Cinétique et dynamique des systèmes de solides

CINÉTIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

1.) NOTION DE MASSE

1.1.) Définition

La masse caractérise la quantité de matière. La représentation mathématique associée est une mesure positive ou nulle, complètement additive, définie sur un domaine E de l'espace.

$\forall$ e $\subset$ E alors $m(e) \geq 0$

Quelle que soit la partition de E en n sous ensembles e_i tels que :

$E_1 + e_2 + \ldots + e_n = E \qquad e_i \cap e_j = \varnothing \ \forall\ i \neq j$

on peut écrire :

$$\boxed{m(E) = \sum_{i=1}^{n} m(e_i)} \quad [4\text{-}1]$$

1.2.) Conservation de la masse

Si t_1 et t_2 sont les repères de deux instants quelconques, on dit que E est à masse conservative si pour tout sous-ensemble e de E, on a :

$$\boxed{m(E,t_1) = m(E,t_2)} \quad [4\text{-}2]$$

1.3.) Solide matériel

Le solide matériel S est celui précédemment défini en cinématique auquel on attribue une mesure positive de masse. Le solide matériel est un système à masse conservative.

1.4.) Ensemble de solides matériels

Un ensemble E est un ensemble de solides matériels s'il n'est constitué que de solides matériels. En particulier, il ne comporte ni fluide ni ressort. Sa masse est conservative.

1.5.) Théorème

Si E est un ensemble à masse conservative et $\vec{f}(P,t)$ une fonction vectorielle définie sur E, on démontre que :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\int_{P\varepsilon E} \vec{f}(P,t)\, dm\right]_R = \int_{P\varepsilon E} \left[\frac{d\,\vec{f}(P,t)}{dt}\right]_R dm} \quad [4\text{-}3]$$

Tous les systèmes considérés par la suite sont des ensembles de solides matériels.

2.) CENTRE DE MASSE D'UN ENSEMBLE MATÉRIEL

2.1.) Définition

Si le point G est le centre de masse d'un ensemble matériel E, il vérifie la relation :

$$\boxed{\int_{P \in E} \overrightarrow{GP}\, dm = 0} \quad [4\text{-}4]$$

2.2.) Unicité

Supposons que, pour un ensemble matériel E, il existe deux centres de masse G_1 et G_2.

Si G_1 et G_2 sont centres de masse, ils vérifient respectivement :

$$\int_{P \in E} \overrightarrow{G_1P}\, dm = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{P \in E} \overrightarrow{G_2P}\, dm = 0$$

En faisant la différence, on obtient :

$$\int_{P \in E} (\overrightarrow{G_1P} - \overrightarrow{G_2P})\, dm = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{P \in E} \overrightarrow{G_1G_2}\, dm = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{G_1G_2}$ étant indépendant de l'intégration en P, on obtient :

$$\overrightarrow{G_1G_2} \int_{P \in E} dm = 0$$

ou encore :

$$\overrightarrow{G_1G_2}\, m(E) = 0$$

Ce qui implique que $\overrightarrow{G_1G_2} = 0$, donc que G_1 est confondu avec G_2.

2.3.) Détermination

En se plaçant en un point quelconque Q, on a : $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QP}$

En portant dans la relation de définition, il vient :

$$\int_{P \in E} \overrightarrow{GP}\, dm = \int_{P \in E} \overrightarrow{GQ}\, dm + \int_{P \in E} \overrightarrow{QP}\, dm = 0$$

Mais : $\displaystyle\int_{P \in E} \overrightarrow{GQ}\, dm = \overrightarrow{GQ} \int_{P \in E} dm = \overrightarrow{GQ}\, m(E)$

d'où : $\displaystyle\int_{P \in E} \overrightarrow{QP}\, dm = m(E)\, \overrightarrow{QG}$

soit encore :

$$\boxed{\overrightarrow{QG} = \frac{1}{m(E)} \int_{P \in E} \overrightarrow{QP}\, dm} \quad [4\text{-}5]$$

2.4.) Partition

Plutôt que de calculer directement l'intégrale sur E, il est souvent intéressant de réaliser une partition de E en n sous-ensembles disjoints e_i, de masse m_i et de centre de masse respectif G_i.

