عرض البيانات

في هذا الباب سوف تتعرف علي :

- أنواع البيانات.

- الكيفية (الوصف)

- الكمية: المنفصلة والمتصلة.

- الرسوم البيانية لتوضيح البيانات.
  - الرسم بالأعمدة, الرسم بالدائرة.
  - الرسم البياني بالأعمدة الرأسية.
  - مخطط الساق والأوراق.
  - المضلع التكراري.
  - رسم التكرار المتجمع.
  - مخطط الصندوق ذي العارضين.
- المتوسطات (مقاييس النزعة المركزية)
  - المنوال , الوسيط , الوسط الحسابي.
- التشتت (مقاييس التباين)
  - المدي , المدي بين إرباعى , الانحراف المعياري.
- مزايا وعيوب المقاييس المختلفة.

تمثيل البيانات:

إنك تواجهة في الحياة اليومية كثيراً من المعلومات الحقيقية من التصفح داخل الإنترنت,الصحف والتلفزيون.
والسؤال هو , كيف يمكن أن تجعل لها معنى؟

المعلومات تأتي من طريق الدراسات والتجارب ,هي عبارة عن تجميع مجموعة ملاحظات أو مشاهدات تعرف بالبيانات. وفرع الرياضيات الذي يتعامل مع جمع و تحليل وتفسير البيانات العددية يسمي بعلم الإحصاء.

وعندما تقوم بجمع بيانات في تجربة أو استطلاع, من الصعب تفسيرها في وضعها الخام .
هذا الباب يعرض ويلخص طرق البيانات؛ لجعلها سهلة التحليل ,وذلك مثل:

- ترتيب البيانات في جدول أو رسم بياني.
- رسم مخطط بياني لإلقاء نظرة سريعة أو لتقدير القيم.
- إيجاد المتوسط لعرض البيانات, والذي يعرف بمقياس النزعة المركزية.
- إيجاد مقياس التباين أو التشتت للبيانات.

أنواع البيانات

هنالك نوعان من البيانات: نوعية (وصفية),كمية (رقمية).

البيانات النوعية:

تحتوي البيانات النوعية علي الوصف,كاستخدام الأسماء مثلاً, وألوان السيارات المبيعة في كراج خلال شهر,
أنواع أشجار التفاح في بستان كبير,أنواع المركبات التي تسخدم طريق معين في الساعة.
وفي الأغلب تمثل البيانات النوعية بصرياً بالرسم بالأعمدة أو الرسم بالدائرة حيث أنها هي الأسهل من بين الفئات.

❖ *الإرباعي هو كمية حسابية بمعني ربع الشئ*

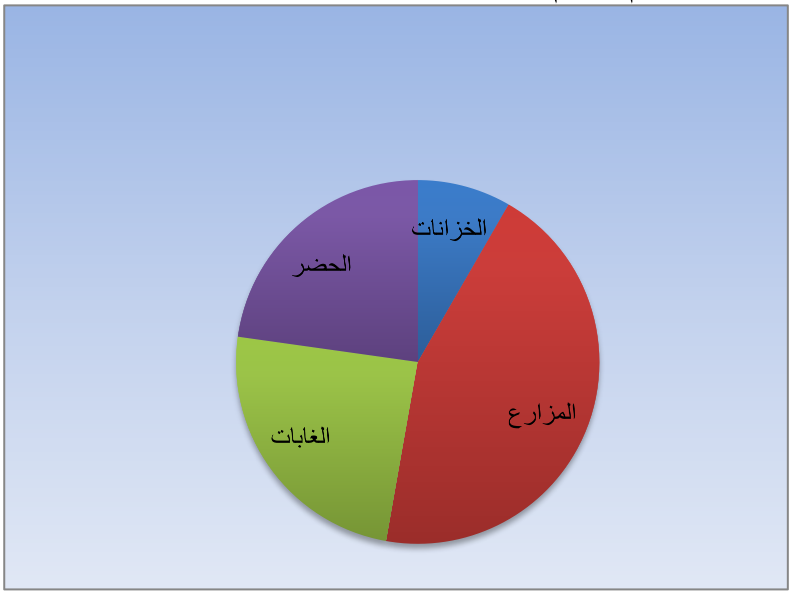
مثال 1.1

يوضح الجدول التالي مساحات مختلفة للطبقات المستخدمة من أرض في منطقة معينة.

فئة الأرض المستخدمة	الحضر	الغابات	المزارع	الخزانات	
المساحة km^2	615	660	1200	225	الإجمالي 2700

توضيح البيانات بيانيا.

يمكن أن ترسم الرسم بالدائرة.



لإيجاد الزوايا في الرسم بالدائرة.

المساحة الكلية هي 2700km^2

الحضر: $\frac{615}{2700} \times 360 = 82°$

الغابات: $\frac{660}{2700} \times 360 = 88°$

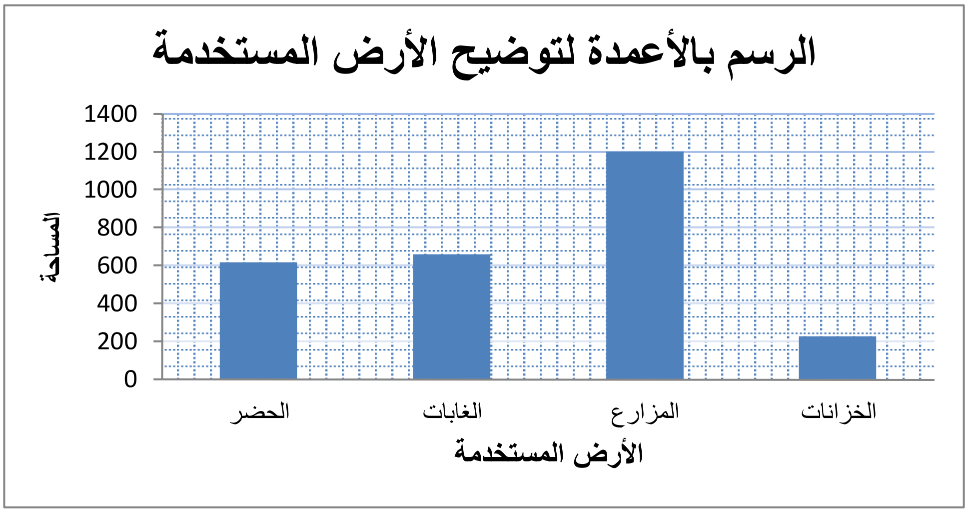
المزارع: $\frac{1200}{2700} \times 360 = 160°$

المخازن: $\frac{225}{2700} \times 360 = 30°$

بدلا من ذلك يمكن أن تستخدم الرسم بالأعمدة.

لاحظ ذلك في الرسم بالأعمدة

- كل الأعمدة لها نفس العرض
- هنالك فجوات واضحة بين الأعمدة بين كل فئة



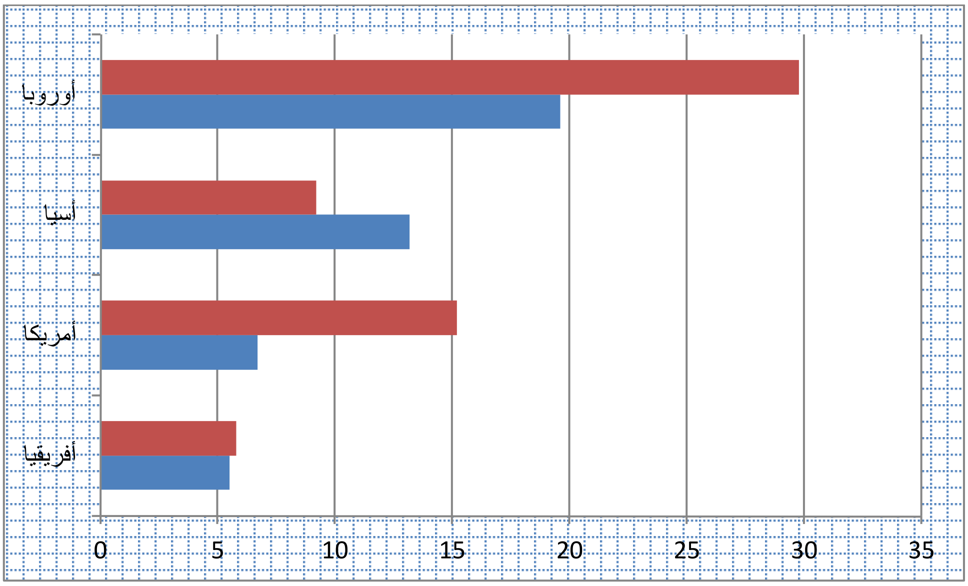
كذلك الرسم بالأعمدة يمكن أن يقارن مجموعة من البيانات.

الجدول التالي يوضح المبيعات بملايين الدولارات لشركة ما في سنتين متتاليتين.

	أوروبا	أسيا	أمريكيا	إفريقيا	المبيعات (ملايين الدولارات)
إجمالي المبيعات $45	19.6	13.2	6.7	5.5	**السنة الأولي**
إجمالي المبيعات $60	29.8	9.2	15.2	5.8	**السنة الثانية**

لتفسير البيانات يمكنك رسم المخطط المقارن بالأعمدة. (حيث الرسم بالأعمدة يمكن أن يكون أفقيأوعمودي) .

المخطط المقارن بالأعمدة يوضح المبيعات في السنة الأولى و السنة الثانية



المبيعات (بملايين الدولارات)

تمرين1- أ

1. سجلت أحدي المدارس عدد الإمتحانات التي منحت لكل مرحلة في المستوي المتقدم. وكانت النتائج كالآتي:

$A^*: 44\ , A: 88\ , B: 69\ , C: 30\ , D: 17\ , E: 4.$

مثل البيانات بالرسم بالأعمدة.

2. تشمل البيانات التالية الانفاق علي الخدمات من قبل المجلس المحلي خلال عام معين .

الإنفاق(بالمليون دولار)	**الخدمة**
160.2	التعليم
35.7	الطرق العامة
28.9	الشرطة
27.9	الخدمات الإجتماعية
24.5	أخري

هذة البيانات ممثلة بمخطط دائري نصف قطره 5cm.

أحسب الزاوية المناظرة لأقرب درجة لكل من الخدمات الخمس.

(ليس من الضروري أن ترسم المخطط الدائري)

3. هنالك 24 تلميذ بصف (بيتر) .أجرى دراسة حول كيف يصل التلاميذ الي المدرسة. حيث كانت نتائجة كالاتى.

عدد التلاميذ	**طريقة الوصول**
10	البص
2	السيارة
5	الدراجة
7	سيراًعلي الأقدام

مثل البيانت بمخطط دائري .

(i) احسب لأقرب درجة زوايا القطاعات في الدائرة.

(ii) ارسم مخطط الدائرة مستخدما نصف قطر يساوي $4cm$, واكتب علي كل قطاع طريقة الوصول التي وضحت.

4. هنالك ثلاثة فئات لتذاكر الحفلات الموسيقية في مسرح معين: الأطفال, الشباب والكبار. أجريت دراسة حول التذاكر المبيعة لمسرحيتين متتاليتين وكانت النتائج كما في الجدول.

النسبة الموئية للتذاكر المبيعة في كل فئة .

الكبار	**الشباب**	**الأطفال**	
50	30	20	**المسرحية1**
10	55	35	**المسرحية2**

وضح هذه النتائج بيانيا.

5. نادي للقولف به 180عضواً .هنالك ثلاثة أنواع من العضوية: الرجال, النساء والصغار. حيث أن عدد الرجال ثلاثة أضعاف عدد النساء, كما أن عدد الصغار نصف عدد النساء.

فسر المعلومات أعلاه مستخدما

(i) مخطط الأعمدة.

(ii)مخطط الدائرة.

6. تحصل مؤسسة خيرية علي دخلها من عدة مصادر. هذا الجدول يوضح هذة المصادر ومقدار الدخل المقابل لها في السنة الأخيرة.

الدخل بالدولار	الدخل
30000	الإعلان
x	التبرعات
9000	الرسوم
3000	الإستثمار
10000	الرعاية

رسم مخطط الدائرة لتوضيح المدخلات.

معطى: أن زاوية القطاع الذي تمثلة التبرعات كانت $240°$, أوجد قيمة x .

البيانات الكمية:

تأخذ البيانات الكمية قيم عددية (رقمية), وهنالك نوعان من البيانات الكمية : منفصلة(متقطعة) و متصلة.

البيانات المنفصلة(المتقطعة):

في دراسة حول عدد الأحرف في لغز الكلمات المتقاطعة في صحيفة الاثنين وجدت البيانات التالية:

9 5 7 7 5 12 6 6 12 5

7 7 5 5 3 7 3 7 9 6

3 5 7 3 6 7 7 6 3 7

- هذا مثال لبيانات **متقطعة(منفصلة).**
- تأخذ البيانات المنفصلة قيم ثابتة ومعروفة (أي يمكن تحديدها وغالبا ما تكون صحيحة) مثل:
- عدد سيارات السباق التي تجتاز الفحص خلال فترة عشر دقائق.
- عدد زيارات موقع انترنت في الساعة.
- قياسات أحذية الطلاب في صف ما.
- عدد الأهداف المسجلة في كرة قدم.

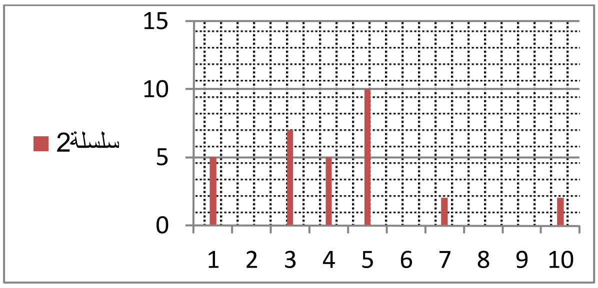
(البيانات النفصلة أحياناً كثيرة تنشأ من العد)

التوزيع التكراري للبيانات المنفصلة

لتوضيح البيانات المتقطعة بإيجاز , أحسب عدد مرات كل قيمة حدثت ومن ثم لخص هذة القيم في جدول, والذي يعرف بجدول التوزيع التكراري.

هذا هو التوزيع التكراري لعدد الأحرف في الكلمة لحلول الكلمات المتقاطعة.

عدد الأحرف في الكلمة	3	5	6	7	9	12	
التكرارات	5	6	5	10	2	2	المجموع **30**



المنوال

هو القيمة الأكثر تكراراً.

المنوال هو القيمة الأكثر انتشاراً,مشتقة من الكلمة الفرنسية (a la moed) تعني الأناقة. والمنوال هو متوسط مساعد

(القيمة النموذجية) عندما يكون هنالك قيمة واحدة أكثر انتشاراً أو اثنين.لكن لم يكن المنوال مفيداً في تلخيص البيانات عندما يكون هنالك أكثر من منوالين.

في المثال أعلاة :

طول الكلمات الأكثر طولاً في لغز الكلمات المتقاطعة هو 7 , لذلك المنوال هو 7 أحرف.

(تأكد تماماً أن تعطي القيمة الأكثر إنتشاراً من المتغيرات وليس التكرارات التي تحدث).

البيانات المتصلة(المستمرة)

تم الحصول علي البيانات التالية من دراسة كانت حول الأطفال الأكثر طولاً من بين 20 لاعب في نادي رياضي . حيث كل طول مقرب لأقرب سينتمتر .

133	136	120	138	133	131	127	141	127	143
130	131	125	144	128	134	135	137	133	129

هذا مثال للبيانات المستمرة الصريحة. والطول معطى لدرجة معينة من الدقة. ومثال لذلك , الطول الموضح ب (144 cm) هو لأقرب سينتمتر .يمكن أن تكون نشأت من أي قيمة في الفترة $144.5 \le$ الطول ≤ 143.5.

البيانات المستمرة لا تأخذ قيماً دقيقة لكن يمكن أن تعطي في فترات محددة ,أو لأقرب دقة من القياس.

<u>أمثلة أخرى للمتغيرات المتصلة</u>

- الوقت المأخوذ بواسطة أطفال أعمارهم 10 سنوات لإكمال لغز معين.
- كتلة كل بطاطا في كيس.
- سرعات السيارات التي عبرت نقطة معينة.

البيانات المتصلة دايماً تنشأ من قياس الكميات

التوزيع التكراري للبيانات المتصلة

لتكوين التوزيع التكراري لأطوال ال20 لاعب , اجمع المعلومات في فئات أو فترات. وهذه طرق مختلفة لكتابة نفس المجموعة للفترات.

