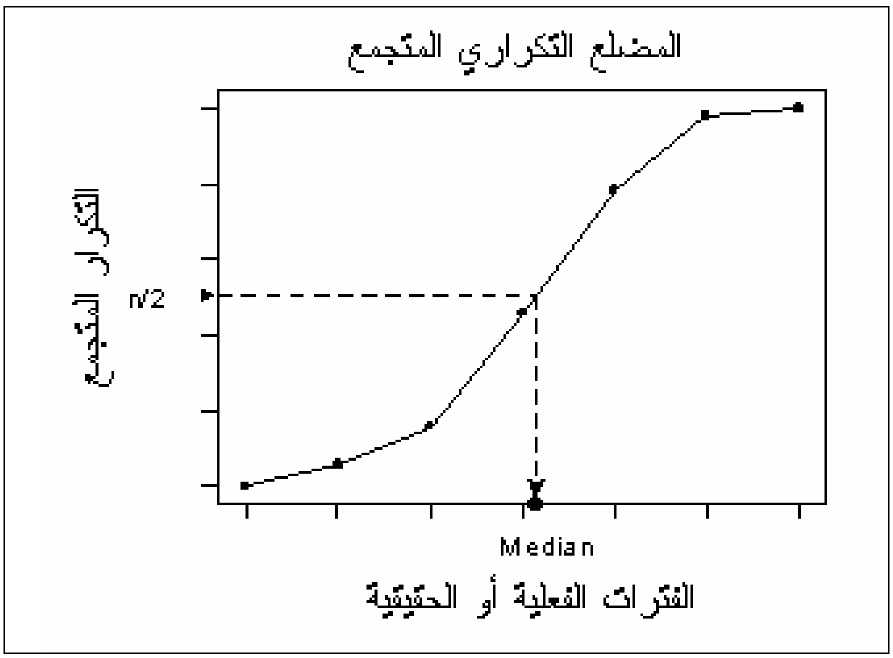
(ب) إيجاد الوسيط بيانيًا:

لإيجاد الوسيط بيانيًا نقوم بالخطوات التالية:

١. نرسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد

٢. نحدد رتبة (أو ترتيب) الوسيط = $\frac{n}{2}$ (سواءً كان عدد البيانات فرديًا أو زوجيًا)

٣. في المضلع التكراري المتجمع الصاعد نحدد موقع رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$ على المحور الرأسي (محور التكرار المتجمع) ومن ذلك الموقع نرسم خطًا أفقيًا يلتقي مع المضلع في نقطة. وعند نقطة الالتقاء نرسم عمودًا يتقاطع مع محور الفترات (المحور الأفقي) في نقطة. هذه النقطة هي قيمة الوسيط التقريبية. والشكل التالي يبين طريقة حساب الوسيط.