On a alors : $\displaystyle\int_{P\in E} \overrightarrow{QP}\,dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{P\in e_i} \overrightarrow{QP}\,dm = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \overrightarrow{QG_i}$

d'où la relation : $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\ \overrightarrow{QG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ \overrightarrow{QG_i}}$ [4-6]

On peut faire de même pour un ensemble E constitué d'un ensemble F auquel on a enlevé p ensembles e_i, de masse m_i et de centre de masse respectif G_i. On obtient alors la relation :

$$\int_{P\in E} \overrightarrow{QP}\,dm = \int_{P\in E} \overrightarrow{QP}\,dm - \sum_{i=1}^{p} \int_{P\in e_i} \overrightarrow{QP}\,dm = m(F)\ \overrightarrow{QG_F} - \sum_{i=1}^{p} m_i\ \overrightarrow{QG_i}$$

qui devient la formule dite "des masses négatives" :

$$m(F) - \sum_{i=1}^{p} m_i]\ \overrightarrow{QG} = m(F)\ \overrightarrow{QG_F} - \sum_{i=1}^{p} m_i\ \overrightarrow{QG_i})$$

2.5.) Symétrie matérielle

On dit qu'il y a symétrie matérielle pour l'ensemble E si à tout point P appartenant à E correspond par symétrie spatiale un point P' appartenant E tel que : dm(P) = dm(P')

S'il existe un élément de symétrie matérielle (plan ou axe) pour l'ensemble E, le point G appartient à cet élément de symétrie.

Si la symétrie matérielle est effective autour d'un point, c'est nécessairement le centre de masse.

La démonstration est très simple en prenant le point Q sur l'élément de symétrie matérielle.

2.6.) Remarques

En fixant un repère orthonormé R centré en O et en appliquant la formule de définition du centre de masse pour Q = O on obtient : $\displaystyle\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m(E)} \int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\,dm$

En dérivant cette expression dans R, il vient : $\displaystyle m(E) \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_R = \frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\,dm\right]_R$

En appliquant le théorème relatif aux ensembles de solides matériels, on obtient :

$$m(E) \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_R = \int_{P\in E} \left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_R dm$$

ce qui devient :

$$\boxed{m(E)\ \overrightarrow{V}(G/R) = \int_{P\in E} \overrightarrow{V}(P/R)\,dm} \quad [4\text{-}7]$$

Cette intégrale est appelée résultante des quantités de mouvement pour l'ensemble E en mouvement par rapport au repère R.

Sous les mêmes conditions, en dérivant une seconde fois, on a :

$$\boxed{m(E)\ \vec{\Gamma}(G/R) = \int_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R)\ dm} \quad [4\text{-}8]$$

Cette intégrale est appelée résultante des quantités d'accélération pour l'ensemble E en mouvement par rapport au repère R.

3.) TORSEURS CINÉTIQUE ET DYNAMIQUE

On considère le système matériel E, de centre de masse G, en mouvement par rapport au repère R.

3.1.) Définition du torseur cinétique

Le torseur cinétique d'un ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à un repère R est défini par :

$$\mathcal{C}(E/R) = {}_{I}\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{P \in E} \vec{V}(P/R)\ dm = m(E)\ \vec{V}(G/R) \\ \displaystyle\int_{P \in E} \vec{IP} \wedge \vec{V}(P/R)\ dm = \vec{\sigma}(I,E/R) \end{array} \right.$$

Dans le mouvement de l'ensemble E par rapport à R, la résultante cinétique est m(E) $\vec{V}(G/R)$ et le moment cinétique en I est $\vec{\sigma}(I,E/R)$. On vérifie facilement la relation torsorielle habituelle :

$$\boxed{\vec{\sigma}(B,E/R) = \vec{\sigma}(A,E/R) + m(E)\ \vec{V}(G/R) \wedge \vec{AB}} \quad [4\text{-}9]$$

En faisant intervenir le centre de masse G et tout point I, on a : $\vec{\sigma}(I,E/R) = \vec{\sigma}(G,E/R) + m(E)\ \vec{V}(G/R) \wedge \vec{GI}$

3.1.a) Cas particuliers

• Si l'ensemble matériel est de dimension suffisamment réduite par rapport aux autres systèmes considérés, on peut l'assimiler à un point unique M de masse m. Le torseur cinétique se réduit au glisseur :

$$\mathcal{C}(M/R) = {}_{M}\left\{ \begin{array}{l} m\ \vec{V}(M/R) \\ 0 \end{array} \right.$$

• Si G est un point fixe dans R, le torseur cinétique se réduit au couple : $\mathcal{C}(E/R) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \vec{\sigma}(G,E/R) \end{array} \right.$