طولcm	طولcm	الطول (لأقرب سينتمتر)	الطول (لأقرب سينتمتر)
$119.5 - 124.5$	$149.5 \le h < 124.5$	$120 \le h \le 124$	$120 - 124$
$124.5 - 129.5$	$124.5 \le h < 129.5$	$125 \le h \le 129$	$125 - 129$
$129.5 - 134.5$	$129.5 \le h < 134.5$	$130 \le h \le 134$	$130 - 134$
$134.5 - 139.5$	$134.5 \le h < 139.5$	$135 \le h \le 139$	$135 - 139$
$139.5 - 144.5$	$139.5 \le h < 144.5$	$140 \le h \le 144$	$140 - 144$

القيم .... ,$119.5, 124.5, 129.5$ حدود (فترات) الفئات , الحد الأعلى للفئة الأولى هو الحد الأدنى لحدود
الفئة الثانية وهكذا.

<u>طول الفئة</u>

طول الفئة هو الفرق بين حدود الفئة

طول الفئة = الحد الأعلي – الحد الأدني

لذلك طول الفترة الأولى $(124 - 120)$ هو $124.5 - 119.5 = 5$

<u>ملحوظة</u>: الطول ليس 4 ,لان الحدود هي ليست 120و 124

كل الفترات التى أختيرت في الجدول يكون لها نفس الطول وهو(5).

كما يساعدك عمود العلامات في تجميع الأطوال , أدخل الأعداد في الصف الأول .... , 120 , 136 , 133 ومن ثم الصف الثاني . ومن الأفضل أن تقوم بشطب أي عدد أدخلته من البيانات أعلاه.

هذا هو التوزيع التكراري للبيانات أعلاه.

الطول cm	العلامات	التكرار
$119.5 \le h < 124.5$	/	1
$124.5 \le h < 129.5$	$\cancel{////}$	5
$129.5 \le h < 134.5$	$\cancel{////}$ //	7
$134.5h < 139.5$	////	4
$139.5 \le h < 144.5$	///	3
		الإجمالي 20

من الضروري أن تعرف: أن البيانات التي تعرض فقط في شكل التوزيع التكراري , وأن البيانات الأصلية قد فقدت.
ومثال لذلك أنك لن تعرف قيمة البند الذي أدخل في الفترة الأولى , فقط ,إنما هي في مكان ما في الفترة $119.5 \le h < 124.5$.

مخططات الساق والأوراق

طريقة أخرى لتجميع البيانات في فترات بالإحتفاظ بالبيانات الأصلية لرسم مخطط الساق والأوراق , أيضاً يسمى مخطط الساق.
هذه هي درجات 20 طالب في واجب مدرسى.

84 17 38 45 47 53 76 54 75 32

66 65 55 54 51 44 39 19 54 72

في مخطط الساق والأوراق كل الفترات يجب أن تكون متساوية في العرض , لذلك من المناسب أن تختار الفترات $10-9, 20-29, 30-39, \dots, 80-89$ لهذه البيانات , اجعل الساق يمثل العشرات و الأوراق تمثل الآحاد.

عندما يتم إدخال كل الأرقام يجب أن يكون المخطط كالاتي

رسم تمهيدي

الساق (العشرات)	الأوراق(الأحاد)
1	7
2	
3	8
4	5 7
5	
6	
7	
8	4

الساق	الأوراق	
1	7 9	(1)
2		
3	8 2 9	(3)
4	5 7 4	(3)
5	3 4 5 4 1 4	(6)
6	6 5	(2)
7	6 5 2	(3)
8	4	(1)

- الأن رتب المدخلات في كل صف ترتيباً عددياً من الأصغر بجانب الساق .

ملحوظة: يجب دائماً أن تعطي مفتاح لتوضيح ما يمثله كل من الساق والورقة.

والمخطط النهائي يكون كالأتي

درجات الواجب

المفتاح7|1 تعني 17 درجة

1	7 9
2	2 8 9
3	4 5 7
4	4 5 7
5	1 3 4 4 4 5
6	5 6
7	2 5 6
8	4

مخطط الساق والأوراق يعطي فكرة جيدة بمجرد النظر لشكل التوزيع . ومن السهل أن توجد القيمة الصغرى والكبرى

(17و48) وأن المنوال هو 54.

في مخطط الساق والأوراق:

- يجب أن تأخذ فترات متساوية.
- كتابة المفتاح شئ أساسي .

مثال 1.2

الطول بالمتر, سجلت 20 تجربة فيزيائية كالأتي:

$$1.78 , 1.87 , 1.89, 1.72 , 1.68 , 2.04 , 1.96 , 1.76 , 1.90 , 1.73$$

$$1.78 \text{ و } 1.61 , 1.78 , 1.77 , 1.85 , 1.65 , 1.89 , 1.95 , 2.01 , 1.83$$

i.مثل هذه القيم علي مخطط الساق والأوراق.

ii.أوجد المنوال.

الحل

القيمة الصغري هي 1.61 والقيمة العليا هي 2.01.

تذكر كتابة المفتاح.

الأطوال

المفتاح 3|17 يعني 17.3

16	1 5 8
17	2 3 6 7 8 8 8
18	3 5 7 9 9
19	0 5 6
20	1 4

المنوال هو $1.78m$

مثال 1.3

قيست درجة الحارة العظمي بالدرجة المئوية لأقرب درجة , سجلت كل يوم خلال شهر يونيو في مدينة ما. حيث درجات الحارة كانت كلأتي :

$$19\ \ 23\ \ 19\ \ 19\ \ 20\ \ 12\ \ 19\ \ 22\ \ 22\ \ 16\ \ 18\ \ 16\ \ 19\ \ 20\ \ 17$$

$$13\ \ 14\ \ 12\ \ 15\ \ 17\ \ 16\ \ 17\ \ 19\ \ 22\ \ 22\ \ 20\ \ 19\ \ 19\ \ 20\ \ 20$$

ارسم مخطط الساق والأوراق لتوضيح درجات الحرارة ومن ثم اكتب المنوال.

(i) القيمة الصغري هي 12 والقيمة العليا هي 23.
إذا صنفت البيانات في فترات $29 - 20$, $19 - 10$ هذا يمكن أن يعطيك معلومات قليلة جداً.
لذلك إختار أعداد مناسبة للفترات: دائما بين 10 و 5. بما أنك يجب أن تختار عرضاً متساوياً , يمكن استخدام الفترات
$12 - 13, 14 - 15, 16 - 17, 18 - 19, 20 - 21, 22 - 23.$
في البداية أرسم مخطط تمهيدي ومن ثم رتب المدخلات في الورقة بالترتيب.
درجات الحارة العظمي اليومية

المفتاح : 2 | 1 يعني 12 درجة مئوية

1	**2 2 3**
1	**4 5**
1	**6 6 6 7 7 7**
1	**8 9 9 9 9 9 9 9 9**
2	**0 0 0 0 0**
2	**2 2 2 2 3**

(ii) المنوال هو 19درجة مئوية.

مخطط الساق والأوراق المذدوج:

يستخدم مخطط الساق والأوراق لمقارنة مجموعتين من البيانات لعرضهما معاً في مخطط الساق والأوراق المذدوج.

مثال 1.4
هذة درجات طلاب في امتحان اللغة الفرنسية واللغة الإنجليزية في صف ما.

الفرنسي	57	37	45	55	31	44	23	48	60	54	42	42	34	61	55	36	49	29	55	43
الإنجليزي	84	64	52	58	74	79	41	57	74	60	86	43	71	52	92	79	59	74	65	80

i. ارسم المخطط المذدوج للساق والأوراق.
ii. قارن بين مجموعتي الدرجات.

الحل

(i) درجات الامتحان

	1	
9 3	2	
7 6 4 1		3
9 8 5 4 3 2 2	4	1 3
7 5 5 5 4		5 2 2 7 8 9
1 0		6 0 4 5
	7	1 4 4 4 9 9
	8	0 4 6
	9	2

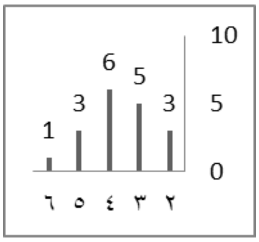
المفتاح 1 | 4 | 2

يعني 41 للإنجليزي , 42 للفرنسي

(ii) الدرجات الصغري هي 23 للفرنسي و 41 للإنجليزي. والدرجات العظمي هي 61 للفرنسي و 92 للإنجليزي.
درجات اللغة الإنجليزية أكثر إنتشاراً(متغيرات أكبر) من درجات اللغة الفرنسية.
المنوال للغة الفرنسية هو 55 و المنوال للغة الإنجليزية هو 74.
من الواضح أن أداء الطلاب في اللغة الإنجليزية أفضل. مع أن ذلك يعتمد علي المعيارات التي تسخدم في القياس في الإمتحانين.

تمرين 1- ب

1. سئل طلاب صف عن عدد أقلام الشمع الملونة قي علبة الأقلام . الرسم البياني بالأعمدة يوضح النتائج.



i. كم كان عدد التلاميذ بالصف.

ii. إذا وضعت كل أقلام الشمع في وعاء كبير , كم كان عددأقلام الشمع.

2. الأوزان لأقرب كجم لمجموعة 30 رجل, موضحة أدناه.

74 52 67 68 71 76 86 81 73 68
64 75 71 61 63 57 67 57 59 72
79 64 70 74 77 79 65 68 76 83

i. أرسم مخطط الساق والأوراق لتوضيح البيانات.

ii. أوجد المنوال.

3. في درس للقياسات, قدَر 30 طالب طول خط مستقيم, وسجلوا توقعاتهم بالسم لأقرب ملمتر وكانت نتائجهم كالأتي .

9.2 7.3 7.0 6.5 5.4 5.3 10.1 8.4 8.8
7.1 7.5 7.9 6.7 9.6 5.5 7.4 7.0 8.2
5.5 7.8 8.2 7.6 6.1 6.1 3.9 6.8 7.6

8.1 8.0 10.0

i. أرسم مخطط الساق والأوراق لتمثيل البيانات.
ii. إذا كان طول الخط المستقيم $7.5\ cm$. فماهي النسبة
iii. المئوية للطلاب الذين كان تقديرهم أعلى من الطول الفعلي .

4. عدد الساعات اليومية لشروق الشمس في مدينة معينة خلال شهر أغسطس موضحة كالأتي

7.0 7.6 12.5 12.9 8.3 9.7 8.4 11.1
7.5 7.5 9.8 10.4 11.6 11.3 7.3 7.8
6.8 6.2 6.1 5.6 5.6 5.8 4.8 4.3
0.0 0.6 0.8 1.6 0.2 2.4 2.6

وضح هذة البيانات بمخطط الساق والأوراق

5. أعلن أن عدد من الكراتين تحتوي علي 2 لتر من الحليب في مختبر ضبط الجودة قيس الحجم ل 20 كرتونة عشوائياً باللتر , لأقرب مليلتر , أعطت النتائج التالية

2.017 2.015 2.019 1.982 2.003 1.986 2.024
2.017 2.001 2.004 1.988 2.033 1.990 2.018
2.011 2.023 2.019 1.022 2.008 1.985

i. أرسم مخطط الساق والأوراق لعرض البيانات.
ii. ماهي النسبة المئوية لعدد الكراتين علي حجم أقل من الحجم المعلن.

6. هذه معدلات النبض ل 30 مدير شركة قبل وبعد إجراء التمرين.

قبل التمرين: $110, 93, 81, 75, 73, 73, 48, 53$
$69, 69, 66, 111, 105, 93, 90, 50, 57, 64, 90, 111$
$91, 70, 70, 51, 79, 93, 105, 51, 66, 93.$

بعدالتمرين: $117, 81, 77, 108, 130, 69, 77, 84,$
$84, 86, 95, 125, 96, 104, 104, 137, 143, 70, 80,$
$131, 145, 106, 130, 109, 137, 75, 104, 75, 97, 80.$

i. ارسم مخطط الساق والأوراق المذدوج لتمثيل البيانات.
ii. قارن معدلات النبض قبل وبعد إجراء التمرين.

7. هذه هي أعمار أساتذة في مدرستين.

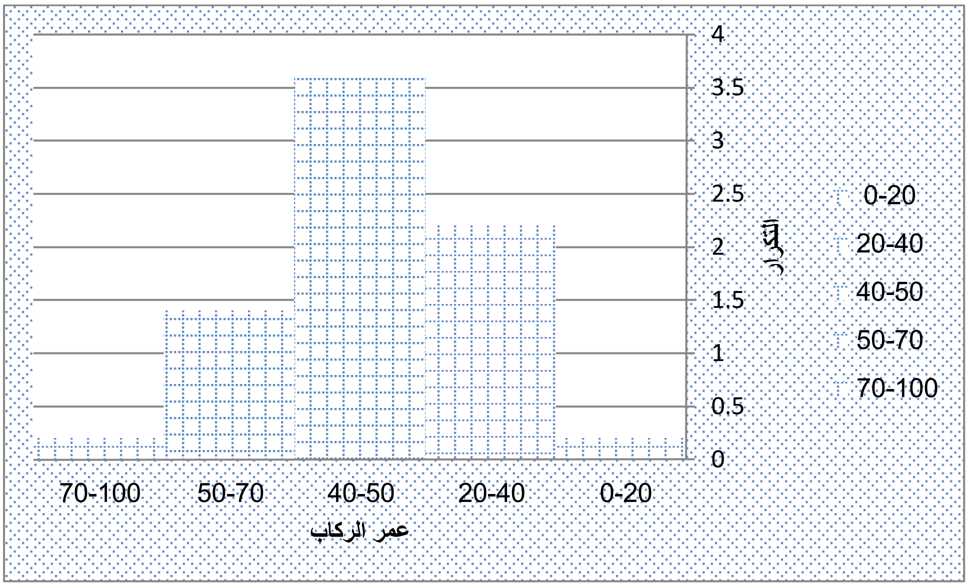
المدرسة A : $51, 45, 33, 37, 37, 27, 28, 54, 54, 61,$
$34, 31, 39, 23, 53, 59, 40, 46, 48, 48, 39, 33, 25,$
$31, 48, 40, 53, 51, 46, 45, 45, 48, 39, 29, 23, 37.$

المدرسة B: $59, 56, 40, 43, 46, 38, 29, 52, 54, 34$
$23, 41, 42, 52, 50, 58, 60, 45, 45, 56, 59, 49, 44$
$36, 38, 25, 56, 36, 42, 47, 50, 54, 59, 47, 58, 57.$

ارسم مخطط الساق والأوراق المذدوج ثم قارن أعمار الأساتذة في المدرستين.

المدرج التكراري

يمكن أن تعرض البيانات المتجمعة في المدرج التكراري , كما في الشكل أدناه:



المدرج التكراري يعرض التوزيع التكراري لأعمار ركاب رحلة جوية من الخرطوم إلي الفاشر .

العمر x سنة	$0\leq x<20$	$20\leq x<40$	$40\leq x<50$	$50\leq x<70$	$70\leq x<100$
التكرار	4	44	36	28	6

يشابه المدرج التكراري الرسم بالأعمدة , لكن هنالك اختلافان:

لايوجد فاصل بين الأعمدة.

تتناسب مساحة العمود مع التكرار الذي يمثلة العمود.

كثيراً ما يكون المدرج التكراري له عرض مختلف في الفئات, لذلك يجب ملاءمة طول العمود مع عرض العمود.

ولذلك إذا ضبط طول العمود ستكون المساحة مساوية للتكرار في الفترات.

المساحة= الطول $\times$ طول الفئة

$$\text{الطول} = \frac{\text{التكرار}}{\text{طول الفترة}}$$

يعرف الطول بكثافة التكرار.

لذلك $$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{التكرار}}{\text{طول الفئة}}$$

استخدام التكرار المعدل :

مساحة العمود = التكرار في الفئة

المساحة الكلية = مجموع التكرارات

في المدرج التكراري , الفترة $40 > x \geq 20$ لها تكرار 44 . الحد الأدني للفئة هو 20 و الحد الأعلي هو 40 , لذلك طول الفئة هو $40-20=20$

$$\text{كثافة التكرار} = \frac{\text{التكرار}}{\text{طول الفئة}} = \frac{44}{20} = 2.2$$

يوضح هذا الجدول التكراري حسابات التكرارات المعدلة.

التكرار المعدل	التكرار	طول الفئة	حدود الفئات: الحد الأعلى	حدود الفئات: الحد الأدنى	العمر
$\frac{4}{20} = 0.2$	4	20	20	0	$0 \le x < 20$
$\frac{44}{20} = 2.2$	44	20	40	20	$20 \le x < 40$
$\frac{36}{10} = 3.6$	36	10	50	40	$40 \le x < 50$
$\frac{28}{20} = 1.4$	28	20	70	50	$50 \le x < 70$
$\frac{6}{30} = 0.2$	6	30	100	70	$70 \le x < 100$

الفئة المنوالية:

ليس من الساهل تعيين المنوال من خلال البيانات المتجمعة. بدلاً من ذلك يمكن أن تعطي الفئة المنوالية.

الفئة المنوالية: هي الفترة التي تقابل أكبر كثافة تكرارية. تمثل في المدرج التكراري بأكبر عمود .
في المدرج التكراري أعلاه , الفئة التي مع أكبر عمود هي $40 \le x < 50$, لذلك فإن الفئة المنوالية تدل علي أن الأشخاص في عمر الأربعينيات تتضمن أكبر مجموعة من الأشخاص .