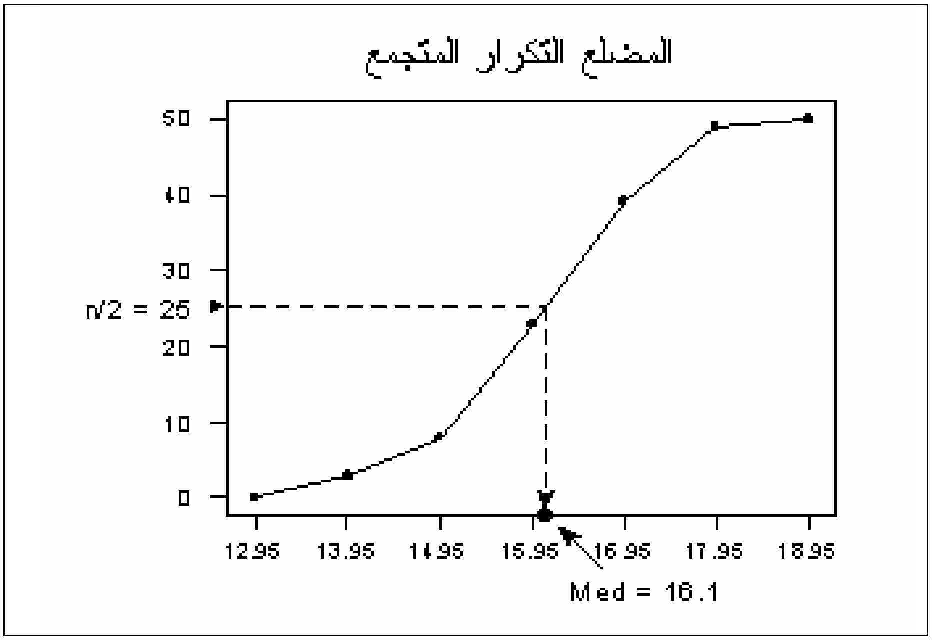
<u>مثال (٣-٧):</u>

أوجد قيمة الوسيط بيانيًا لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢).

<u>الحل:</u>

نرسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد كما مر معنا سابقًا ثم نطبق طريقة حساب الوسيط بيانيًا. مع ملاحظة أن رتبة الوسيط = $\frac{n}{2}=\frac{50}{2}=25$. باستخدام الشكل أدناه نجد أن القيمة التقريبية للوسيط هي:

الوسيط = 16.1.



بعض مميزات وعيوب الوسيط:

- **مميزات الوسيط:** إن الوسيط يعتبر من مقاييس النزعة المركزية الشائعة وذلك لما يتمتع به من بعض الصفات الجيدة. ومن مميزات الوسيط نذكر ما يلي:
  1. الوسيط سهل التعريف والحساب.
  2. الوسيط وحيد لمجموعة البيانات الواحدة.
  3. الوسيط أقل تأثرًا من المتوسط بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
- **عيوب الوسيط:** بالرغم من أن الوسيط يعتبر من مقاييس النزعة المركزية الجيدة إلا أن له بعض العيوب نذكر منها ما يلي:

1. لا يأخذ الوسيط في الاعتبار جميع البيانات إذا أنه يعتمد فقط على القيم التي في المنتصف وعلى ترتيب البيانات بغض النظر عن قيمها.
2. لا يمكن بشكل عام حساب الوسيط للبيانات الوصفية (النوعية).

ملاحظة:

وحدة الوسيط هي نفس وحدة البيانات الأصلية. فإذا كانت وحدة البيانات هي الكيلوجرام فإن وحدة الوسيط هي الكيلوجرام.

(٣-٥) المنوال: Mode:

المنوال هو أحد مقاييس النزعة المركزية شائعة الاستخدام ولاسيما في حالة البيانات الوصفية (النوعية). ويعرف المنوال لمجموعة من البيانات على أنه تلك القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها أي أنها القيمة ذات التكرار الأكبر (إن وجدت). يرمز للمنوال بالرمز (Mod). ومن تعريف المنوال تتضح لنا عدة أنواع من البيانات:

١. بيانات ليس لها منوال وتسمى عديمة المنوال.
٢. بيانات لها منوال واحد وتسمى وحيدة المنوال.
٣. بيانات لها أكثر من منوال وتسمى متعددة المنوال.

أولاً: المنوال للبيانات المفردة (غير مبوبة):

المنوال = المشاهدة الأكثر تكرارًا (إن وجدت).

مثال:

الجدول أدناه يتضمن بيانات إحدى الدراسات التي طبقت على خمسة أشخاص لقياس العمر (بالسنة) والوزن (بالكيلوجرام) والطول (بالسم) وفصيلة الدم. أوجد منوال للبيانات المختلفة.