3.2.) Définition du torseur dynamique

$$\mathcal{D}(E/R) = {}_{I}\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R)\ dm = m(E)\ \vec{\Gamma}(G/R) \\ \displaystyle\int_{P \in E} \vec{IP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)\ dm = \vec{\delta}(I,E/R) \end{array} \right.$$

Dans le mouvement de l'ensemble E par rapport à R, la résultante dynamique est m(E) $\vec{\Gamma}(G/R)$ et le moment dynamique en I est $\vec{\delta}(I,E/R)$. On vérifie facilement la relation torsorielle habituelle :

$$\boxed{\vec{\delta}(B,E/R) = \vec{\delta}(A,E/R) + m(E)\ \vec{\Gamma}(G/R) \wedge \vec{AB}} \quad [4\text{-}10]$$

En faisant intervenir le centre de masse G et tout point I, on a : $\vec{\delta}(I,E/R) = \vec{\delta}(G,E/R) + m(E)\ \vec{\Gamma}(G/R) \wedge \vec{GI}$

3.2.a) Cas particuliers

• Si l'ensemble matériel est de dimension suffisamment réduite par rapport aux autres systèmes considérés, on peut l'assimiler à un point unique M de masse m. Le torseur dynamique se réduit au glisseur :

$$\mathcal{D}(M/R) = {}_{M}\left\{\begin{array}{l} m\,\vec{\Gamma}(M/R) \\ 0 \end{array}\right.$$

• Si G est un point fixe dans R, le torseur dynamique se réduit à un couple : $\mathcal{D}(E/R) = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ \vec{\delta}(G,E/R) \end{array}\right.$

3.3.) Relation entre les moments cinétique et dynamique

Reprenons l'expression du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}(I,E/R) = \int_{P \in E} \vec{IP} \wedge \vec{V}(P/R)\, dm$$

En dérivant cette relation dans R et en appliquant le théorème relatif aux ensembles de solides matériels, on a :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(I,E/R)\right]_R = \int_{P \in E} \left[\frac{d}{dt}(\vec{IP} \wedge \vec{V}(P/R))\right]_R dm$$

En effectuant la dérivation, il vient :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(I,E/R)\right]_R = \int_{P \in E} \left[\frac{d\vec{IP}}{dt}\right]_R \wedge \vec{V}(P/R)\, dm + \int_{P \in E} \vec{IP} \wedge \left[\frac{d\vec{V}(P/R)}{dt}\right]_R dm$$

Exprimons :

$$\left[\frac{d\vec{IP}}{dt}\right]_R = \vec{V}(P/R) - \vec{V}(I/R)$$

sans oublier que le point I est alors un **point géométrique**. On obtient alors :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(I,E/R)\right]_R = \int_{P \in E} (\vec{V}(P/R) - \vec{V}(I/R)) \wedge \vec{V}(P/R)\, dm + \int_{P \in E} \vec{IP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)\, dm$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs identiques étant nul, il ne reste que :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(I,E/R)\right]_R = -\int_{P \in E} \vec{V}(I/R) \wedge \vec{V}(P/R)\, dm + \int_{P \in E} \vec{IP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R)\, dm$$

En factorisant les termes indépendants des sommations et en appliquant les définitions, il vient :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(I,E/R)\right]_R = -\vec{V}(I/R) \wedge m(E)\,\vec{V}(G/R) + \vec{\delta}(I,E/R)$$

D'où la relation : $\boxed{\vec{\delta}(I,E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(I,E/R)\right]_R + m(E)\,\vec{V}(I/R) \wedge \vec{V}(G/R) \quad (\textbf{I : point géométrique})}$ [4-11]

Remarque

Il est préférable pour éviter toute confusion de retenir cette relation sous la forme :

$$\boxed{\vec{\delta}(I,E/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(I,E/R)\right]_R + m(E)\left[\frac{d\vec{OI}}{dt}\right]_R \wedge \vec{V}(G/R)} \quad [4\text{-}12]$$

Dans dernière relation : **O est l'origine du repère R** et **I un point géométrique**