لأحظ من الجدول الفترة التي لها أكبر كثافه تكرارية (3.6) , لكن ليس لها أكبر تكرار.

مثال 1.5

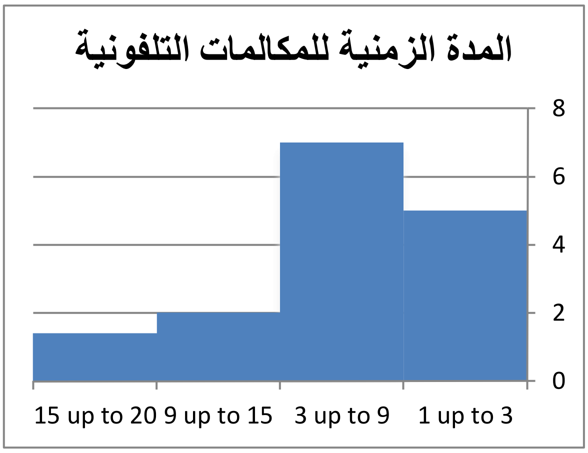
في دراسة حول مدة المكالمات الهاتفية الصادرة من مكتب في يوم معين ,أعطت النتائج التالية

المدة t دقيقة	$1 \le t < 3$	$3 \le t < 9$	$9 \le t < 15$	$15 \le t < 20$
التكرار	10	42	12	7

ارسم المدرج التكراري لتمثيل البيانات.

لكل فترة, اكتب حدود الفترات , ثم أوجد طول الفترة واحسب كثافة الفئة.

كثافة التكرار	التكرار	طول الفئة	حدود الفئات الحد الأعلي	الحد الأدني	المدة (بالدقائق)
$\frac{10}{2} = 5$	10	2	3	1	$1 \leq t < 3$
$\frac{42}{6} = 7$	42	6	9	3	$3 \leq t < 9$
$\frac{12}{6} = 2$	12	6	15	9	$9 \leq t < 15$
$\frac{7}{5} = 1.41$	7	5	20	15	$15 \leq t < 20$



مثال 1.6

سجل جدول التكرارت المجمعة أوزان الرسائل التي سلمت الي مجمع سكني في يوم ما , لأقرب جرام .

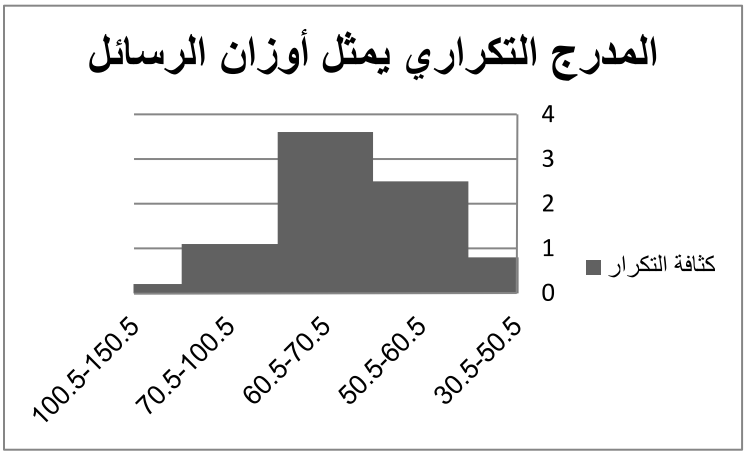
الوزن (بالجرامات)	31-50	51-60	61-70	70-100	1001-150
التكرار	16	25	36	33	10

ارسم المدرج التكراري لتوضيح البيانات.

(هذا مثال لبيانات مجمعة مستمرة حيث أن المجموعات وصفت بإستخدام قيماً مقربة (لأقرب جرام).
يبدو أن هناك فراغات بين المجموعات. لكن عند النظر حدود الفئات سوف يتضح لك أنه لاتوجد فراغات).

حيث سجل الوزن لأقرب جزء من الجرام, لذلك الفترة$50-31$ تمثلة
الفترة $50.5 >$ الوزن ≤ 30.5. الحد الأدني هو 30.5 و الحد الأعلى هو 50.5

كثافة التكرار	التكرار	طول الفئة	حدود الفئات الفعلية الحد الأعلى	 الحد الأدنى	العمر
$\frac{16}{20}=0.8$	16	20	50.5	30.5	31-50
$\frac{25}{10}=2.5$	25	10	60.5	50.5	51-60
$\frac{36}{10}=3.6$	36	10	70.5	60.5	61-70
$\frac{33}{30}=1.1$	33	30	100.5	70.5	71-100
$\frac{10}{50}=0.2$	10	50	150.5	100.5	101-150



(تذكر أن كتابة العنوان)
(تذكر تسمية المحاور).
لاحظ أن:

- المحور الراسي(كثافة التكرار) يجب أن يبدأ من الصفر.
- المحور الأفقي لايحتاج للبدء من الصفر.

تلميح: سوف تجد من الأسهل عند رسم المدرج التكراري إذا وضعت حدود الفئات(.. ... ,30.5,50.5) علي الخطوط السميكة علي ورقة الرسم البياني .
في هذا المثال ,الفترة لدي الأعلى كثافة تكراري (مثلت بأعلى عمود) وهي أيضا الفترة لدي أعلى تكرار.

الفئة المنوالية هي $70 - 61$

تذكر : بما أن الأوزان قيست لأقرب جرام , الفترت يمكن أن تكتب
$150. >$ الوزن $\leq 100, 101 >$ الوزن $\leq 70,71 >$ الوزن $\leq 60, 61 >$ الوزن $\leq 50, 51 >$ الوزن ≤ 31
حيث حدود الفئات لاتزال .. ... $30.5, 50.5, 60.5$

مثال 1.7
قام نادل مطعم في ليلة واحدة بقياس كميات الماء في الزجاجات المتروكة بواسطة الرواد في طاولات المطعم.حيث قيست الحجوم لأقرب ميليتر.

الحجم (لأقرب مل)	0-19	20-39	40-89	90-189
التكرار	10	8	12	20

i. عين حدود الفئات لكل فترة وأحسب الكثافات التكرارية المطلوبة لرسم المدرج التكراري.
ii. عين الفئة المنوالية.

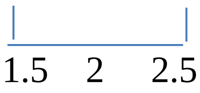
الحل

الفترة $19 - 0$ تمثل $19.5 >$ الحجم ≤ 0 لذلك طول الفئة هو 19.5, في حين أن $39 - 20$ تمثل
$39.5 >$ الحجم ≤ 19.5, لذلك طول الفئة هو 20
حيث أن حدود الفئات ,طول الفترات والكثافات التكرارية موضحة بالجدول أدناه.

الحجم (لأقرب مل)	حدود الفئات الحد الأدنى	حدود الفئات الحد الأعلى	طول الفئة	التكرار	كثافة التكرار
0-19	0	19.5	19.5	10	$\frac{10}{19.5} = 0.51$
20-39	19.5	39.5	20	8	$\frac{8}{20} = 0.4$
40-89	39.5	89.5	50	12	$\frac{12}{50} = 0.24$
90-189	89.5	189.5	100	20	$\frac{20}{100} = 0.2$

الفئة المنوالية هي $19 - 0$

مثلاً



- العدد الصحيح 2 يمثل الفترة من 1.5 الي 2.5.

- المجموعات المجمعة مثل 19 – 10 تمثل بالفترة من 9.5 إلي 19.5.

تأتي الصعوبة عندما يبدأ التجميع للبيانات عند الصفر.
خذ المجموعة 9 – 0 . بالرغم من أنها تبدو غريبة
عندما تكون البيانات غير متصلة , الحد الأدنى يؤخذ
–0.5 و تمثل المجموعة 9 – 0 على المدرج التكراري

مثال 1.8

هذه درجات امتحان الإحصاء لمجموعة 120 طالباً من المستوي المتقدم.

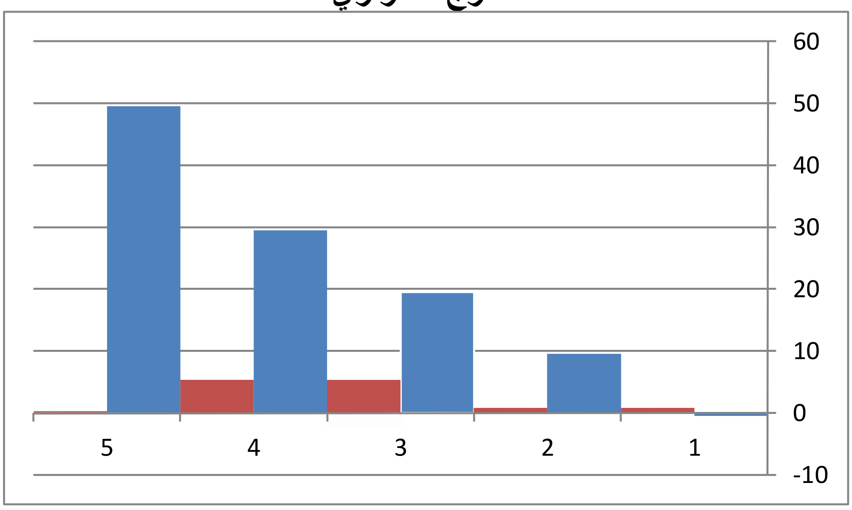
الدرجة	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 49	50 - 79
التكرار	8	21	53	28	10

مثل البيانات بالمدرج التكراري .

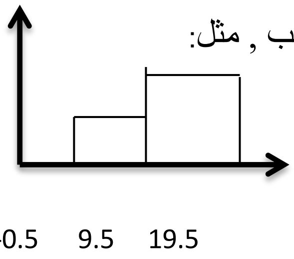
الدرجات منفصلة . يجب أن تكون دقيقاً فى أخذ حدود الفئات.

العمر	**حدود الفئات**		**طول الفئة**	**التكرار**	**كثافة التكرار**
	الحد الأدني	**الحد الأعلي**			
0-9	-0.5	9.5	10	8	$\frac{8}{10} = 0.8$
10-19	9.5	19.5	10	21	$\frac{21}{10} = 2.1$
20-29	19.5	29.5	10	53	$\frac{53}{10} = 5.3$
30-49	29.5	49.5	20	28	$\frac{28}{20} = 1.4$
50-79	49.5	79.5	30	10	$\frac{10}{30} = 0.$

المدرج التكراري



تلميح: لا يتجاوز المحور الراسي نقطة الأصل $(0,0)$, لكن يمكن أن يوضع في مكان مناسب , مثل:



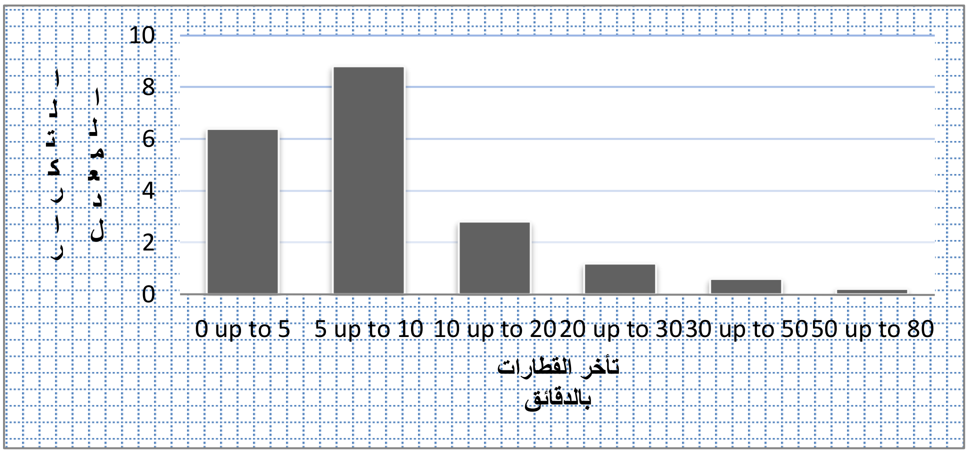
إيجاد التكرارت من المدرج التكراري

يحسب التكرار في فترة معينة بمساحة العمود في تلك الفترة, لذلك تحسب بضرب طول الفئة في كثافة التكرار.

كثافة التكرار $\times$ طول الفئة $=$ التكرار

مثال 1.9

أجري استطلاع حول زمن تأخر القطارات لمجموعة من ركاب في محطة قطار معينة. حيث وضحت النتائج في المدرج التكراري أدناه.



i. ارسم جدول تكراري.

ii. ماهي النسبة المئوية لعدد القطارات التي تتأخر أقل من 20 دقيقة؟

الحل

لإيجاد التكرار في كل فترة , إستخدم العلاقة

كثافة التكرار $\times$ طول الفئة $=$ التكرار

أحسب أطوال الفئات ثم أوجد قيم كثافة التكرار من المدرج التكراري.

التأخير	طول الفئة	التكرار المعدل	التكرار
$0 \le t < 5$	5	6.4	$5 \times 6.4 = 32$
$5 \le t < 10$	5	8.8	$5 \times 8.8 = 44$
$10 \le t < 20$	10	2.8	$10 \times 2.8 = 28$
$20 \le t < 30$	10	1.2	$10 \times 1.2 = 12$
$30 \le t < 50$	20	0.6	$20 \times 0.6 = 12$
$50 \le t < 80$	30	0.2	$30 \times 0.2 = 6$

عدد القطارات في هذة الدراسة هو

$$32 + 44 + 28 + 12 + 12 + 6 = 134$$

النسبة أقل من 20 دقيقة هي $\frac{32+44+28}{134} = 77.6\%$ لثلاثة أرقام معنوية

شكل التوزيع

في مثال 1.9 , بالنظر للمدرج التكراري نجد أن هنالك ذيل طويل علي اليمين .

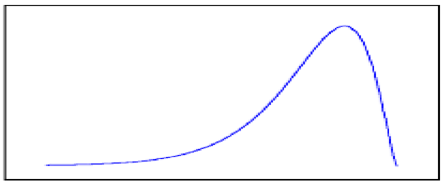
هذا يدل علي أن هناك قليل من القيم الكبري.

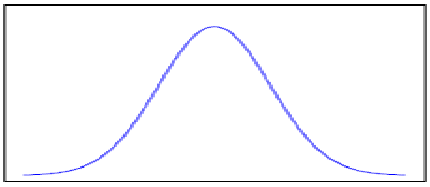
إذا وضعت المنحنى فوق المدرج التكراري, أو مخطط الأعمدة الراسية, من السهل أن تلاحظ

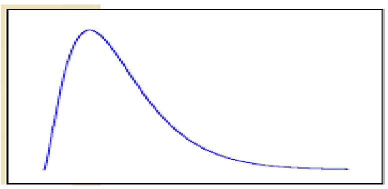
(ملاحظة أفكار الانحراف والإلتواء غير مطلوبة في الإمتحان)

الشكل العام للتوزيع

التواء سالب **متماثل** **التواء موجب**







التوزيع سالب الإلتواء يوجد ذيل طويل لليسار (في الإتجاه السالب)	**التوزيع متماثل حيث يستخدم التوزيع المتماثل في الوحدة السادسة.**	**التوزيع موجب الإلتواء يوجد ذيل طول لليمين (في الإتجاه الموجب)**

تمرين 1-ج

1. قاس باحث الزمن المأخوذ بواسطة 38 متطوع لإنجاز عمل معين . النتائج موضحة في الجدول أدناه.

الزمن (بالثواني)	$5 \le t < 10$	$10 \le t < 20$	$20 \le t < 25$	$25 \le t < 40$	$40 \le t < 45$
التكرار	2	12	7	15	2

i. عين عرض الفترة $20 \le t < 25$.

ii. احسب الكثافة التكرارية لكل فترة.

iii. ارسم المدرج التكراري لتوضح البيانات.

iv. أوجد الفئة المنوالية.

2. سجلت في يوم ما الفترات الزمنية بالدقائق لوقوف كل سيارة في موقف سيارات في مدينة ما كالآتي:

فترة الوقوف (بالدقائق)	$0 < t < 25$	$25 \le t < 60$	$60 \le t < 80$	$80 \le t < 150$	$150 \le t < 300$
التكرار	**62**	**70**	**88**	**280**	**30**

مثل البيانات بالمدرج التكراري ثم أوجد الفئة المنوالية.

3. يوضح الجدول التالي الأوزان, لأقرب كجم ل (200) إمراة.

الوزن kg	40 – 50	51 – 55	56 – 60	61 – 70	71 – 75
التكرار	21	62	55	50	12

i. عين الحدود للفترة $41 - 50$.

ii. عين طول الفترة $61 - 70$.

iii. ارسم المدرج التكراري لتوضيح البيانات.

4. سجل عدد الزوار اليومي لمتحف خلال شهر. وكانت النتائج كما في الجدول.