رقم الشخص	1	2	3	4	5
العمر	25	20	25	30	35
الوزن	70	55	65	70	65
الطول	164	162	155	165	158
فصيلة الدم	O	A	B	A	AB

الحل:

البيانات	المنوال	نوع البيانات بالنسبة للمنوال
العمر	25	وحيدة المنوال
الوزن	المنوال الأول = 65 المنوال الثاني = 70	متعددة المنوال (ثنائية المنوال)
الطول	لا يوجد	عديمة المنوال

البيانات	المنوال	نوع البيانات بالنسبة للمنوال
فصيلة الدم	A	وحيدة المنوال

ثانياً: المنوال للبيانات المبوبة:

نعرف الفترة المنوالية بأنها الفترة ذات التكرار الأكبر وهي الفترة التي يقع فيها منوال. وفي الجدال التكراري قد يكون هناك فترة منوالية واحدة أو عدة فترات منوالية أو قد لا يوجد فترة منوالية. ويمكن حساب المنوال للبيانات الملخصة في جدول تكراري بطرقتين هما: طريقة حسابية وطريقة بيانية. ويستخدم الجدول التكراري لإيجاد المنوال حسابيًا بينما يستخدم المدرج التكراري لإيجاد المنوال بيانيًا.

(أ) إيجاد المنوال حسابيًــا:

الطريقة التالية هي طريقة تقريبية لإيجاد المنوال حسابيًا:

المنوال = مركز الفترة المنوالية

مثال (٣-٨):

أوجد قيمة المنوال حسابيًا لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢).

الحل:

التكرار	مركز الفترة	مستوى الهيموجلوبين
3	13.45	12.95 – 13.95
5	14.45	13.95– 14.95
15	15.45	14. 95– 15.95
16	**16.45**	**15. 95– 16.95**
10	17.45	16. 95– 17.95
1	18.45	17. 95– 18.95

أكبر تكرار = 16

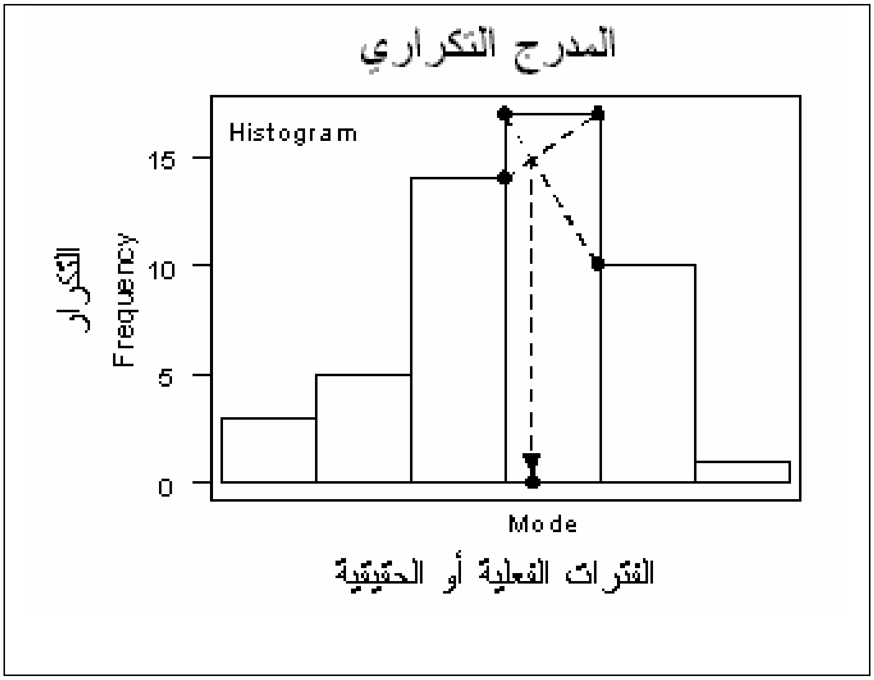
الفترة المنوالية هي: 15.95 – 16.95

المنوال = مركز الفترة المنوالية

= 16.45

(ب) إيجاد المنوال بيانيًــا:

نستخدم المدرج التكراري لحساب المنوال. ففي المدرج التكراري نحدد الفترة المنوالية وهي الفترة ذات التكرار الأكبر (المستطيل الأطول). بعد تحديد الفترة المنوالية نحدد الفترتين السابقة واللاحقة للفترة المنوالية. بعد ذلك نرسم خط مستقيم يصل القمة اليمنى لمستطيل الفترة المنوالية بالقمة اليمنى لمستطيل الفترة السابقة ونرسم خط مستقيم يصل القمة اليسرى لمستطيل الفترة المنوالية بالقمة اليسرى لمستطيل الفترة اللاحقة. وعند نقطة تقاطع الخطين نرسم عمود

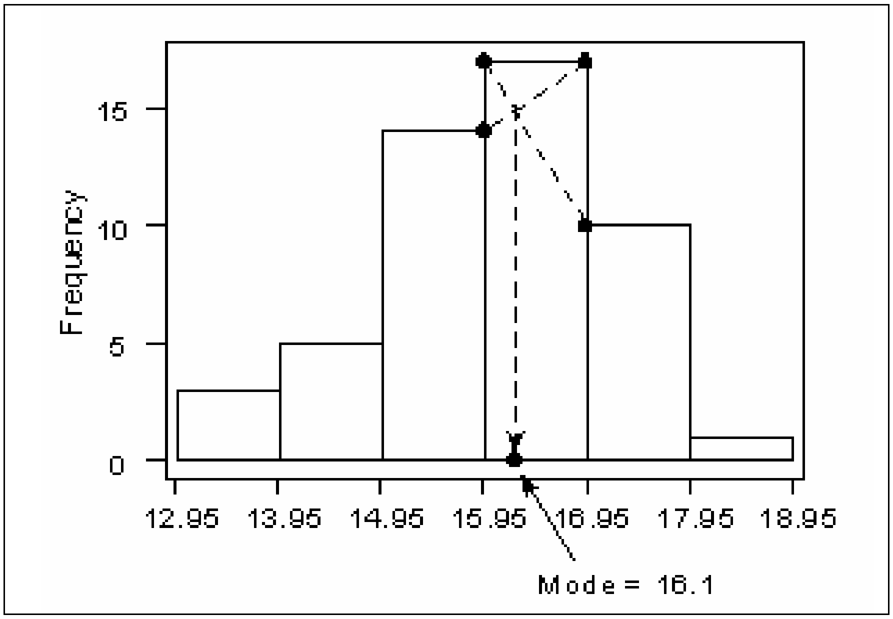


<u>مثال (٣-٩):</u>

أوجد قيمة المنوال بيانيًا لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢).

<u>الحل:</u>

نرسم المدرج التكراري كما مر معنا سابقًا ثم نطبق طريقة حساب المنوال بيانيًا. باستخدام الشكل أدناه نجد أن القيمة التقريبية للمنوال هي: المنوال = 16.1.



بعض مميزات وعيوب المنوال:

- **مميزات المنوال:** يعتبر المنوال من مقاييس النزعة المركزية الشائعة ومن مميزاته نـذكر ما يلي:
  1. المنوال سهل التعريف والحساب.
  2. المنوال أقل تأثرًا من المتوسط بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
  3. يمكن حساب المنوال للبيانات الكمية والوصفية (النوعية).
- **عيوب المنوال:** بالرغم من أن المنوال يعتبر من مقاييس النزعة المركزية الـشائعة إلا أن له بعض العيوب نذكر منها ما يلي:
  1. لا يأخذ المنوال في الاعتبار جميع البيانات إذا أنه يعتمد فقط علـى البيانـات ذات التكرار الأكثر.
  2. قد لا يوجد منوال لمجموعة من البيانات أو قد يكون هناك أكثر من منوال.

ملاحظة:

وحدة المنوال هي نفس وحدة البيانات الأصلية. فإذا كانت وحدة البيانات هي الكيلوجرام فإن وحدة المنوال هي الكيلوجرام.

(٣-٦) الربيعات والعشيرات والمئينات:

رأينا سابقًا أن الوسيط هو القيمة التي تجزئ البيانات بعد ترتيبها إلى جزأين متساويين.