4.) ÉNERGIE CINÉTIQUE

4.1.) Définition

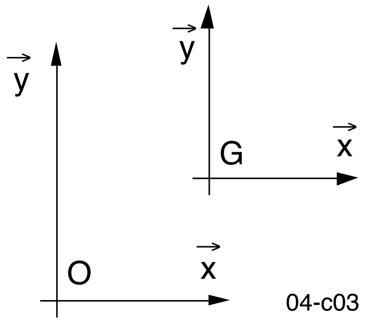
L'énergie cinétique d'un point P affecté de la masse dm dans son mouvement par rapport à un repère R est donnée par :

$$T(P/R) = \frac{1}{2}(\vec{V}(P/R))^2 \ dm$$

L'énergie cinétique d'un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un repère R est alors :

$$\boxed{2T(E/R) = \int_{P \in E} (\vec{V}(P/R))^2 \ dm} \quad [4\text{-}13]$$

4.2.) Propriété



On considère le repère $R\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ et le repère $R'\{G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ **en translation** par rapport à R. Pour tout point P on a :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(P/R') + \vec{V}(G/R)$$

En reportant dans la définition de l'énergie cinétique, il vient :

$$2T(E/R) = \int_{P \in E} (\vec{V}(P/R') + \vec{V}(G/R))^2 \ dm$$

En développant, on a :

$$2T(E/R) = \int_{P \in E} (\vec{V}(P/R'))^2 \ dm + 2 \int_{P \in E} \vec{V}(P/R') \ \vec{V}(G/R) \ dm + \int_{P \in E} (\vec{V}(G/R))^2 \ dm$$

puis en factorisant :

$$2T(E/R) = \int_{P \in E} (\vec{V}(P/R'))^2 \ dm + 2\vec{V}(G/R) \int_{P \in E} \vec{V}(P/R') \ dm + m(E) \left(\vec{V}(G/R)^2\right)$$

Mais :

$$\int_{P \in E} \vec{V}(P/R') \ dm = m(E) \ \vec{V}(G/R') = 0$$

et donc :

$$\boxed{2T(E/R) = 2T(E/R') + m(E) \ (\vec{V}(G/R))^2} \quad [4\text{-}14]$$

Ce dernier terme pouvant s'interpréter comme l'énergie cinétique du "point" G, affecté de la masse totale, dans son mouvement par rapport à R.

CINÉTIQUE du solide

1.) OPÉRATEUR D'INERTIE D'UN SOLIDE

1.1.) Rappel

Le solide matériel conserve évidemment ses propriétés cinématiques. Il existe alors un torseur cinématique associé au mouvement de S par rapport à un repère R :

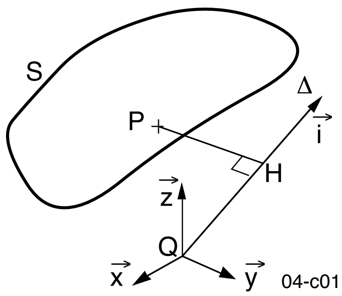
$$\mathcal{V}(S/R) = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(O,S/R) \end{array} \right.}$$

Par définition le centre de masse G du solide est fixe dans S.

Remarque

Il ne faut évidemment pas confondre torseur cinématique et torseur cinétique.

1.2.) Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe



On considère un repère R$\{Q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, un solide S et un axe Δ défini par le point Q et le vecteur unitaire $\vec{i}$: Δ = (Q, $\vec{i}$)

Le point P est un point de S et il a pour projection orthogonale sur Δ le point H.

Par définition du moment d'inertie de S par rapport à un axe, on a : $I(\Delta,S) = \int_{P \in S} (\vec{HP})^2 \, dm$.

Mais : $\|\vec{HP}\| = \|\vec{i} \wedge \vec{QP}\|$

d'où :

$$[\vec{HP}^2] = (\vec{i} \wedge \vec{QP})\,(\vec{i} \wedge \vec{QP}) = \vec{i}\,(\vec{QP} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{QP}))$$

On obtient alors :

$$\boxed{I(\Delta,S) = \vec{i} \int_{P \in S} \vec{QP} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{QP})\, dm} \quad [4\text{-}15]$$

1.3.) Définition de l'opérateur d'inertie d'un solide

On appelle opérateur d'inertie $\mathcal{J}$ au point Q d'un solide S l'opérateur qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, associe le vecteur $\int_{P \in S} \vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP})\, dm$.

On note : $\boxed{\mathcal{J}(Q,S)\,\vec{u} = \int_{P \in S} \vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP})\, dm}$ [4-16]

Le moment d'inertie de S par rapport à Δ défini par (Q, $\vec{i}$) a pour expression : $I(\Delta,S) = \vec{i}\,\mathcal{J}(Q,S)\,\vec{i}$

Dans un repère R$\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, l'opérateur $\mathcal{J}(Q,S)$ s'exprime par une matrice 3 x 3.