عدد الزوار	30 – 69	70 – 149	150 – 199	200 – 299
التكرار	*1*	*14*	*10*	*6*

i. عين الحدود للفترة $30 - 69$.

ii. أرسم المدرج التكراري لتوضيح البيانات.

5. هذه عدد مرات ظهور الحرف (e) في كل جملة في مقال يدعي (My Kind of Day)

15 12 8 12 3 10 14 17 5 3 8 11 19
7 16 5 13 12 11 18 6 7 4 17 8 1

i. ارسم جدول تكراري متجمع بالفترات $1 - 2, 3 - 6, 7 - 10, 11 - 14, 15 - 19$.

ii. ارسم المدرج التكراري لتوضيح البيانات

6. يوضح الجدول عدد الرسائل المستلمة في يوم معين للمنازل الخاصة في مجمع سكني.

عدد الرسائل المستلمة x	0 – 1	2 – 4	5 – 10
عدد المنازل f	*12*	*9*	*3*

i. عين الحدود للفترة $0 - 1$.

ii. ارسم المدرج التكراري لتوضيح البيانات.

7. في دراسة حول وزن 50 تفاحة حيث لوحظ الوزن وسجل في الجدول التالي . معطي كل وزن لأقرب جرام

86	101	114	118	87	92	93	116	105	102
97	93	101	111	96	117	100	106	118	101
107	96	101	102	104	92	99	107	98	105
113	100	103	108	92	109	95	100	103	110
113	99	106	116	101	105	86	88	108	92

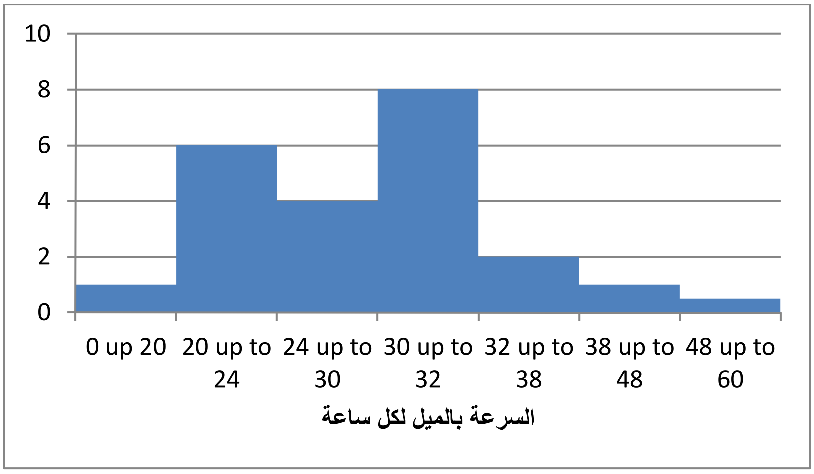
i. ارسم جدول تكراري , استخدم فترات متساوية بطول 5 جرام, مع أخذ الفترتين الأولي والثانية وهكذا $85 - 89, 90 - 94$.

ii. ماهو الحد الأدني للفترة $90 - 94$.

iii. ارسم المدرج التكراري لتوضيح البيانات وثم عين الفئة المنوالية.

iv. ارسم مخطط الساق والأوراق لتفسير البيانات وأوجد المنوال.

8. المدرج التكراري يوضح السرعات بالميل لكل ساعة لسيارات تعبر لوحة في مدينة كامبردج موضحة عليها السرعة 30 ميل/الساعة.



i.انسخ الجدول التكراري الآتي وأكمله.

السرعة mph	$0 < x \leq 20$	$20 \leq x < 24$	$24 \leq x < 30$	$30 \leq x < 32$	$32 \leq x < 38$	$38 \leq x < 48$	$48 \leq x < 60$
التكرار		24					6

ii. كم عدد السيارات التي لوحظت؟

9. سجلت طالبة الفترة الزمنية لكل محاضرة شهدتها لأقرب دقيقة خلال شهر معين, ثم حسبت كثافة الفئة لكل فترة ووضحتها في الجدول أدناه, حيث أن هنالك ثلاث تكرارات من الفترات مفقودة.

مدة المحاضرة (بالدقائق)	$50 - 53$	$54 - 55$	$56 - 59$	$60 - 67$
التكرار	a	b	30	c
كثافة التكرار	5	13	7.5	1.5

i. أكتب الحدود للفترة $50 - 53$ ثم عين طول هذه الفترة.

ii. أوجد قيمة كل من b و a.

iii. كم عدد المحاضرات التي شهدتها الطالبة.

10. قيست الأطوال (لأقرب ملم) لعينة عشوائية من الحصى أخذت من جزء معين من قاع نهر, ووضحت في الجدول التالي:

الطول (mm)	$1 - 10$	$11 - 20$	$21 - 50$	$51 - a$
التكرار	f	$2f$	150	50

i) عين الحدود الفعلية وطول الفترة $1 - 10$.
رسم مدرج تكراري, استخدم مقياس رسم $1\ cm$ لكل وحدة في المحور الرأسي (التكرار المعدل).
المستطيل الذي يمثل الفترة $1 - 10$ له إرتفاع $6\ cm$.

ii) احسب قيمة f.

iii) كم عدد الحصى التي كانت في العينة؟
المستطيل الذي يمثل الفترة $51 - a$ له ارتفاع $1\ cm$.

Iv) أوجد قيمة a.

المتوسطات:

القيمة المتوسطة مفيدة عند وصف مجموعة من البيانات.هذة قيمة نموذجية أو توضيحية وتسمي مقياس النزعة المركزية.

مثال للمتوسطات هو الوسط.

(المنوال صفحة 5 والوسيط صفحة41 هي أيضاً متوسطات)

الوسط الحسابي:

الوسط الحسابي هو المتوسط الأكثر استخداماً. وتحسب بقسمة مجموع كل المشاهدات علي عدد المشاهدات.

اعتبر هذه مجموعة 5 أعداد:

$$0.9, 1.4, 2.8, 3.1, 5.6$$

الوسط الحسابي$=\frac{0.9+1.4+2.8+3.1+5.6}{5} = \frac{13.8}{5} = 2.76$

وعموماً الوسط الحسابي لمجموعة n عدداً x_1, x_n,..............., x_3, x_2 يعطي ب

مثال **1.10**

للحصول علي الدرجة A ,يجب أن يحقق أحمد متوسط حسابي 70 علي الأقل في خمس اختبارات. والمتوسط الحسابي للدرجات له في الربع امتحانات الأولى هو 68.ماهي أدنى درجة يمكن أن يحققها أحمد في الامتحان الخامس للحصول علي الدرجة A؟

في الأربع امتحانات الأولي , المتوسط الحسابي هو 68

$$\frac{x_1+x_2+x_3+.x_4.}{4} = 68$$

لذلك $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 272$

للحصول علي الدرجة A , المتوسط الحسابي ل أحمد في الخمس اختبارات يجب أن يكون علي الأقل 70 , لذلك مجموع كل درجاتة في الخمس امتحانات يجب أن تكون $5 \times 70 = 350$

لكي يكون المجموع الكلي 350

درجته في الاختبار الخامس يجب أن يكون $350 - 272 = 78$

إذاً. للحصول علي الدرجة A أدنى درجة يمكن أن يحققها أحمد في الامتحان الخامس هي 78.

الوسط الحسابي $= \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\ldots\ldots\ldots x_n.}{n}$

مجموعة رموز:

هناك طريقة مختزلة لكتابة $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \boldsymbol{x_4}$ هي $\sum_{i=1}^{4} x_i$ الرمز $\sum$ حرف يوناني كبير ينطق(سيقما)

لذلك ل, $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \boldsymbol{x_n}$ يمكن أ تكتب $\sum_{i=1}^{n} x_i$ يستخدم للدلالة علي الجمع

غالباً ما يرمز للوسط الحسابي ب $\bar{x}$

لذلك $\bar{x} = \frac{\boldsymbol{x_1+x_2+x_3+\cdots\ldots\ldots\ldots x_n.}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\bar{x}$ تقرأ (bar x)

هذا مرهق جداً , لذلك بالنسبة للحرف i في الأغلب يحذف .

في الرمز المختزل , الوسط الحسابي ل n من المشاهدات يعطي بالعلاقة $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

مثال 1.11

سئل مجموعة من الفرق الموسيقية عن عدد الآلات التي يتم العزف عليها. كانت نتائجهم كما يلي:

2	5	2	4	1	1	1	2	1	3	3	2	1	2	1
1	2	4	3	2	1	2	3	1	4	2	3	1	1	2

أحسب الوسط الحسابي لعدد الألات التي عزفت.

$$n = 30 , \qquad \sum x = 2 + 5 + \cdots \ldots \ldots + 1 + 2 = 63$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{63}{30} = 2.1$$

الوسط الحسابي لعدد الآلات التي عزفت هو 2.1

(لاحظ: أن المتوسط الحسابي ليس من الضرورة أن يكون عدد صحيح, عدد زوجي إذا كانت البيانات تحتوي علي أعداد صحيح).

الوسط الحسابي للتوزيع التكراري

البيانات في المثال 1.11 يمكن أن ترتب في جدول توزيع تكراري:

عدد الآلات x	1	2	3	4	5
التكرار f	11	10	5	3	1

المتوسط الحسابي يمكن أن يحسب من التوزيع التكراري كالأتي :

x	f	$x \times f$
1	11	11
2	10	20
3	5	15
4	3	12
5	1	5
	$\sum f = 30$	$\sum xf = 63$

لا تجمع عمود x في جدول التوزيع التكراري.

العدد الكلي للأشخاص

عدد الألات التي عزفت

$$x = \frac{\text{عدد الألات}}{\text{عدد الأشخاص}}$$

$$= \frac{\sum(x \times f)}{\sum f} = \frac{63}{30} = 2.1$$

المتوسط الحسابي للبيانات في التوزيع التكراري يعطي بالعلاقة

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$ لأحظ $\sum xf$ تعني $\sum(x \times f)$

ماذا يحدث عندما تكون البيانات مبوبة؟

عندما يكون لديك التوزيع التكراري للفئات, فان القيم الفعلية للبيانات لن تكون موجودة, لذلك يمكن أن تقدر الوسط الحسابي .

لذلك تحتاج لقيم نموذجية لكل فترة, في هذة الحالة تؤخذ قيم مراكز الفترات أو نقطة المنتصف للفترة.

مركز الفئة $= \frac{1}{2}$ **(الحد الأدنى للفئة الفعلية+الحد الأعلى للفئة الفعلية)**

(قيمة مركز الفئة هو وسط الفئة الفعلية)

مثال 1.12

لوحظ في مدى معين لطريق في قرية ما سرعات 120 مركبة . النتائج موضحة في الجدول .

السرعة x km	$21-25$	$26-30$	$31-35$	$36-45$	$46-60$
التكرار f	22	48	25	16	9

قدر الوسط الحسابي لسرعات هذة المركبات.

استنبط قيمة مركز الفئة للفترة الأولى $21-25$.

الحدالأدنى للفئة الفعلية = 20.5 والحد الأعلى للفئة الفعلية =25.5

لذلك . $\frac{1}{2}(20.5+25.5)=23$= مركز الفئة

الأن أعتبر كل القيم في الفترة الأولي هي 23 واستخدم هذة القيم ل x .

أوجد كل مراكز الفئات ثم أنشئ جدولاً.

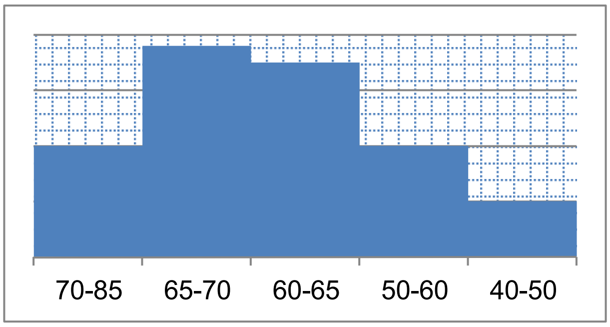
السرعة(km/h)	مركز الفئة x	f	$x\times f$
$21-25$	23	22	506
$26-30$	28	48	1344
$31-35$	33	25	825
$36-45$	40.5	16	648
$46-60$	53	9	477
		$\sum f=120$	$\sum xf=3800$

لا تجمع هذا العمود

$$\bar{x}=\frac{\sum xf}{\sum f}=\frac{3800}{120}=31.7\ \text{km}$$ (3 أرقام معنوية)

مثال 1.13

يوضح الرسم التالي المدرج التكراري توزيع الأوزان لمجموعة 50 طالباً من طلاب السنة الأولى في جامعة معيينة.وكل المستطيلات قد رسمت, لكن مقياس الرسم الرأسي مفقود.



i. أنشئ الجدول التكراري للفئات .

ii. استخدم القيم في الجدول التكراري لإيجاد وتقدير الوسط الحسابي لأوزان هؤلاء الطلاب.

إذا كان الإرتفاع لمربع صغير واحد علي المحور الراسي هو h .

فإن المساحة الكلية للمدرج التكراري وهي

$$10 \times 5h + 10 \times 10h + 5 \times 18h + 5 \times 22h + 15 \times 10h$$
$$50h + 100h + 90h + 110h + 150h$$
$$= 500h$$

المساحة الكلية = التكراري الكلي

التكرار في الفترة الأولي $50 \times 0.1 = 5$

احسب كل التكرارات وأكتبها في الجدول.

التكرارات هي $5, 10,11, 15.$

احسب مركز الفئة لكل فترة.

الوزن(kg)	مركز الفئة x	f	$x \times f$
$40 \leq x < 50$	45	5	225
$50 \leq x < 60$	55	10	550
$60 \leq x < 65$	62.5	9	562.5
$65 \leq x < 70$	67.5	11	742.5
$70 \leq x < 85$	77.5	15	1162.5
		$\sum f = 50$	$\sum xf = 3242.5$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{3242.5}{50} = 64.85kg$$

مثال 1.14

الجدول التالي يوضح نتائج دراسة حول إيجاد متوسط الزمن اليومي , بالساعات الوقت الذي يقضية الأشخاص لمشاهدة التلفزيون؟

الوقت في اليوم ($t\ hours$)	$0 \le t < 1$	$1 \le t < 2$	$2 \le t < 4$	$4 \le t < 8$
عدد الأشخاص	10	18	f	4

تم حساب تقدير الوسط الحسابي للوقت وكان 2 ساعة.

كوُن معادلة تشتمل علي f ومن ثم أوجد عدد الأشخاص في هذه الدراسة.

الحل

أوجد قيم مراكز الفترات

حيث مراكز الفئات هي $0.5, 1.5, 3, 6$

قدر العدد الكلي للساعات

$$(0.5 \times 10) + (1.5 \times 18) + (3 \times \mathrm{f}) + (6 \times 4)$$
$$= 56 + 3\mathrm{f}$$

العدد الكلي للأشخاص هو

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{عدد الساعات الكلي}}{\text{عدد الأشخاص}} = \frac{56+3\mathrm{f}}{32+3\mathrm{f}}$$

معطي الوسط 2

$$\frac{56+3\mathrm{f}}{32+3\mathrm{f}} = 2$$

$$56 + 3\mathrm{f} = 2(32 + \mathrm{f})$$
$$56 + 3\mathrm{f} = 64 + 2\mathrm{f}$$
$$\mathrm{f} = 8$$

إذاً عدد الأشخاص في هذة الدراسة يساوي $32 + 8 = 40$

استخدام الالة الحاسبة في النظام الإحصائي:

لإيجاد الوسط الحسابي يمكنك استخدام الألة الحاسبة في الوضع الحسابي لحساب المجموع ثم القسمة.ومع ذلك تجد طريقة أسهل بكثير لإيجاد الوسط الحسابي مباشرةً باستخدام النظام الإحصائي علي الألة الحاسبة .

هذا ملخص موضح بالأسفل , لكن قد تحتاج مراجعة كتيب الأَلة للتفاصيل.

ضع الآَلة في النظام الإحصائي ,أحياناً تكتب SD أو STAT.

أمسح السجلات الإحصائية (المحفوظات)

أدخل البيانات. يمكن لك أن تدخل إما قيم فردية, أو قيم من التوزيع التكراري.

يجب بعد ذلك الدخول الي ما يلي:

مجموع القيم $(\sum x)$, عدد القيم (n) , الوسط الحسابي $(\bar{x})$

إذا أدخلت بيانات من الجدول التكراري,

$\sum f$ تعطي (n) و $\sum xf$ تعطي $\sum x$.

تدرب باستخدام البيانات في الأمثلة 1.11,1.12 و 1.13 لكي تكون ماهراً في استخدام الآلة الحاسبة.