½ n 50% ½ n 50%

-------------------------|-----------------------------

Med

والآن لو جزأنا البيانات بعد ترتيبها إلى أربعة أجزاء متساوية:

¼ n =25% ¼ n=25% ¼ n=25% ¼ n= 25%

-----------------|--------------------|--------------------|----------------

Q_1 Q_2 Q_3

فإن نقاط التقسيم هي:

Q_1 = الربيع الأول = القيمة التي يسبقها $\frac{1}{4}$ البيانات أو 25% من البيانات وتكون رتبتها = $\frac{n}{4}$

Q_2 = الربيع الثاني = القيمة التي يسبقها $\frac{2}{4}$ البيانات أو 50% من البيانات وتكون رتبتها = $\frac{2n}{4}$

Q_3 = الربيع الثالث = القيمة التي يسبقها $\frac{3}{4}$ البيانات أو 75% من البيانات وتكون رتبتها = $\frac{3n}{4}$

أما إذا جزأنا البيانات بعد ترتيبها إلى عشرة أجزاء متساوية:

$\frac{n}{10}$ $\frac{n}{10}$ $\frac{n}{10}$ $\frac{n}{10}$ $\frac{n}{10}$ $\frac{n}{10}$ $\frac{n}{10}$ $\frac{n}{10}$ $\frac{n}{10}$ $\frac{n}{10}$

------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|---------|-----

D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6 D_7 D_8 D_9

فإن نقاط التقسيم هي:

D_1 = العشير الأول = القيمة التي يسبقها $\frac{1}{10}$ البيانات أو 10% من البيانات ويكون ترتيبها = $\frac{n}{10}$

D_2 = العشير الثاني = القيمة التي يسبقها $\frac{2}{10}$ البيانات أو 20% من البيانات ويكون ترتيبها = $\frac{2n}{10}$

D_3 = العشير الثالث = القيمة التي يسبقها $\frac{3}{10}$ البيانات أو 30% من البيانات ويكون ترتيبها = $\frac{3n}{10}$

وهكذا ... حتى

D_9 = العشير التاسع = القيمة التي يسبقها $\frac{9}{10}$ البيانات أو 90% من البيانات ويكون ترتيبها = $\frac{9n}{10}$

أما إذا جزأنا البيانات بعد ترتيبها إلى مائة جزء متساوي:

$\frac{n}{100}$ $\frac{n}{100}$ $\frac{n}{100}$ $\frac{n}{100}$ $\frac{n}{100}$

------|---------|---------|--|---------|-----

P_1 P_2 P_3 . . . P_{98} P_{99}

فإن نقاط التقسيم هي:

P_1 = المئين الأول = القيمة التي يسبقها $\frac{1}{100}$ البيانات أو 1% من البيانات ويكون ترتيبها = $\frac{n}{100}$

P_2 = المئين الثاني = القيمة التي يسبقها $\frac{2}{100}$ البيانات أو 2% من البيانات ويكون ترتيبها = $\frac{2n}{100}$

P_3 = المئين الثالث = القيمة التي يسبقها $\frac{3}{100}$ البيانات أو 3% من البيانات ويكون ترتيبها = $\frac{3n}{100}$

وهكذا ... حتى

P_{99} =المئين التاسع والتسعون=القيمة التي يسبقها $\frac{99}{100}$ البيانات أو 99% من البيانات ويكون ترتيبها= $\frac{99n}{100}$

ملاحظات:

١. $\text{Med} = \mathbf{Q_2} = \mathbf{D_5} = \mathbf{P_{50}}$

٢. $\mathbf{Q_1} = \mathbf{P_{25}}\ ,\ \ \mathbf{Q_3} = \mathbf{P_{75}}$

٣. $\mathbf{D_1} = \mathbf{P_{10}}\ ,\ \mathbf{D_2} = \mathbf{P_{20}}\ ,\ \mathbf{D_3} = \mathbf{P_{30}}\ ,\ \ldots,\ \mathbf{D_9} = \mathbf{P_{90}}$

٤.