1.4.) Expression de l'opérateur d'inertie d'un solide

Exprimons dans un repère $R\{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ les vecteurs intervenant dans la définition de l'opérateur $\mathcal{J}(Q,S)$:

$\vec{QP} = x\ \vec{x} + y\ \vec{y} + z\ \vec{z}$ $\vec{u} = u_1\ \vec{x} + u_2\ \vec{y} + u_3\ \vec{z}$

En calculant le double produit vectoriel, on a :

$\vec{QP} \wedge [\vec{u} \wedge \vec{QP}] = [u_1(y^2+z^2) - u_2\, x\, y - u_3\, x\, z]\ \vec{x} + [u_2\,(x^2+z^2) - u_3\, y\, z - u_1\, x\, y]\ \vec{y} + [u_3\,(x^2+y^2) - u_1\, x\, z - u_2\, y\, z]\ \vec{z}$

En effectuant l'intégration et en factorisant les termes indépendants du point P, il vient :

$$\int_{P\in S} \vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP})\, dm = \left(u_1 \int_{P\in S} (y^2+z^2)\, dm) - u_2 \int_{P\in S} xy\ dm - u_3 \int_{P\in S} xz\ dm\right)\vec{x}$$
$$+ \left(- u_1 \int_{P\in S} x\, y\ dm + u_2 \int_{P\in S} (x^2+z^2)\, dm - u_3 \int_{P\in S} y\, z\ dm\right)\vec{y}$$
$$+ \left(- u_1 \int_{P\in S} x\, z\ dm - u_2 \int_{P\in S} y\, z\ dm + u_3 \int_{P\in S} (x^2+y^2)\, dm\right)\vec{z}$$

C'est bien le produit d'une matrice par le vecteur $\vec{u}$.

L'expression de la matrice est :

$$\mathcal{J}(Q,S) = \begin{pmatrix} \int_{P\in S}(y^2+z^2)\, dm & -\int_{P\in S} x\, y\ dm & -\int_{P\in S} x\, z\ dm \\ -\int_{P\in S} x\, y\ dm & \int_{P\in S}(x^2+z^2)\, dm & -\int_{P\in S} y\, z\ dm \\ -\int_{P\in S} x\, z\ dm & -\int_{P\in S} y\, z\ dm & \int_{P\in S}(x^2+y^2)\, dm \end{pmatrix}_R$$

Pour faciliter l'écriture de cet opérateur, on pose conventionnellement :

$$\boxed{\mathcal{J}(Q,S) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_R} \quad [4\text{-}17]$$

Le vecteur $\vec{i}$ s'exprime dans le repère R par : $\vec{i} = i_1\ \vec{x} + i_2\ \vec{y} + i_3\ \vec{z}$

On obtient alors :

$$I(\Delta,S) = A\, i_1^2 + B\, i_2^2 + C\, i_3^2 - 2\, D\, i_2\, i_3 - 2\, E\, i_1\, i_3 - 2\, F\, i_1\, i_2$$

Cette expression est une forme bilinéaire symétrique associée à l'ellipsoïde :

$$A\, x^2 + B\, y^2 + C\, z^2 - 2\, D\, y\, z - 2\, E\, x\, z - 2\, F\, x\, y = k^2$$

Si le vecteur $\vec{i}$ de l'axe Δ est égal à $\vec{x}$, on a : $I(\Delta,S) = A$

Ceci permet d'interpréter les composantes de la matrice d'inertie :

A est le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(Q,\vec{x})$

B est le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(Q,\vec{y})$

C est le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(Q,\vec{z})$

D est le produit d'inertie de S par rapport aux plans $(Q,\vec{x},\ \vec{y})$ et $(Q,\vec{x},\ \vec{z})$

E est le produit d'inertie de S par rapport aux plans $(Q,\vec{x},\ \vec{y})$ et $(Q,\vec{y},\ \vec{z})$

F est le produit d'inertie de S par rapport aux plans $(Q,\vec{x},\ \vec{z})$ et $(Q,\vec{x},\ \vec{z})$.

Il est à noter que tous ces termes sont homogènes au produit d'une masse et d'une longueur au carré.