تمارين 1-د

1. أوجد الوسط الحسابي لكل مجموعة من هذه الأعداد بدون استخدام النظام الإحصائي علي الآلة الحاسبة. ثم تحقق مستخدماً النظام الإحصائي.

i. $5, 6, 6, 8, 8, 9, 11, 13, 14, 17$

ii. $148, 153, 156, 157, 160$

iii. $44, 47, 48, 51, 52, 54, 55, 56$

iv. $1769, 1771, 1772, 1775, 1778, 1781, 1784$

v. $0.85, 0.88, 0.89, 0.93, 0.94, 0.96$

x	1	2	3	4	5	6	7
f	4	5	8	10	17	5	1

x	27	28	29	30	31	32
f	30	43	51	49	42	35

2. جد الوسط الحسابي للبيانات الممثلة في مخطط الساق والأوراق أدناه.

```
1 | 2 8
2 | 1 4 4
3 | 0 0 2 3 5 5 5
4 | 2 3 6 7
5 | 3 6 9
```

3. سجل التوزيع العمري لسكان قرية صغيرة في الجدول .

العمر	عدد اللأشخاص
$0 \le x < 15$	54
$15 \le x < 30$	78
$30 \le x < 50$	120
$50 \le x < 70$	88
$70 \le x < 100$	60

قدر الوسط الحسابي للعمر.

4. اجري فحص عادي علي عدد الكتب في قسم الرفوف في مكتبة.

عدد الكتب علي الرف	عدد اللأرفف
$31 - 35$	4
$36 - 40$	6
$41 - 45$	10
$46 - 50$	13
$51 - 55$	5
$56 - 60$	2

i. عين مركز الفئة للفترة الأولي.

ii. قدر الوسط الحسابي لعدد الكتب في الرف.

5. سجلت أطوال 250 شجرة بتولا في غابة لأقرب متر. حيث لخصت الأطوال في الجدول التكراري .

الطول m	$5-9$	$10-12$	$13-15$	$16-18$	$19-28$
التكرار	30	43	51	49	42

أوجد الوسط الحسابي لطول أشجار البتولا في الغابة.

6. في مكتب مزدحم, لوحظت الفترة الزمنية التي يرن فيها التلفون قبل الرد لمجموعة 105مكالمة. حيث سجل الوقت بالثواني ,لأقرب ثانية. ولخصت الناتئج في الجدول التالي.

الوقت (لأقرب ثانية)	عدد المكالمات
$10-19$	20
$20-24$	20
$25-29$	15
$30-31$	14
$32-34$	16
$35-39$	10
$40-59$	10

i. قد رالوسط الحسابي للوقت قبل الرد علي مكالمة التلفون.

ii. عين الفئة المنوالية؟

7. يوضح التوزيع التكراري الدرجات التي حققت في إختبار بواسطة 100طالب ؟

درجة اللإختبار	$30-39$	$40-49$	$50-59$	$60-69$	$70-79$	$80-99$
التكرار	10	14	26	20	18	12

قدر الوسط الحسابي للدرجات.

8. الوسط الحسابي لهذا التوزيع التكراري هو 3.66

x	1	2	3	4	5	6
f	3	9	a	11	8	7

أوجد a

9. الأطوال, بالمتر لحدائق المنازل في شارع معين موضحة في الجدول التالي.

الطول m	$10 \le x < 16$	$16 \le x < 20$	$20 \le x < 40$	$40 \le x < 50$
التكرار	4	12	f	8

تقدير الوسط الحسابي هو 27.7m .

i. أوجد f.

ii. كم عدد المنازل في هذا الشارع.

10. يحتوي كيس علي خمس كرات تحمل كل واحدة رقم مختلف من الأرقام: $1, 2, 3, 4, 5$. سحبت كرة من الكيس
وسجل رقمها, ثم أرجعت الي الكيس مرة ثانية.كررت هذة العملية 50 مرة علي الكل والجدول أدناه يوضح نتائج التوزيع التكراري.

العدد	1	2	3	4	5
التكرار	x	11	y	8	9

الوسط الحسابي لهذا التوزيع التكراري هو 2.7 . أوجد x و y.

11. الوسط الحسابي لمجوعة عشرة أعداد هو 8. عندما تشمل العدد الحادي عشر ,يكون الوسط الحسابي 9.

ماهي قيمة العدد الحادي عشر؟

12. الوسط الحسابي لقائمة 8 أعداد هو 15. عندما يضاف عددين x ,2x للقائمة , يكون الوسط الحسابي 13.2. أوجد x.

13. الوسط الحسابي لمجموعة أربعة أعداد يكون 5, والوسط الحسابي لمجموعة ثلاثة أعداد مختلفة يكون 12

ماهو الوسط الحسابي للأعداد السبعة؟

14. الوسط الحسابي ل n عدد هو 5 , إذا أضيف العدد 13 لمجموعة ال n عدداً, يكون الوسط الحسابي الجديد 6. أوجد n.

تغيرية البيانات :

انظرإلى هذه المجموعات الثلاث من الأعداد , ولكل منها الوسط الحسابي (**7**):

$(a)\ 7, 7, 7, 7, 7$	$(b)\ 4,6, 6.5, 7.2, 11.3$	$(c) - 193, -46,28,69,177$

بالرغم أن الأوساط الحسابية متساوية,لكن الإنتشار لكل مجموعة مختلف . حيث لايوجد تباين في المجموعة (a), لكن

الأعداد في المجموعة (c) أكثر انتشارا من تلك القيم في المجموعة (b).

هنالك طرق متنوعة لقياس التباين أو الانتشار للتوزيع. اثنين من هذه , المدي والانحراف المعياري , موضحة في هذا القسم .

المدي:

يستند المدي كلياً علي القيم القصوي للتوزيع ويعطي نظرة سريعة للإنتشار الكلي للبيانات.

المدي = أكبر قيمة – أصغر قيمة.

في مجموعات الأعداد أعلاه:

المجموعة (a) لها مدي $7 - 7 = 0$

المجموعة (b) لها مدي $11.3 - 4 = 7.3$

المجموعة (c) لها مدي $177 - (-193) = 370$

الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري هو مقياس مفيد جداً للإنتشار ومهم للغاية في عمل لاحق .وهو يعطي مدى انتشار البيانات عن وسطها الحسابي $\bar{x}$ للتوزيع. ويحسب باستخدام كل القيم في التوزيع كالآتي:

أحسب بعد كل قيمة x عن وسطها الحسابي من خلال إيجاد$(x - \bar{x})$. هذا هو الانحراف من الوسط الحسابي .

الأن ربع الناتج لإعطاء $(x - \bar{x})^2$.

أوجد مجموع هذه المربعات , وتكتب $\sum(x - \bar{x})^2$. لأحظ أن$(x - \bar{x})$ يمكن أن تكون

ثم أقسم علي عدد القيم n , لتعطي **التباين** $\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$.

موجبة أو سالبة .تعتمد علي موقع x أعلي الوسط أو أسفل . $(x-\bar{x})^2 \geq 0$

أخيراً أوجد الجذر التربيعي الموجب لايجاد الانحراف المعياري.

حيث $\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$ = الانحراف المعياري

(تذكر أن الانحراف المعياري لا يمكن أن يكون سالب)

الانحراف المعياري لمجوعة n من الأعداد وسطها الحسابي $\bar{x}$ يعطي ب

$$s.d = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$$

هذه الانحرافات المعيارية لثلاث مجموعات من الأعداد. حيث $\bar{x} = 7$ لكل مجموعة:

المجموعة (a) $7, 7, 7, 7, 7$

بما أن $(x-\bar{x}) = 7 - 7 = 0$ لكل قيمة ,حيث لايوجد إنحراف من الوسط الحسابي .

فإن $s.d=0$.

المجموعة (b) $4, 6, 6.5, 7.2, 11.3$

$$\sum(x-\overline{x})^2 = (4-7)^2 + (6-7)^2 + (6.5-7)^2 + (7.2-7)^2 + (11.3-7)^2 = 28.78$$

$$s.d. = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{28.78}{5}} = 2.4(1\ d.p.)$$

المجموعة (c) $-193, -46, 28, 69, 177$

$$\sum(x-\bar{x})^2 = (-193-7)^2 + (-46-7)^2 + (28-7)^2 + (69-7)^2 + (177-7)^2 = 75994$$

$$s.d. = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{75994}{5}} = 123.3(1\ d.p.)$$

المجموعة (c) لها أكثر انحراف معياري من المجموعة (b), يؤكد ذلك أنها أكثر انتشاراً نحو الوسط الحسابي مقارنة مع (b) .

الانحراف العياري مفيد جداً لمقارنة التوزيعات : الأقل انحرافاً هو الأقل تباين والبيانات تكون أكثر تقارب من بعضها البعض.

التعريف المعدل للانحراف المعياري (المعطى أعلاه) يمكن أن يكون صعب الاستخدام , خصوصاً عندما تكون $\bar{x}$ ليس عدد صحيح, لذلك الأفضل أن تستخدم شكل بديل يشار إليه التعريف الحسابي.

حيث $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ $\qquad$ $s.d. = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$

مثال 1.15

إذا كان الوسط الحسابي للأعداد $2, 3, 5, 6, 8$ هو 4.8 . أحسب الانحراف المعياري

الطريق الأولى : صيغة التعريف

x	$x-4.8$	$(x-\bar{x})^2$
2	-2.8	7.84
3	-1.8	3.24
5	0.2	0.04
6	1.2	1.44
8	3.2	10.24
		$\sum(x-\bar{x})^2=22.8$

$$s.d.=\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{22.8}{5}}=2.14(3\ s.f.)$$

الطريقة الثانية:صيغة الحسابات

x	x^2
2	4
3	9
5	25
6	36
8	64
	$\sum x^2=138$

$$s.d.==\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{138}{5}-4.8^2}=2.14$$

التباين

هو مربع الانحراف المعياري, حيث إن $\text{التباين}=\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum x^2}{n}-\bar{x}^2$

$$\text{التباين}=(\text{إنحراف المعياري})^2$$

$$\text{الإنحراف المعياري}=\sqrt{\text{التباين}}$$

استنباط صيغة الحساب للإنحراف المعياري :

ملحوظة. من الجدير بالذكر أن تلاحظ أن صيغة الحساب للانحراف المعياري مستنبطة من صيغة التعريف. هذا الإشتقاق ليس مطلوب في الامتحان.

إبدأ بالتباين

$$\text{التباين}=\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum(x^2-2x\bar{x}+\bar{x}^2)=\frac{1}{n}(\sum x^2-2\bar{x}\sum x+\sum \bar{x}^2)$$

$$=\frac{\sum x^2}{n}-2\bar{x}\frac{\sum x}{n}+\frac{n\bar{x}^2}{n}=\frac{\sum x^2}{n}-\bar{x}^2-2\bar{x}(x)+\bar{x}^2)=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\bar{x}^2}$$

الانحراف المعياري للتوزيع التكراري

عندما تكون البيانات في توزيع تكراري , تكون معادلة الانحراف المعياري كالآتي:

الصيغة الحسابية **صيغة التعريف**

$$s.d. = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \bar{x}^2} \qquad s.d. = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}} \quad \text{حيث} \quad \bar{x} = \frac{\sum xf}{f}$$

مثال 1.16

يوضح التوزيع التالي عدد الأطفال في *20* عائلة , والوسط الحسابي للأطفال في العائلةهو *2.9* أحسب .

i. المدي. *ii.* الانحراف المعياري.

عدد الأطفال في العائلة x	1	2	3	4	5
عدد العائلات , f	3	4	8	2	3

(*i*) المدي = أكبر قيمة – أصغر قيمة

$$= 5 - 1 = 4$$

(ii) استخدم صيغة الحساب

لا تربع f

x	x^2	f	$x^2 \times f$
1	1	3	3
2	4	4	16
3	9	8	72
4	16	2	32
5	25	3	75
		$\sum f$	$\sum x^2 f = 198$

لا تجمع عمود x أو عمود x^2

عندما تكون البيانات مبوبة , قدر الانحراف المعياري باستخدام منتصف الفترات لقيم x.

مثال 1.17

أجري اختبار علي الإنترنت بواسطة *155* طالباً , وسجل الوقت الذي يقضيه الطالب في كل سؤال بواسطة الكمبيوتر ,

يوضح الجدول التالي الوقت المأخوذ بالدقائق, علي السؤال الأخير.

الوقت(بالدقائق)	$1 \le x < 2$	$2 \le x < 3$	$3 \le x < 5$	$5 \le x < 10$
التكرار	**16**	**32**	**42**	**25**

احسب تقديرات الوسط الحسابي والانحراف المعياري للوقت المستهلك علي السؤال الأخير.

الوقت (الدقائق)	**مركز الفئة** x	f	$x \times f$	$x^2 \times \mathbf{f}$
$1 \le x < 2$	1.5	16	24	36
$2 \le x < 3$	2.5	32	80	200
$3 \le x < 5$	4	42	168	672
$5 \le x < 10$	7.5	25	187.5	1406.25
		$=115\sum f$	$\sum xf = 459.5$	$\sum x^2 f = 2314.25$

$\bar{x} = \dfrac{\sum xf}{f} = 3.995\ldots\ldots = 4.00$ دقيقة (3 أرقام معنوية)

$s.d. = \sqrt{\dfrac{\sum x^2 f}{\sum f} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{2314.25}{115} - (3.995\ldots)^2} = 2.039\ldots\ldots = 2.04$ دقيقة (3 أرقام معنوية)

استخدام الألة الحاسبة لأيجاد الانحراف المعياري

يمكن حساب الانحراف المعياري لمجموعة بيانات مباشرة باستخدام الآلة في الوضع الإحصائي.

حيث تدخل الأعداد بنفس الطريقة عند حساب الوسط الحسابي. (لأحظ الرمز σ_{n-1} يعطي تقدير غير متحيز)

ثم يجب أن تضغط علي الإنحراف المعياري الذي غالباً ما يرمز إلية ب(σ_n).

يمكن أيضاً أن تحصل($\sum x^2$). تذكر عند إدخال البيانات من الجدول التكراري هذا يعطي $\sum x^2 f$.
تدرب علي إستخدام البيانات في الأمثلة *1.15, 1.16, 1.17*

نصيحة أثناء أداء الامتحان

إذا استخدمت الدلالات الإحصائية في الامتحان وكتبت فقط الإجابة , سوف تحصل علي علامة كاملة إذا كانت الإجابة صحيحة . ولا تأخذ علامات إذا كانت خاطئة.لذلك يفضل أن تعمل الحسابات مرتين للتأكد.
أيضاً أنظر الي مقدار الإجابة وقرر إذا كانت معقولة أم لا.

يمكنك استخدام الدلالات الإحصائية لكن أكتب المجاميع من الآلة ووضح تعويضهم في المعادلة.

إذا لم تستخدم الدلالات الإحصائية , وضح الجدول بالمجاميع وعوض هذه القيم في المعادلة المناسبة.

مايلي يعطي علي ورقة الصيغ الرياضية في الامتحان:

للبيانات الغير منظمة الإنحراف العياري = $\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{\sum n} - \bar{x}^2}$

$\bar{x} = \sum \frac{x}{n}$ استخدم الصيغة الحسابية

للبيانات في الجدول التكراري

$\bar{x} = \frac{\Sigma xf}{f}$ الإنحراف المعياري $= \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2 f}{\Sigma f}} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f} - \bar{x}^2}$

تمارين 1- ه

1. لا تستخدم الدلّالات الإحصائية في الآلة الحاسبة في الجزء الأول (i) في هذا السؤال .

(i) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل مجموعة من مجموعات الأعداد التالية:

$(a)\ 2, 4, 5, 6, 8$ $(b) 6, 8, 9, 11$

$(c) 11, 14, 17, 23, 29$ $(d) 5, 13, 7, 9, 16, 15$

$(e) 4.6, 2.7, 3.1, 0.5, 6.2$ $(f)\ 200, 203, 206, 207, 209$

(ii) تحقق من اجباتك بإستخدام النظام الإحصائي.

2. يوضح مخطط الساق والأوراق الوقت الذي استغرقه *10* أشخاص في سباق جرى.

الساق	الأوراق
12	8
13	4 6 6 8
14	7 9
15	0 7
16	4

أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه الأوقات.

3. أجري هذا السؤال بدون استخدام الدلالات الإحصائية في الآلة, ثم تأكد من إجابتك باستخدام النظام الإحصائي.

x	10	11	12	13
f	3	7	11	2

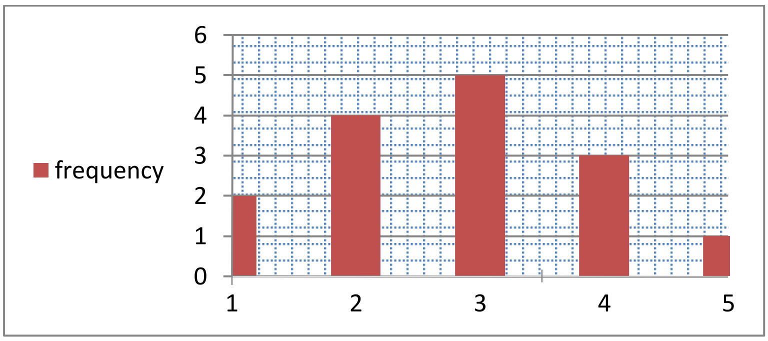
أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

4. سجلت النتائج لكل جولة في لعبة القولف لكل عضو من مجموعة *50* عضو , ولخصت النتائج في الجدول التكراري التالي.