المقياس	الرمز	الرتبة (R)
الربيع رقم k	$\mathbf{Q_k}$	$\frac{k\,n}{4}$
العشير رقم k	$\mathbf{D_k}$	$\frac{k\,n}{10}$
المئين رقم k	$\mathbf{P_k}$	$\frac{k\,n}{100}$

إيجاد الربيعات والعشيرات والمئينات للبيانات المبوبة:

إن طريقة حساب الربيعات والعشيرات والمئينات سواءً كانت حسابية أم بيانية فهي مشابهه لطريقة حساب الوسيط.

أولاً: إيجاد الربيعات والعشيرات والمئينات حسابيًا:

نستخدم الجدول التكراري المتجمع الصاعد لحساب هذه المقاييس. بعد تحديد رتبة المقياس المطلوب نستخدم الصيغة التالية:

$$\text{المقياس} = A + \left(\frac{R - F_1}{F_2 - F_1}\right) \times L$$

حيث أن:

R = رتبة المقياس

A = بداية فترة المقياس

L = طول فترة المقياس

F_1 = التكرار المتجمع الصاعد **السابق** لرتبة المقياس R

F_2 = التكرار المتجمع الصاعد **اللاحق** لرتبة المقياس R

مثال:

أوجد حسابيًا المقاييس التالية لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تـم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢):

(أ) العشير الثاني

(ب) المئين التاسع والتسعين.

الحل:

	مستوى الهيموجلوبين		التكرار المتجمع الصاعد	
	12.95	أقل من	0	
	13.9 5	أقل من	3	
	14. 95= A	أقل من	8 = F_1	$\leftarrow R = \frac{2n}{10} = 10$
$D_2 \Rightarrow$	15. 95	أقل من	23 = F_2	
	16. 95	أقل من	39	
	17. 95 = A^*	أقل من	49= F^*_1	$\leftarrow R^* = \frac{99n}{100} = 49.5$
$P_{99} \Rightarrow$	18.95	أقل من	50= F^*_2	

(أ) حساب العشير الثاني:

$$R = \frac{2n}{10} = \frac{2 \times 50}{10} = 10$$

$A= 14.95,\quad L = 1.00,\quad F_1 = 8\ ,\ F_2 = 23$

$$D_2 = A + \left(\frac{R - F_1}{F_2 - F_1}\right) \times L = 14.95 + \left(\frac{10 - 8}{23 - 8}\right) \times 1.00 = 15.08$$

في هذا المثال نستطيع القول بأن 20% من الأشخاص يقل مستوى الهيموجلوبين لهم عن $D_2=15.08 \quad (D_2 = P_{20})$.

(ب) حساب المئين التاسع والتسعين:

$$R = \frac{99n}{100} = \frac{99 \times 50}{100} = 49.5$$

$$A^* = 17.95, \quad L^* = 1.00, \quad F^*_1 = 49 \;, \; F^*_2 = 50$$

$$P_{99} = A^* + \left(\frac{R^* - F^*_1}{F^*_2 - F^*_1}\right) \times L^* = 17.95 + \left(\frac{49.5 - 49}{50 - 49}\right) \times 1.00 = 18.45$$

في هذا المثال نستطيع القول بأن 99% من الأشخاص يقل مستوى الهيموجلوبين لهم عن $P_{99}=18.45$.

<u>ثانيًا: إيجاد الربيعات والعشيرات والمئينات بيانيًا:</u>

إن طريقة حساب الربيعات والعشيرات والمئينات بيانيًا مشابهه لطريقة حساب الوسيط إذ نستخدم المضلع التكراري المتجمع الصاعد مع ملاحظة تحديد الرتبة المناسبة للمقياس المطلوب بدلاً من رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$.

<u>مثال:</u>

أوجد بيانيًا المقاييس التالية لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢):

(أ) العشير الثاني

(ب) المئين التاسع والتسعين.