Il est également commode, dans certains calculs de poser :

$X\,X = \int_{P\in S} x^2\,dm$ $\quad Y\,Y = \int_{P\in S} y^2\,dm$ $\quad Z\,Z = \int_{P\in S} z^2\,dm$

$X\,Y = \int_{P\in S} x\,y\,dm$ $\quad Y\,Z = \int_{P\in S} y\,z\,dm$ $\quad Z\,X = \int_{P\in S} z\,x\,dm$

avec les relations : $A = Y\,Y + Z\,Z$ $\quad B = Z\,Z + X\,X$ $\quad C = X\,X + Y\,Y$

$D = Y\,Z$ $\quad E = Z\,X$ $\quad F = X\,Y$

1.5.) Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire en Q du solide S est défini par : $I(Q,S) = \int_{P\in S} (x^2 + y^2 + z^2)\,dm$

C'est la moitié de la trace de la matrice $\mathcal{J}(Q,S)$:

$$I(Q,S) = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

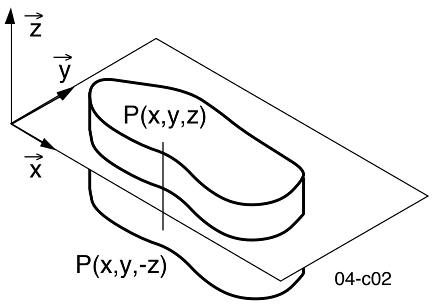
En utilisant les conventions précédentes, c'est aussi :

$$I(Q,S) = X\,X + Y\,Y + Z\,Z$$

1.6.) Définitions

- On dit qu'un repère est principal d'inertie si l'opérateur $\mathcal{J}(Q,S)$ exprimé dans cette base est tel que les produits d'inertie D = E = F sont nuls. L'opérateur $\mathcal{J}(Q,S)$ a alors une forme diagonale et la base associée au repère est une base propre. Cette base est orthonormée.
- Lorsque l'opérateur d'inertie est exprimé au centre de masse point G du solide S, les éléments correspondants de l'opérateur $\mathcal{J}(G,S)$ sont dits centraux.
- Dans un repère de centre G, dont la base est propre pour l'opérateur d'inertie, les éléments sont dits centraux principaux d'inertie.

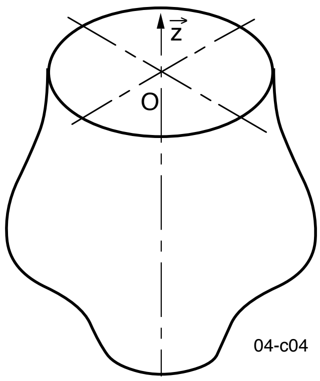
1.7.) Symétrie matérielle



Si le solide S admet un plan de symétrie matérielle, l'expression de l'opérateur d'inertie dans un repère dont deux axes sont dans ce plan, a deux produits d'inertie nuls.

Si le solide S admet deux plans de symétrie perpendiculaires, l'expression de l'opérateur d'inertie dans un repère centré sur l'intersection de ces plans et dont les axes sont dans ces plans, a trois produits d'inertie nuls. Ce repère est propre pour l'opérateur d'inertie.

1.8.) Solide à symétrie matérielle de révolution



Un solide à symétrie matérielle de révolution possède nécessairement deux plans de symétrie matérielle perpendiculaires qui se coupent sur l'axe de révolution. Les éléments non diagonaux sont donc nuls pour tout repère centré sur l'axe de révolution admettant le vecteur directeur de cet axe comme vecteur de base.

Par exemple, dans un $R\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, tout solide S de symétrie matérielle de révolution autour de l'axe $(O, \vec{z})$, est associé en O, à un opérateur de la forme :

$$\mathcal{J}(O,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_R$$

1.9.) Théorème de HUYGENS

Reprenons la définition de l'opérateur $\mathcal{J}(Q,S)$: $\mathcal{J}(Q,S)\,\vec{u} = \int_{P\in S} \vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP})\, dm$

Faisons apparaître le point G, centre de masse de S : $\vec{QP} = \vec{QG} + \vec{GP}$

on obtient :

$$\vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP}) = (\vec{QG} + \vec{GP}) \wedge \left(\vec{u} \wedge (\vec{QG} + \vec{GP})\right)$$

$$= \vec{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QG}) + \vec{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP}) + \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QG}) + \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP})$$

On reporte dans l'expression de $\mathcal{J}(Q,S)$ et en tenant compte des termes ne dépendant pas des sommations, on a :

$$\mathcal{J}(Q,S)\,\vec{u} = \vec{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QG}) \int_{P\in S} dm + \vec{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \int_{P\in S} \vec{GP}\, dm) + \int_{P\in S} \vec{GP}\, dm \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QG}) + \int_{P\in S} \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP})\, dm$$