النتيجة x	66	67	68	69	70	71	72	73
التكرار f	2	5	10	12	9	6	4	2

أحسب الوسط الحسابي للنتائج والانحراف المعياري.

5. يوضح الشكل أدناه مخطط الأعمدة الراسية لمجموعة بيانات.



أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للبيانات.

6. يلعب مجموعة 20شخص لعبة . والجدول التالي يوضح نتائجهم.

النتيجة	1	2	4	x
التكرار	2	5	7	6

إذا كان الوسط الحسابي 5.

i. أوجد x.

ii. أحسب الانحراف المعياري.

7. تلعب الآنسة مريم لعبة علي الكمبيوتر , حيث أنها تطلق النار علي الهدف. وتكون نتيجتها (1) إذا أصابت الهدف

وتكون (0) إذا لم تصب الهدف.

أصابت الهدف 18مرة خلال 30 محاولة.

i. أوجد الوسط الحسابي لنتائجها في **(30)** محاولة.

ii. أوجد التباين لنتائجها في **(30)** محاولة.

8. مساحات الأراضي$x\ m^2$ لمجموعة 105 منزل في تنمية الإسكان كانت كالآتي.

مساحة الأرض$(x\ m^2)$	$50 \le x < 150$	$150 \le x < 200$	$200 \le x < 250$	$250 \le x < 350$	$350 \le x < 500$
التكرار	20	29	36	15	5

أحسب تقديرات كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمساحات الأراضي.

9. يوضح الجدول التالي نتائج **(60)** مرشحاً لاختبار الذكاء.

النتيجة	100 – 106	107 – 113	114 – 120	121 – 127	128 – 134
التكرار	8	13	24	11	4

أحسب تقديرات كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري .

10. أجريت دراسة لتحديد عدد التلاميذ في مختلف مجموعات الأعمار الذين يحضرون الحضانات, والمدارس والكليات في منطقة معينة. حيث اختصرت النتائج في الجدول التالي:

العمر , x سنة	$3 \le x < 5$	$5 \le x < 7$	$7 \le x < 11$	$11 \le x < 16$	$16 \le x < 18$
التكرار	8	13	24	11	4

أحسب تقديرات كل من الوسط الحسابي للعمر والانحراف المعياري .

11. سجل أمين مكتبة مدرسة عدد الكتب المستعارة من المكتبة بواسطة مجموعة تلاميذ في مرحلة معينة خلال شهر.

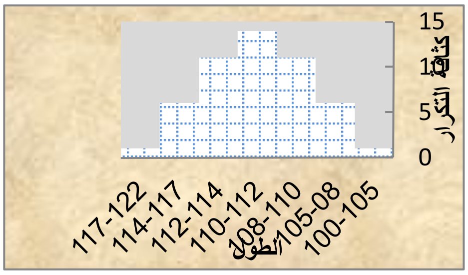
لخصت النتائج في الجدول أدناه.

عدد الكتب	0 – 2	3 – 5	6 – 10	11 – 15
عدد التلاميذ	21	54	22	13

i.عين الحدود الفعلية للفئات للمجموعة الأولي.

ii.أحسب تقديرات كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

12. في مرصد للطيور, قبض علي مجموعة من نقشارة الصفصاف المهاجرة, حيث قيس طولها ووضعت حلقات في أرجلها قبل أن يطلق صراحها. المدرج التكراري يوضح الأطوال بالملمتر لطيور نقشارة الصفصاف التي قبض عليها خلال موسم هجرة واحد.



أنقل الجدول التكراري ثم أكمله.

الطول mm	$100 \leq x < 105$	$105 \leq x < 108$	$108 \leq x < 110$	$110 \leq x < 112$	$112 \leq x < 114$	$114 \leq x < 117$	$117 \leq x < 122$
التكرار						18	

i. بين بإيجاز كيف يمكن أن تستنتج من المدرج التكراري (بدون الحساب) أن تقدير الوسط الحسابي هو 111 ملم
ثم وضح أن هذه القيمة قد لا تكون القيمة الحقيقية للوسط الحسابي لطول نقشارة الصفصاف التي قبضت.
ii. قدر الإنحراف المعياري للأطوال.

13. أكمل واحد وثلاثون طالباً لعبة تركيب المربعات في الأزمان التالية (بالدقائق x).

11 53 72 48 48 49 39 87 73 23 120 24 61 36 66 67
86 79 65 47 36 133 78 81 70 75 53 42 42 72 144

i. احسب الوسط الحسابي.
ii. احسب الانحراف المعياري.$s.d.$
القاعدة التالية يمكن استخدامها لتحديد القيم المرتفعة أو المنخفضة بشكل غير عادي, و تسمي بالقيم المتطرفة.
القيمة المتطرفة أصغر من $\bar{x} - 2 \times (s.d.)$ أو أكبر من $\bar{x} + 2 \times (s.d.)$.
iii. استخدم هذه القاعدة لتعيين أي قيم متطرفة.

الدمج بين البيانات:

عندما لا تعطي البيانات الحقيقية لكن عوضاً عنها أعطي المجاميع مثل $\sum x$ و $\sum x^2$,سوف تحتاج أن تعوضهم في معادلات الوسط الحسابي والانحراف المعياري . وهذه مفيدة خصوصاً عند دمج البيانات.

مثال 1.18

الأعمار , x سنوات ل *18* شخص حضروا صف مسائي ولخصوا في هذه المجاميع

$$\sum x = 745 \quad و \quad \sum x^2 = 33951$$

i. أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأعمار هؤلاء الأشخاص.
ii. أحد الأشخاص ترك المجموعة والوسط الحسابي لعمر ال **(17)** شخصاً المتبقين كان بالضبط *41* سنة. أوجد عمر الشخص الذي ترك المجموعة والانحراف المعياري لأعمار ال **(17)** شخصاً المتبقين.

i)

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{745}{18} = 41.388\ldots = 41.4\ years\ (3\ s.f.)$$

$$s.d. = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{33951}{18} - (41.38\ldots)^2} = 13.157\ldots.. = \ 13.2\ myears\ (3\ s.f.)$$

ل **(17)** شخصاً

الوسط الحسابي =**41** لذلك فإن $\sum x = 745$, وأن عمر الشخص الذي ترك المجموعة هو $48 = 697 - 745$

المجموع الجديد ل $\sum x^2 = 33951 - 48^2 = 31647$

والانحراف المعياري هو:

$$= \sqrt{\frac{31647}{17} - (41)^2} = 13.43\ldots.years(3\ s.f.)$$

عموماً , لمجموعتين من البيانات xوy.

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\sum x + \sum y}{n_1 + n_2}$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\sum x^2 + \sum y^2}{n_1 + n_2} - (\text{الوسط الحسابي})^2}$$

مثال 1.19

يوضح الجدول التالي الوسط الحسابي والإنحراف المعياري لأطوال *20* ولداً , و *30*بنتاً.

	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
الأولاد	$160\ cm$	$4\ cm$
البنات	$155\ cm$	$3.5\ cm$

أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة ال **(50)** شخصاً .

الأولاد:

$\bar{x} = 160$, $n_1 = 20$ لذلك $\sum x = 160 \times 20 = 3200$

معطي الانحراف المعياري 4 , حيث $s.d = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{20} - 160^2} = 4$

بتربيع الطرفين : $\frac{\sum x^2}{20} - 160^2 = 4^2$

$$\sum x^2 = 20(4^2 + 160^2) = 512320$$

البنات:

$\bar{y} = 160$, $n_2 = 30$ لذلك $\sum y = 155 \times 30 = 4650$

معطي الانحراف المعياري 3.5 , حريث $s.d=\sqrt{\frac{\sum y^2}{n}-\bar{y}^2}$

$$\sum y^2 = 30(3.5^2+155^2)=721117.5$$

لكل ال ($\mathbf{50}$) شخصاً :

$$\text{الوسط الحسابي الجديد}=\frac{\sum x+\sum y}{n_1+n_2}=\frac{3200+4650}{50}=157$$

$$\text{الانحراف المعياري الجديد}=\sqrt{\frac{\sum x^2+\sum y^2}{n_1+n_2}-(\text{الوسط الحسابي})^2}$$

$$\sqrt{\frac{512320+721117.5}{50}-(157)^2}=4.444..$$

$$=4.44\ (\text{ثلاثة معنوية})$$

تحويل البيانات علي الآلة الحاسبة

مثال 1.20

رتبت حلويات في أكياس, حيث. كان الوزن الشكلي عليها 75 جرام. سحبت 10 أكياس عشوائياً من خط الانتاج وقيس وزنها. وكانت أوزانهم , بالجرام كلأتي:

76.0, 74.2, 75.1, 73.7, 72.0, 74.3, 75.4, 74.0, 73.1, 72.8

i. استخدم الآلة الحاسبة لتجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

ii. أكتشف مؤخراً أن الميزان كان يقرأ 3 جرام تحت الوزن الصحيح.

(***a***)ما هو الوسط الحسابي الصحيح لأوزان ال (**10**) أكياس.

(***b***)ما هو الانحراف المعياري الصحيح لأوزان ال (**10**) أكياس.

i. باستخدام الألة الحاسبة يجب أن توجد ذلك

الوسط الحسابي = 74.06 جرام والانحراف المعياري (ثلاثة معنوية) 1.17 = ... 1.66.

ii. القراءات الصحيحية هي :

79.2, 77.4, 78.3, 76.9, 75.2, 77.5, 78.6, 77.2, 76.3, 76.0

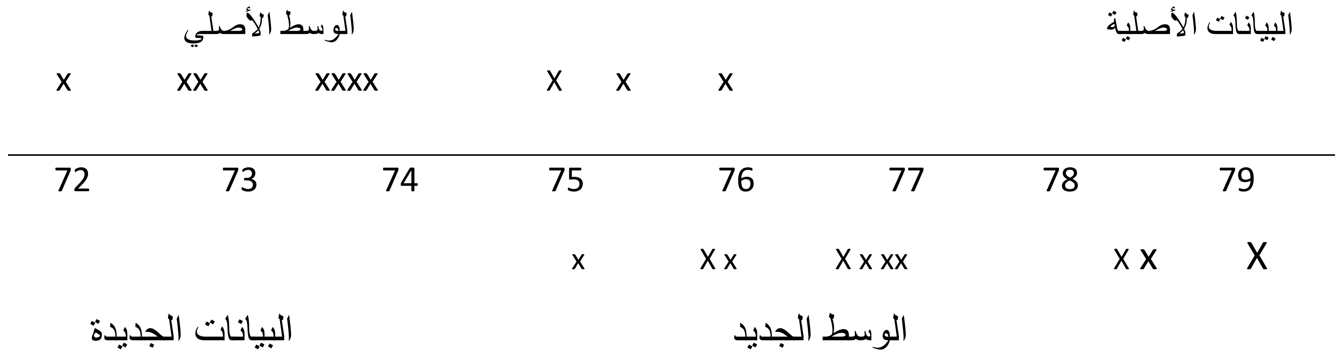
(a) الوسط الحسابي الصحيح = 77.26 جرام

(b) الانحراف المعياري الصحيح هو = 1.17 = ... 1.66

لاحظ ؛عندما يزيد الوزن ب 3.2 جرام,

- يزيد الوسط الحسابي ب 3.2جرام.
- الوسط الحسابي لم يتغير .

عندما تعرض مجموعتين من البيانات في نفس الخط البياني , من السهل أن نرى لماذا أن الانحراف المعياري لم يتغير بانتشار البيانات الأصلية عن وسطها الأصلي؟ ,كما لم يتغير بإنتشار البيانات الجديدة عن وسطها الجديد؟



عموماً ،إذا زادت كل قيمة من قيم البيانات بمقدار ثابت هو (a) فإن:

- الوسط الحسابي يزيد بمقدار a.
- الانحراف المعياري لم يتأثر.

هذا مفيد بشكل خاص عند الحصول علي الوسط الحسابي والانحراف المعياري

استخدم $\sum(x-a)^2$ و $\sum(x-a)$, عندما a يكون عدد ثابت.

إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري باستخدام $\sum(x-a)^2$ و $\sum(x-a)$

لإيجاد الوسط الحسابي $\bar{x}$

- أوجد الوسط الحسابي ل $(x-a)$
- الآن أضف a

لإيجاد الانحراف المعياري

- أوجد الانحراف المعياري ل $(x-a)$
- هذا هو نفس الانحراف المعياري ل x

مثال 1.21

لوحظ الوقت المستغرق , x دقيقة , بواسطة فاطمة للقيام بحل لغز الأرقام في صحيفة معينة خلال 20 فترة. ولخصت النتائج أدناه.

$$\sum(x-30)^2 = 562 \qquad \sum(x-50) = -50$$

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للوقت المستغرق بواسطة فاطمة لحل لغز الأرقام .

الحل:

الوسط الحسابي

أولاً: أوجد الوسط الحسابي ل $(x-30)$

$$\frac{\sum(x-a)}{20} = \frac{-50}{20} = -2.5$$

الآن أضف 30 لتجد الوسط الحسابي ل x

لذلك $\bar{x} = -2.5 + 30 = 27.5$

الوسط الحسابي للوقت المستغرق لاكمال لغز الأرقام هو 27.5 دقيقة.

<u>الانحراف المعياري:</u>

أولاً: أوجد $s.d.$ ل $(x-30)$

$$(x-30) \text{ ل } s.d. = \sqrt{\frac{\sum(x-30)^2}{20} - (-2.5)^2}$$

الوسط الحسابي ل $(x-30)$

$$= \sqrt{\frac{562}{20} - 6.25} = 4.674\ldots$$

هذا هو نفس الانحراف المعياري ل(x)
لذلك فإن الانحراف المعياري ل x هو ..4.674
والانحراف المعياري لحل لغز الأرقام هو 4.67 دقيقة (لثلاثة أرقام معنوية).

ملاحظة:
تعطيك قيمة $\sum(x-a)$ المعلومات التالية عن الوسط الحسابي

- عندما تكون $\sum(x-a) < 0$, يكون الوسط الحسابي أصغر من قيمة a (كما في المثال أعلاه) .
- عندما تكون $\sum(x-a) = 0$, يكون الوسط الحسابي هو a.
- عندما تكون $\sum(x-a) > 0$, يكون الوسط الحسابي أكبر من قيمة a .

استخدام الصيغ
يمكن أن تستخدم هذة الصيغ :

$$s.d. = \sqrt{\frac{\sum(x-a)^2}{n} - \left(\frac{\sum(x-a)}{n}\right)^2} \qquad \bar{x} = \frac{\sum(x-a)}{n} + a$$

الوسط الحسابي ل $(x-a)$ الوسط الحسابي ل $(x-a)$

بينما لا يعطي هذا التوضيح في الامتحان , لذلك ينصح تذكر هذة الطريقة , بدلاً من الوقوع في مخاطر الاقتباس .

مثال 1.22
أعطي ملخصاً ل **(24)** مشاهدة المعلومات التالية :

$$\sum(x-a)^2 = 2115 \qquad \text{و} \qquad \sum(x-a) = -73.2$$

الوسط الحسابي لهذه القيم ل x هو 8.95 .

i. أحسب قيمة الثابت a .
ii. أوجد الانحراف المعياري لهذه القيم .

((كامبردج (الورقة 6, Q1 N07)))

الحل

(i) $\quad n = 24$

لذلك الوسط الحسابي ل x هو الوسط الحسابي ل $(x-a)+a$

لذلك $\quad 8.95 = \frac{\sum(x-a)}{24} + a$

$$8.95 = \frac{-73.2}{24} = a$$

$$8.95 = -3.05 + a$$

$$a = 8.95 + 3.05 = 12$$

(ii) الانحراف المعياري ل$(x-a)$ هو $\sqrt{\frac{\sum(x-a)^2}{24}-(-3.05)^2}$

$$= \sqrt{\frac{2115}{24} - 3.05^2} = 8.8782 \ldots$$

الانحراف المعياري ل x = الانحراف المعياري ل $(x-a)$

$= 8.88$ (لثلاثة أرقام معنوية)

مثال 1.23

قاس ديلبي السرعات , $x \ \ km/h$ علي طريق لمجموعة 70 سيارة حيث الحد الأقصي للسرعة هو $60km/h$.

ولخص نتائجه ب $\sum(x-60) = 245$.

$i.$ أحسب الوسط الحسابي لسرعات هذه السيارات.

استخدم صديقه إسكيم قيماً ل $(x-50)$ لحساب الوسط الحسابي.

أوجد $\sum(x-50)$.