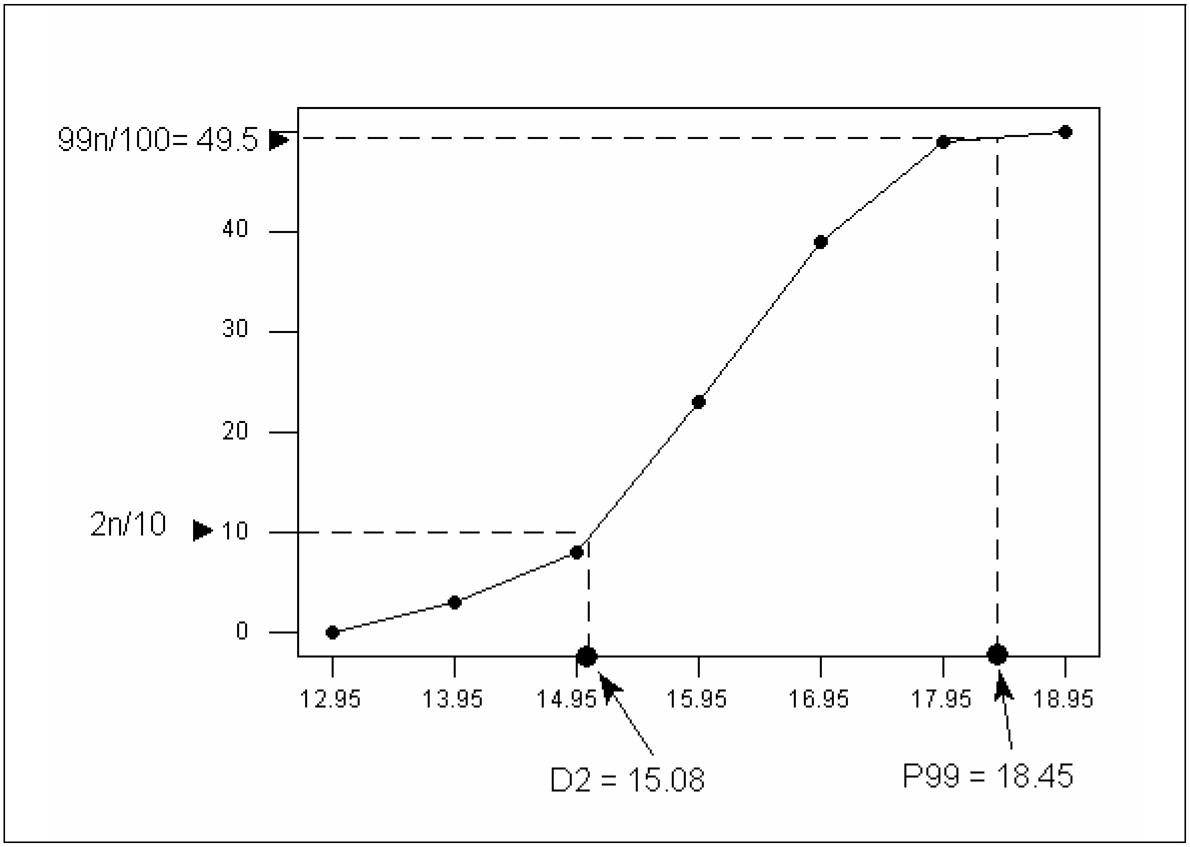
<u>الحل:</u>

رتبة العشير الثاني هي $R = \frac{2n}{10} = \frac{2 \times 50}{10} = 10$.

رتبة المئين التاسع والتسعين هي $R = \frac{99n}{100} = \frac{99 \times 50}{100} = 49.5$.

من الشكل أدناه، فإن القيم التقريبية للعشير الثاني D_2 والمئين التاسع والتسعين P_{99} هما على التوالي:

$$D_2 = 15.08$$
$$P_{99} = 18.45$$



ملاحظة:

وحدة مقاييس النزعة المركزية وكذلك الربيعات والعشيرات والمئينات هي نفس وحدة البيانات الأصلية. فإذا كانت وحدة البيانات هي الكيلوجرام فإن وحدة جميع مقاييس النزعة المركزية وكذلك الربيعات والعشيرات والمئينات هي الكيلوجرام.