Mais, par définition du centre de masse : $\int_{P\in S} \vec{GP}\, dm = 0$

On a donc : $\mathcal{J}(Q,S)\,\vec{u} = m(S)\, \vec{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QG}) + \int_{P\in S} \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP})\, dm$

soit : $\mathcal{J}(Q,S)\,\vec{u} = m(S)\, \vec{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QG}) + \mathcal{J}(G,S)\,\vec{u}$

En notant $\mathcal{J}(Q,G(m(S)))$ l'opérateur d'inertie au point Q, du "point" G affecté de la masse totale m(S), on obtient :

$$\boxed{\mathcal{J}(Q,S) = \mathcal{J}(G,S) + \mathcal{J}(Q,G(m(S)))} \quad [4\text{-}18]$$

En posant : $\vec{GQ} = a\,\vec{x} + b\,\vec{y} + c\,\vec{z}$

on obtient :

$A_Q = A_G + m(S)\,(b^2 + c^2)$	$B_Q = B_G + m(S)\,(a^2 + c^2)$	$C_Q = C_G + m(S)\,(a^2 + b^2)$
$D_Q = D_G + m(S)\,b\,c$	$E_Q = E_G + m(S)\,a\,c$	$F_Q = F_G + m(S)\,a\,b$
$X\,X_Q = X\,X_G + m(S)\,a^2$	$Y\,Y_Q = Y\,Y_G + m(S)\,b^2$	$Z\,Z_Q = Z\,Z_G + m(S)\,c^2$
$X\,Y_Q = X\,Y_G + m(S)\,a\,b$	$Y\,Z_Q = Y\,Z_G + m(S)\,b\,c$	$X\,Z_Q = X\,Z_G + m(S)\,a\,c$

Pour faire le même type de calcul entre deux point quelconques, il faut appliquer deux fois la relation précédente, en faisant nécessairement intervenir le point G.

Il est d'usage que le point Q et le repère R soient fixes dans S. Les différents termes sont alors indépendants du temps. Il peut cependant être parfois utile de pas tenir compte de ces usages. Il ne faut alors pas s'étonner si le tenseur d'inertie est une fonction du temps, le plus souvent par l'intermédiaire des paramètres de position.

1.10.) Changement de base

On considère un solide S et deux repères de même origine : $R\{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ et $R_1\{O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1}\}$. On suppose que l'opérateur $\mathcal{J}(O,S)$ est connu dans le repère R.

La matrice de passage de R à R_1 présente, en colonne, les composantes des vecteurs de base de R_1 dans R. On note cette matrice $P(R,R_1)$.

$$\boxed{\mathcal{J}(O,S)_{R_1} = P^{-1}(R,R_1)\,\mathcal{J}(O,S)_R\,P(R,R_1)} \quad [4\text{-}19]$$

Cette relation précise la qualité tensorielle de $\mathcal{J}(O,S)$. On parle alors du tenseur d'inertie en O du solide S. Les composantes doivent être indiquées sur la base qui a servi au calcul et qui doit être précisée derrière le tableau.

Dans tout changement de base de ce type, il convient de vérifier que la trace de l'opérateur, représentant le moment d'inertie polaire, reste bien une constante.

1.11.) Remarque

Si au point P de coordonnées (x,y,z), on associe la matrice antisymétrique :

$$\mathcal{A}(P) = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient, sous forme symbolique :

$$\mathcal{J}(Q,S) = \int_{P\in S} \mathcal{A}(P)\,{}^t\mathcal{A}(P)\,dm$$

2.) Moments cinétique et dynamique d'un solide

2.1.) Cas général

Le repère de référence est R. Soient :

- G le centre de masse du solide S
- Q le point où est calculé l'opérateur d'inertie de S et où est connu le torseur cinématique
- P le point courant de S
- I un point quelconque de l'espace éventuellement mobile par rapport à R.

Le torseur cinématique associé au mouvement de S par rapport à un repère R est :

$$\mathcal{V}(S/R) = {}_Q\left\{\begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(Q,S/R) \end{array}\right.$$

Par changement de point, on a :

$$\vec{V}(P,S/R) = \vec{V}(Q,S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}$$

Calculons le moment cinétique en I en appliquant la définition :

$$\vec{\sigma}(I,S/R) = \int_{P\in S} \vec{IP} \wedge \vec{V}(P,S/R)\,dm$$

et remplaçons :

$$\vec{\sigma}(I,S/R) = \int_{P\in S} \vec{IP} \wedge \left(\vec{V}(Q,S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right) dm$$