إذا كان الانحراف المعياري للسرعات هو $1.06\ km/h$. أحسب $\sum(x-50)^2$.

الحل

(i) $\bar{x}$= الوسط ل $(x-60)+60$

بما أن $\sum(x-a) > 0$ فإن الوسط أكبر من 60

$$= \frac{\sum(x-60)}{70} + 60$$

$$= \frac{245}{70} + 60$$

$$= 3.5 + 60 = 63.5$$

(ii) $\bar{x}$ = الوسيط ل $(x-50)+50$

لذلك فإن $\frac{\sum(x-50)}{70} + 50 = 63.5$

$$\sum(x-50) = 13.5 \times 70 = 945$$

(iii) $s.d.$ ل x = $s.d.$ ل $(x-50)$

لذلك $\sqrt{\frac{\sum(x-50)^2}{70} - (13.5)^2} = 10.6$

$$= \frac{\sum(x-50)^2}{70} - (13.5)^2 10.6^2$$

$$\frac{\sum(x-50)^2}{70} = 10.6^2 + 13.5^2 = 294.61$$

لذلك $\sum(x-50)^2 = 294.61 \times 70 = 20622.7$

تمارين 1- و

للإجابة علي هذه الأسئلة يجب أن تكون علي معرفة تامة بصيغ الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

1 . أعلن أن كراتين من عصير البرتقال تحتوي علي(1 لتر) .أخذت عينة عشوائية ل(**100**)كرتونة أعطت النتائج التالية

$\sum x = 101.4$ و $\sum x^2 = 102.83$

أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لحجم عصير البرتقال في ال *100* كرتونة

2. لمجموعة 10 أعداد, $\sum x^2 = 8469$ و $\sum x = 290$

أوجد *(i)* الوسط الحسابي *(ii)* الانحراف المعياري

(iv) التباين.

3. لمجموعة معينة من البيانات ,

$n = 100, \sum x = 584 , \sum x^2 = 23781.$

أوجد

i. الوسط الحسابي $\bar{x}$.

أوجد

ii. التباين.

4. لمجموعة *9* أعداد $\sum(x-\bar{x})^2$=234 . أوجد للأعداد

الانحراف المعياري لهذة الأعداد.

5. لمجموعة 12 عدد , معطي

العددين , b و a لمجموعة الأربعة أعداد,

$\sum(x-\bar{x})^2$=60 , حيث أن $\bar{x}$ الوسط الحسابي .

أيضاً معطي $\sum x^2 = 285$

أوجد $\bar{x}$.

6. من المعلومات حول كل من المجموعات أوجد القيم المفقودة في الجدول التالي:

	n	$\sum x$	$\sum x^2$	$\bar{x}$	*s.d.*
	63	*7623*	*924800*		
i		*152.6*		*10.9*	*1.7*
ii	*52*		*57300*	*33*	
v	*18*			*57*	*4*

7. تقطع ماكينة أطوال من الخشب . حيث أعطت عينة من *20*قضيب النتائج التالية

$\sum xf = 997 \quad \sum x^2 = 49711$.

8. لمجموعة معينة من المشاهدات,

$\sum f = 20, \sum x^2 f = 16143, \sum xf = 563$

أحسب الانحراف المعياري.

9. الوسط الحسابي للأعداد $3,6,7,a,14$ هو 8 .

الانحراف المعياري لمجموعة البيانات.

10. أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري الأربعة. $2, \ 3, \ 6, \ 9$

عندما يضاف سوف يزداد الوسط الحسابي بمقدار 1 , كما يزدا التباين بمقدار 2.5 . أوجد قيم b و a .

11. الأعداد $a,b,8,5,7$ الوسط الحسابي لها هو 6, والتباين هو 2. أحسب قيم b و a , إذا كان $a < b$.

12. تم أخذ الاختبار من قبل 30 طالب . نتائجهم x ,
الوسط الحسابي لها 60 والانحراف المعياري 20.

i. أوجد $\sum x$ ثم وضح أن $\sum x^2 = 120000$.

أجري 20 طالباً آخرين الاختبار . ونتائجهم كانت y,

$50)^2 = 238.4$

حيث $\sum y = 1400$ و $\sum y^2 = 100000$

ii. وضح أن الوسط الحسابي للمجموعتين معاً (50 طالباً)
أكياس
هو 64.
الوزن

iii. أحسب الانحراف المعياري لمجموعة ال(50 طالباً).

85.1

13. تم رصد عدد من الأخطاء في كل 200صفحة من نسخة مطبوعة علي الآلة الكاتبة . حيث تم تلخيص النتائج
أضغر
علي النحو التالي :
.$50kg$

$\sum x = 920 \quad \sum x^2 = 5032$

i. أحسب الوسط الحسابي و الانحراف المعياري
كيس.
لعدد الأخطاء في الصفحة.
رصدت 50صفحة أخري ووجد أن الوسط
التالية:
الحسابي لهذه الصفحات 4.4 خطأ. كما أن
الانحراف المعياري لها 2.2 خطأ.
.$\sum(x-\bar{x})$
أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري
لعدد الأخطاء في كل صفحة لمجموعة ال(250)
صفحة.

14. راقب مدير معرض سيارات , عدد السيارات المباعة
خلال فترتين متتاليتين لمجموعة خمس أيام.

$20) \quad (iii)\sum(x-27)$

خلال فترة الخمس أيام الأولي , عدد السيارات المباعة
لليوم كان وسطها الحسابي 1.8 وانحرافها المعياري 0.6.

$20)^2$

خلال فترة الخمس أيام التالية , عدد السيارات المباعة لليوم

15. لمجموعة معينة من البيانات ,

$n = 100, \sum(x-50) = 123.5$

$\sum(x -$

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري ل x

16. صرحت شركة مصنعة أن وزن الملح المعبأ في

$25kg$ لكل واحد . فحص وزن 80 كيس وكان

$x\ kg$, لكل كيس . لخصت النتائج كالأتي :

$\sum(x-25) = 27.2\ ,\ \sum(x-25)^2 =$

i) دون إجراء أي حسابات , وضح ما إذا كان الوسط الحسابي للوزن لمجموعة الثمانيين كيس

من $50kg$, أو يساوي $50kg$ أو أكبر من

ii) أحسب الوسط الحسابي للوزن.

iii) أوجد الانحراف المعياري لأوزان الثمانين

17. أعطي ملخص لمجموعة 15 مشاهدة المعلومات

$\sum(x-2.5) = 200$

أوجد I) الوسط الحسابي. ii)

18. معلوم لمجموعة 100 مشاهدة لبيانات x ,
الوسط الحسابي $\bar{x} = 25$.
أوجد

$(i)\sum x \quad (ii)\ \sum(x-$.

معطي أيضاً الانحراف المعياري لx هو 3 , أوجد

$(iv)\sum x^2 \quad (v)\sum(x-$

$(vi)\sum(x-27)^2$

كان وسطها الحسابي 2.8 وانحرافها المعياري 0.81.
أوجد الوسط الحسابي والإنحراف المعياري لأعداد السيارات المباعة لليوم خلال فترة العشر أيام.

الوسيط والمدي بين إرباعي

حتي الأن درست مقياسين للتوسط : هما المنوال والوسط الحسابي , ومقياسين للتغيرية هما المدى والانحراف المعياري.
عندما تحتوي بيانات المجموعة علي قيم قصوى , تعرف بالقيم المتطرفة , والوسيط هو أكثر متوسط مفيد والمدى بين إرباعي
هو أكثر مقياس مفيد للانتشار.

الوسيط :

الوسيط هو المتوسط الذي لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
لمجموعة n من الأعداد مرتبة ترتيباً تصاعدياً:
عندما تكون n عدد فردي , يكون الوسيط هو العدد الأوسط.
عندما تكون n عدد زوجي , يكون الوسط الحسابي للعددين الأوسطين .
وهذا يلخص بالقول أن الوسيط هو القيمة $\frac{1}{2}(n+1)^{th}$.

مثال

عندما يكون هنالك 7 أعداد يكون الوسيط
هو العدد الرابع في المجموعة.

$(i)\ n = 7$ 2 3 8 [**9**] 10 14 23

الوسيط

عندما يكون عدد الأعداد 6 ,يكون الوسيط
القيمة ال 3.5 في المجموعة.

$(ii)\ n = 6$ 145 152 160 164 173 185

الوسيط

مثال 1.24

أوجد الوسيط لكل من مجموعة الأعداد التالية:

$(i)\ 7, 7, 2, 3, 4, 2, 7, 9, 31$
$(ii)\ 36, 41, 27, 32, 29, 39, 39, 43$

الحل

(i) هنالك 9 قيم ,أكتبهم في ترتيب تصاعدي
الوسيط هو القيمة ال $\frac{1}{2}(9+1)^{th}$. تعني القيمة الخامسة

$2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad [7] \quad 7 \quad 7 \quad 9 \quad 31$

(لاحظ أن الوسيط لأ يتأثربالقيمةالقصوي(المتطرفة) 31).

االقيمة الخامسة

الوسيط =7

(ii) هناك 8 قيم , أكتبهم في ترتيب تصاعدي
الوسيط هو القيمة ال $\frac{1}{2}(8+1)^{th}$. تعني القيمة ال4.5.
لذلك أوجد الوسط الحسابي للقيمة الرابعة والقيمة الخامسة.

$27 \quad 29 \quad 32 \quad [36 \quad 39] \quad 39 \quad 41 \quad 43$

$$\text{الوسيط}=\frac{36+39}{2}=37.5$$

الإرباعيات

الإرباعي الأدني والأعلي لا يتأثرون بالقيم المتطرفة ,هم قيم بحيث أنهما مع الوسيط معاً يقسمان التوزيع لأربع أجزاء متساوية.

الإرباعي الأدني   الوسيط   الإرباعي الأعلي

لمجموعة مكونة من *15* عدد , كان الوسيط *15*.

$$23 \quad 25 \quad 25 \quad 27 \quad 29 \quad 30 \quad 32 \quad (\mathbf{35}) \quad 36 \quad 38 \quad 40 \quad 42 \quad 43 \quad 45 \quad 47$$

الوسيط

(لحساب الإرباعي الأعلي خذ فقط القيم قبل الوسيط ثم أوجد وسيط هذه القيم).
(لحساب الإرباعي الأدني خذ فقط القيم قبل الوسيط ثم أوجد وسيط هذه القيم) .

$$23 \quad 25 \quad 25 \quad (\mathbf{27}) \quad 29 \quad 30 \quad 32 \qquad (\mathbf{35}) \qquad 36 \quad 38 \quad 40 \quad (\mathbf{42}) \quad 43 \quad 45 \quad 47$$

الإرباعي الأدني   الوسيط   الإرباعي الأعلي

عرض الوسيط والإرياعيات في مخطط واحد كالآتي:

$$23 \quad 25 \quad 25 \quad (\mathbf{27}) \quad 29 \quad 30 \quad 32 \quad (\mathbf{35}) \quad 36 \quad 38 \quad 40 \quad (\mathbf{42}) \quad 43 \quad 45 \quad 47$$

الإرباعي الأدني   الوسيط   الإرباعي الأعلي

ترميز :

غالباً ما يرمز للإرباعي الأدني بQ_1 , الوسيط ب Q_2 والإرباعي الأعلي بQ_3 .

للبيانات المرتبة

- الإرباعي الأدني Q_1, هو الوسيط لكل القيم الواقعة قبل الوسيط .
- الإرباعي الأعلي Q_3, هو الوسيط لكل القيم الواقعة بعد الوسيط.

المدي بين أرباعي :

الفرق بين الإرباعيات يعطي **المدي بين إرباعي** . ويعطيك أيضاً 50% من البيانات الوسطية .وهو بالتحديد مقياس انتشار مفيد جداً عندما يكون هنالك قيم قصوي ,كما هو لم يتأثر بقيمة واحدة أو قيمتين.

الإرباعي الأدني – الإرباعي الأعلي =المدي بين إرباعي

$= Q_3 - Q_1$ (لا تنسي الطرح)

مثل الوسيط , أحياناً الإرباعيات قيم من قيم البيانات الحقيقية , وأحياناً لا . والحالات الممكنة موضحة في الأمثلة التالية :

$(i)\ n = 11$

3 3 (5) 6 8 (9) 12 14 (19) 20 24

Q_2 Q_3

Q_1

$(ii)\ n = 6$

20 (23) 23 26 (27) 28

Q_1 Q_2 Q_3

$(iii)\ n = 8$

147 150 154 158 159 162 164 165

Q_1 Q_2 Q_3

$(iv)\ n = 9$

10 12 13 15 (19) 19 24 26 26

Q_1 Q_2 Q_3

أحياناً تستخدم القاعدة التالية لأيجاد الإرباعيات:

$Q_3 = \frac{3}{4}(n+1)^{th}$

$Q_1 = \frac{1}{4}(n+1)^{th}$

هذا يتفق مع الطريق الموضحة أعلاه عندما تكون n عدد فردي , لكنها تؤدي الى تضارب عندما تكون n زوجي

و لتجنب المشاكل, فمن الأفضل إدراج كل البيانات, ثم أوجد الوسيط المناسب كما في المثال أعلاه.

مثال 1.25

في تجربة رمي المسطرة وقياس المسافة التي قطعتها قبل أن يمسك بها الطالب أو الطالبة لمعرفة رد الفعل بين العين واليد, اجرى مجموعة من الطلاب والطالبات هذة التجربة , وضحت النتائج ل 21 طالبة و 27 طالب في مخطط الساق والأوراق المذدوج التالي

المفتاح:

8 | 6 | 2

(6.8 cm المسافة للطالبات و 6.2 cm المسافة للطلاب)

الطالبات		الطلاب
	4	8 9
	5	0 5 9
8	6	2 4
5 5 3 2 2	7	1 4 5
7 8	8	0 2 5 7 8 9
9 9 8 4 1 1	9	3 3 6
9 6 3	10	0 0 5 7 8
7 5 3	11	2 3
4	12	7

أوجدالوسيط والمدي بين إرباعي لمجموعتي البيانات , ثم أضف تعليقاً علي إجابتك

<u>**الطلاب**</u>

هنالك 27 طالباً , لذلك الوسيط يكون $\frac{1}{2}(27+1)^{th}$ أي القيمة الرابعة عشر.

أبدأ بالعد من أعلي $(4.8, 4.9, 5.0, 5.5, 5.9, 6.2, \ldots\ldots)$ لذلك الوسيط هو $8.7\ cm$

4	8 9
5	0 5 9
6	2 (4)
7	1 4 5
8	0 2 5 (7) 8 9
9	3 3 6
10	0 (0) 5 7 8
11	2 3
12	7

(لمعرفة الإرباعي الأدني ,انظر فقط للقيم قبل الوسيط , ثم أوجد الوسيط لهذه القيم . هنالك 13 قيمة قبل الوسيط , لذلك فإن الإرباعي الأدني Q_1 هو القيمة السابعة)

ويساوي: 6.4 cm

لمعرفة الإرباعي الأعلي ,انظر فقط للقيم بعد الوسيط , ثم أوجد الوسيط لهذه القيم .

هنالك 13 قيمة بعد الوسيط , لذلك فإن الإرباعي الأعلى Q_3 هو القيمة السابعة بعد الوسيط ويساوي $10.0\ cm$.

<u>**الطالبات**</u>

هنالك 21 طالبة , لذلك القيمة $\mathbf{11^{th}} = $ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(21+1)^{th} =$ الوسيط

ابدأ بالعد من أعلي $(6.8, 7.2, 7.2, 7.3, \ldots\ldots)$ الي القيمة الحادية عشر.

الطالبات **الوسيط** $= \mathbf{9.4\ cm}$

		4
		5
(1)	8	6
(5)	5 5 3 2 2	7
(2)	7 6	8
(6)	9 9 8 4 1 1	9
(3)	9 6 3	10
(3)	7 5 3	11
(1)	4	12

يكون تحديد الإرابعيات بتحديد الوسيط للبيانات قبل وبعد الوسيط.
هنالك 10قيم قبل الوسيط , لذلك Q_1 هو القيمة الخامسة والنصف (الوسط الحسابي ل
القيمة الخامسة والسادسة).وهما الأثنين نفس الشئ , لذلك $Q_1 = 7.5\ cm$.
حيث أن هنالك 10 قيم قبل الوسيط هما

$6.8, 7.2, 7.2, 7.3, (\mathbf{7.5, 7.5}), 8.6, 8.7, 9.1, 9.1$

بالمثل , Q_3 هو القيمة الخامسة والنصف بعد الوسيط , كما وضح أعلاه . هو الوسط
الحسابي للقيمتين الخامسة والسادسة , لذلك $Q_3 = \frac{1}{2}(10.6 + 10.9) = 10.75\ cm$

حيث أن هنالك 10 قيم قبل الوسيط هما

$9.8, 9.9, 9.9, 10.3, (\mathbf{10.6, 10.9}), 11.3, 11.5, 11.7, 12.4$

المدي بين إرباعي= $10.75 - 7.5 = 3.25cm$

خلاصة

	المسافة (cm)	
	الطلاب	**الطالبات**
الوسيط	8.7	9.4
المدي بين إرباعي	3.6	3.25

المسافة التي قطعتها المسطرة كانت في المتوسط هي الأبعد بالنسبة للبنات, مما يدل علي أن البنات أبطأ في التفاعل .
مع ذلك ,فإن المدي بين إرباعي الأكبر للطلاب يدل علي أن نتائجهم أكثر تغيراً(نتائج الطالبات أكثرملائمة).

التكرار المتجمع الصاعد

التكرار المتجمع الصاعد هو مجموع التكرارت الى قيمة معينة . التكرارالمتجمع الصاعد بالأخص مفيد عند تحديد الوسيط والإرباعيات.

التكرار المتجمع الصاعد- للبيانات الغير مبوبة

أجريت دراسة لتحديد عدد المحاولات المطلوبة لمرشحين لاجتياز امتحان القيادة. وكانت النتائج ل 99 مرشحاً في مركز امتحان معين موضحة في الجدول التكراري الآتي:

عدد المحاولات	1	2	3	4	5	6	
التكرار	32	42	13	6	4	2	**المجموع 99**

لتحديد الوسيط والإرباعيات يمكن أن تكتب المشاهدات في ترتيب تصاعدي

$1, 1, 1, \ldots, 1, 2, 2, \ldots, 2, 3, \ldots, 6, 6.$

بما أن هذا قد يكون مرهقاً جداً. فمن الأسهل أن تنشئ جدولاً تكراياً وتستخدمه في تحديد الوسيط والإرباعيات.

جدول التكرار المتجمع الصاعد

عدد المحاولات	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≤ 5	≤ 6
التكرار المتجمع الصاعد	32	74	87	93	97	**99**

32+42   32+42+13   هذا مجموع

المرشحين أو 13+74

الوسيط

هنالك 99 مشاهدة , لذلك فإن الوسيط هو القيمة ال $\frac{1}{2}(21+1)^{\text{th}}$, أي كما وضحت قبل القيمة الخمسين.
ومن الجدول نجد أن 32 منتخب يحتاجون 1 محاولة, 74 منتخب يحتاجون 2 محاولة أو أقل , لذلك فإن الوسيط للمحاولات هو 2 .

الإرباعيات

بما أن هناك 49 قيمة قبل الوسيط , يكون الإرباعي الأدني هو المشاهدة ال $25^{th} = \frac{1}{2}(21+1)^{th}$
لذلك فإن الإرباعي الأدني Q_1 هو 1 .
أيضاً كما أن هنالك 49 قيمة بعد الوسيط , فإن الإرباعي الأدني هو القيمة الخامسة والعشرون بعد الوسيط , كما وضحت قبل المشاهدة الخامسة والسبعون , لذلك فإن الإرباعي الأعلي Q_3 هو 3.

المدي بين إرباعي $= Q_3 - Q_1$

$= 3 - 1 = 2$

تمارين 1g

1. هذه درجات اختبار لمجموعة 11 طالباً .

$$52, 61, 78, 49, 47, 79, 54, 58, 62, 73, 72$$

أوجد

i. الوسيط.
ii. الإرباعي الأدني .
iii. الإرباعي الأعلي .
iv. المدي بين إرباعي .

2. لكل مجموعة من مجموعة الأعداد التالية, أوجد

i. الوسيط .
ii. المدي بين إرباعي.

(a) $4, 6, 18, 25, 9, 16, 22, 5, 20, 4, 8, 15, 9, 13, 10$
(b) $192, 217, 189, 210, 214, 204$
(c) $1267, 1896, 895, 3457, 2164, 2347, 2347, 2045$
(d) $0.7, 0.4, 0.65, 0.78, 0.45, 0.32, 1.9, 0.0078, 0.54, 1.32$
(e) $0.3, -1.5, -3.5, -3.05, 1.4, -2.6, -0.02$

3. يوضح الجدول التالي النتائج التي سجلت عند رمي حجر نرد 60 مرة.

النتيجة	1	2	3	4	5	6
التكرار	12	9	8	13	9	9

أوجد

i. الوسيط للنتائج .
ii. الإرباعي الأدني والإرباعي الأعلي .
iii. المدي بين إرباعي .

4. أوجد الوسيط والمدي بين إرباعي للتوزيع الممثل بمخطط الساق والأوراق التالي:

المفتاح 2 | 5 تعني 5.2

(i)

الساق	**الأوراق**	
1	0 5	(2)
2	3 4 4	(3)
3	2 8 8	(3)
4	1 5 6 6 7	(5)
5	2 3 3	(3)
6	5 7 8 8	(4)
7	2 4	(2)
8	0	(1)

(ii)

الساق	الأوراق
12	3 4 3 9
13	2 2 3 4 7 8 8 9 9
14	0 3 4 4 7
15	1 2

.5

x	5	6	7	8	9	10
f	6	11	15	18	6	5

للتوزيع التكراري أعلاه , أوجد

(i) المنوال .
(ii) الوسيط.
(iii) الوسط الحسابي.

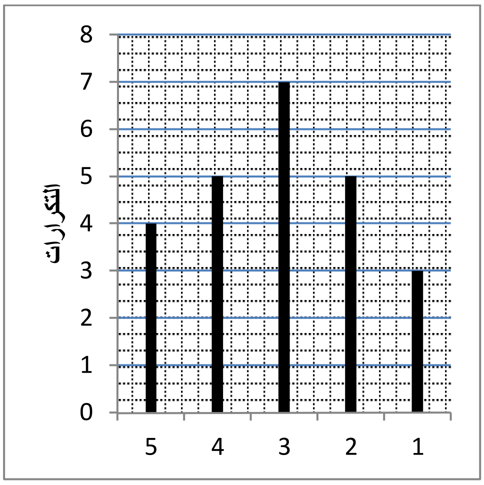
.6

x	12	13	14	15	16
f	3	9	11	15	17

للتوزيع التكراري أعلاه , أوجد

i. المدي.
ii. المدي بين إرباعي.
iii. الانحراف المعياري.

7. يوضح الرسم بالخطوط الرأسية عدد الأهداف المسجلة بواسطة (جيميما) في 24مباراة في الموسم الماضي.



(i) أوجد الوسيط لعدد الأهداف.
(ii) أوجد المدي بين الإرباعي .

8. في استطلاع حول عدد مرات الغياب بالنسبة ل 32 تلميذاً في صف . حيث سجلت البيانات في جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:

عدد مرات الغياب	0	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≤ 5	≤ 6	≤ 7
التكرار	5	11	20	23	27	28	31	32

(i) أوجد الوسيط لعدد التلاميذ الغائبين.
(ii) المدي بين إرباعي .
(iii) أنسخ وأكمل هذا الجدول التكراري.

عدد مرات الغياب	0	1	2	3	4	5	6	7
التكرار								

(iv) أحسب الوسط الحسابي لعدد الغائبين لكل تلميذ.
(v) أحسب الانحراف المعياري.

9. يوضح مخطط الساق والأوراق أدناه البيانات التي جمعت لعدد الزيارات لتصفح الانترنت في كل يوم من شهر مارس لعام 2007. حيث أن هنالك قيمة مفقودة, رمز لها ب x.

المفتاح $1 \mid 5$ تعني 15 زيارة

0	0 1 5 6	(4)
1	1 3 5 6 6 8	(6)
2	1 1 2 3 4 4 4 8 9	(9)
3	1 2 2 2 x 8 9	(7)
4	2 5 6 7 9	(5)

(i) أوجد الوسيط والإرباعي الأدني لعدد الزيارات كل يوم.
(ii) إذا كان المدي بين إرباعي يساوي 19. أوجد قيمة x.

التكرار المتجمع الصاعد- للبيانات المبوبة

عندما تبوب البيانات , تحسب التكرارات المتجمعة الصاعدة إلى كل قيمة فعلية للفئات , كما في المثال التالي:

يوضح الجدول التكراري الأطوال لنبات الفول بعد ستة أسابيع من غرسه.

الطول x cm	$3 \leq x < 6$	$6 \leq x < 9$	$9 \leq x < 12$	$12 \leq x < 15$	$15 \leq x < 18$	$18 \leq x < 21$	
التكرار المتجمع	**1**	**2**	**11**	**10**	**5**	**1**	المجموع **30**

الحدود الفعلية العليا للفئات هي 21 و $6, 9, 12, 15, 18$

الحد الفعلي الأدنى للفترة الأولى هو 3 .وفكرة جيدة أن تشمل هذه داخل جدول التكرار المتجمع الصاعد.

هذا جدول **التكرار المتجمع**

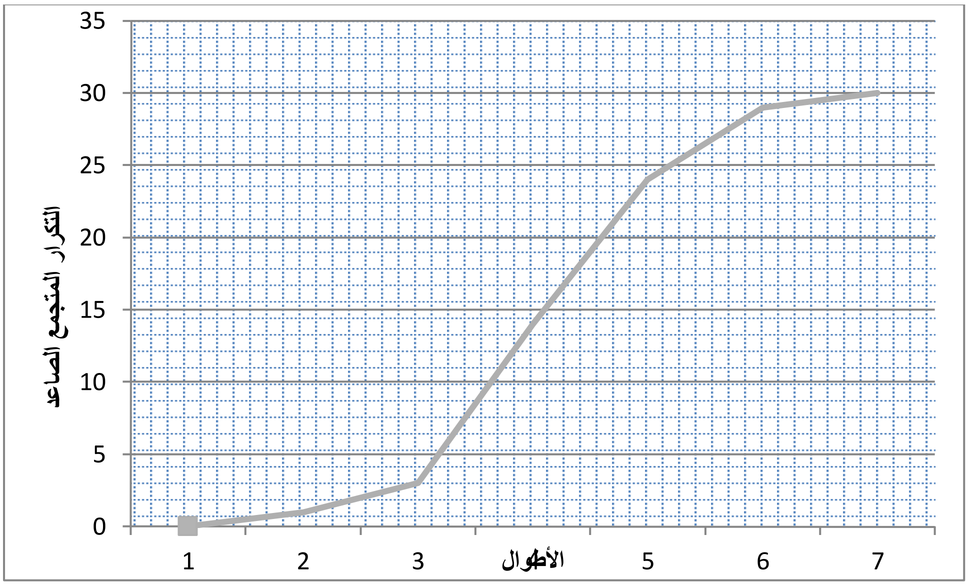
الإرتفاع $x\ cm$	< 3	< 6	< 9	< 12	< 15	< 18	< 21
التكرار المتجمع	0	1	3	14	24	29	**30**

1+2   1+2+11   هذا يجب أن يكون نفس مجموع التكرارت

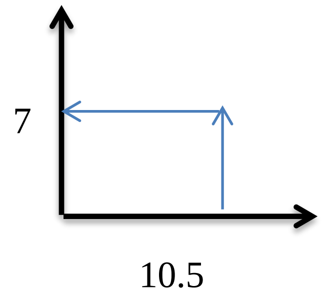
التكرارت المتراكمة يمكن إعتبارها إجمالي التكرارت.

يمكن أن يمثل الجدول التكراري بمنحني التكرار المتجمع الصاعدي , حيث ترسم الحدود العليا الفعلية علي محور السينات مع التكرارات المتجمعة المتصاعدة علي محور الصادات. حيث توصل النقط بمنحنى أو بخطوط مستقيمة. لكن في الأغلب يرسمالمنحنى, و أي الطريقتين مقبولة في الامتحان.

يوضح منحني التكرار المتجمع أطوال 30 شتلة من نبات الفول



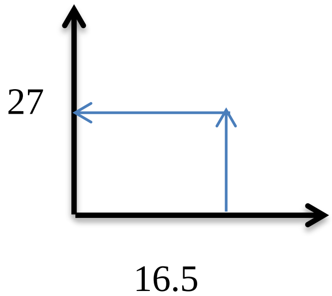
يمكن تقدير القيم من الرسم , علي سبيل المثال:



(i) قدر من الرسم , كم نبتة لها الطول أقل من $10.5\ cm$.

- من 10.5 علي محور السينات (الطول) ارسم خط راسي إلى أن يلمس المنحني.
- الأن ارسم خط أفقي إلى محور الصادات (التكرار المتجمع الصاعد)
- ثم أقرأ هذة القيمة المناظرة.

من الرسم , 7 نبتات لها الطول أقل من $10.5\ cm$



(ii) 10% من النبتات علي الأقل لها الطول $x\ cm$. قدر قيمة x.

- 10% من 30 تساوي 3.

3 نبتات لها الطول علي الأقل $x\ cm$, لذلك 27 نبتة لها الطول أقل من $x\ cm$.

- من العدد 27 علي محور الصادات ارسم خط أفقي إلى المنحني.
- الآن أسقط خط رأسي أسفل إلى محور السينات و اقرأ هذه القيمة.

من الرسم , 10% من النبتات كان لها الارتفاع علي الأقل $16.5\ cm$.

مثال 1.26

ينتج مصنع عناصراً معينة . تم وزن 500 عنصر من هذه المنتجات في اختبار ضبط الجودة, حيث سجلت أوزانها لأقرب جرام. ويوضح الجدول الآتي هذه النتائج.

الوزن g	60 – 69	70 – 74	75 – 79	80 – 84	85 – 89
التكرار	30	90	130	210	40

(i) أنشئ الجدول التكراري المتجمع ثم ارسم المنحني التكراري المتجمع.

(ii) ألغيت العناصر التي كان وزنها أقل من 64.5 جرام أو أكثر من 87.5 جرام . أستخدم المنحنى لتقدير النسبة المئوية للعناصر التي أخذت.

(i) بما أنه تم تسجيل الوزن لأقرب جرام , فإن الحدود العليا الفعلية للفئات هي 96.5, 74.5, 79.5, 84.5, 89.5.

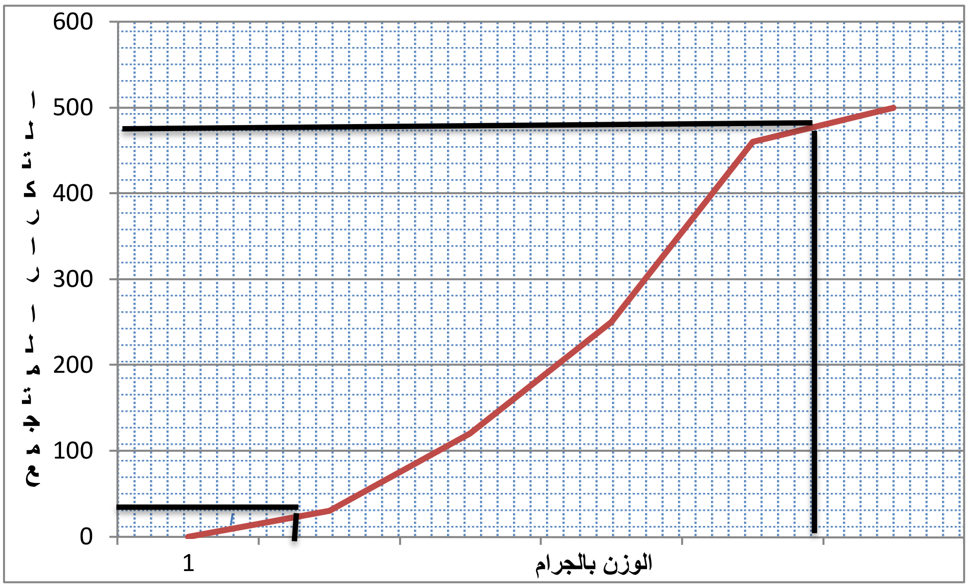
والحد الأدنى الفعلي للفئة الأولي هو 59.5 .

وضح الحدود الفعلية والتكرارات المتجمعة الصاعدة في الجدول قبل أن تقوم بالرسم.

الجدول التكراري المتجمع

الوزن g	< 59.5	< 69.5	< 74.5	< 79.5	< 84.5	< 89.5
التكرار المتجمع	0	30	120	250	460	500

يوضح المنحنى التكراري أوزان العناصر المصنعة



أوجد القيمة 64.5 علي المحور السيني . ثم ارسم خطاً رأسي إلى المنحنى , ثم منحنى أفقياً إلى محور الصادات. اقرأ القيمة وبنفس الخطوات أعد الطريقة مع القيمة 87.5 علي محور السينات.

عدد العناصر التي توزن أقل من 64.5 جرام = 15

عددالعناصر التي توزن أقل من 87.5 جرام = 485

عدد العناصر التي استوفت الشرط هي $470 = 15 - 485$

النسبة المئوية للعناصر التي استوفت الشرط هي $90\% = 100 \times \frac{470}{500}$

(عندما يطلب منك تقدير القيم من الرسم , يجب أن توضح طريقتك برسم خطوط علي المنحني)