Soit, en développant :

$$\vec{\sigma}(I,S/R) = \int_{P\in S} \vec{IP} \wedge \vec{V}(Q,S/R)\,dm + \int_{P\in S} \vec{IP} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right) dm$$

En introduisant le point Q et en factorisant, il vient :

$$\vec{\sigma}(I,S/R) = \int_{P\in S} \vec{IP}\ dm \wedge \vec{V}(Q,S/R) + \int_{P\in S} (\vec{IQ} + \vec{QP}) \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right) dm$$

puis :

$$\vec{\sigma}(I,S/R) = m(S)\ \vec{IG} \wedge \vec{V}(Q,S/R) + \vec{IQ} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \int_{P\in S} \vec{QP} dm\right) + \int_{P\in S} \vec{QP} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right) dm$$

On obtient alors la relation :

$$\boxed{\vec{\sigma}(I,S/R) = m(S)\ \vec{IG} \wedge \vec{V}(Q,S/R) + m(S)\vec{IQ} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QG}\right) + \mathcal{J}(Q,S)\ \vec{\Omega}(S/R)} \quad [4\text{-}20]$$

Pour effectuer le produit $\mathcal{J}(Q,S)\vec{\Omega}(S/R)$, il est essentiel d'exprimer l'opérateur et le vecteur dans une même base, qui n'est pas nécessairement R.

2.2.) Cas particuliers

Si Q = G

$$\boxed{\vec{\sigma}(I,S/R) = m(S)\ \vec{IG} \wedge \vec{V}(G,S/R) + \mathcal{J}(G,S)\ \vec{\Omega}(S/R)} \quad [4\text{-}21]$$

Si Q = I

$$\boxed{\vec{\sigma}(I,S/R) = m(S)\ \vec{IG} \wedge \vec{V}(I,S/R) + \mathcal{J}(I,S)\ \vec{\Omega}(S/R)} \quad [4\text{-}22]$$

Si Q = I fixe dans R

$$\boxed{\vec{\sigma}(I,S/R) = \mathcal{J}(I,S)\ \vec{\Omega}(S/R) \text{I fixe dans R}} \quad [4\text{-}23]$$

Si Q = I = G

$$\boxed{\vec{\sigma}(G,S/R) = \mathcal{J}(G,S)\ \vec{\Omega}(S/R)} \quad [4\text{-}24]$$

Ces deux dernières relations sont bien souvent les plus faciles à mettre en oeuvre.

2.3.) Moment dynamique

On obtient le moment dynamique à partir du moment cinétique par la relation précédemment établie pour un ensemble de solides matériels :

$$\vec{\delta}(I,S/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(I,S/R)\right]_R + m(S)\ \vec{V}(I/R) \wedge \vec{V}(G/R) \text{ (I : un point géométrique)}$$

En particulier, si I = G, elle devient :

$$\boxed{\vec{\delta}(G,S/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(G,S/R)\right]_R} \quad [4\text{-}25]$$

De même, si I est fixe dans R, on a :

$$\boxed{\vec{\delta}(I,S/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(I,S/R)\right]_R} \quad \text{Le point I est fixe dans R} \quad [4\text{-}26]$$

3.) DÉTERMINATION DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN SOLIDE

3.1.) Relation générale

Le repère de référence est R. Appelons G le centre de masse du solide S auquel appartiennent les points P et Q. Le torseur cinématique associé au mouvement de S par rapport à un repère R est :

$$\mathcal{V}(S/R) = {}_{Q}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(Q,S/R) \end{Bmatrix}$$

Par changement de point, on a :

$\vec{V}(P,S/R) = \vec{V}(Q,S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}$

En appliquant la définition, l'énergie cinétique est :

$$2T(S/R) = \int_{P\in S} [\vec{V}(P,S/R)]^2 \, dm$$

Calculons $[\vec{V}(P,S/R)]^2$, en faisant intervenir le point Q :

$$[\vec{V}(Q,S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}]^2 = [\vec{V}(Q,S/R)]^2 + 2\, \vec{V}(Q,S/R)\left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right) + \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right)\left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right)$$

En utilisant les propriétés du produit mixte pour ce dernier terme on a :

$$\left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right)\left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right) = \vec{\Omega}(S/R)\left[\vec{QP} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right)\right]$$

En reportant dans l'expression de l'énergie cinétique on obtient :

$$2T(S/R) = [\vec{V}(Q,S/R)]^2 \int_{P\in S} dm + 2\, \vec{V}(Q,S/R)\left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \int_{P\in S} \vec{QP}\, dm\right) + \vec{\Omega}(S/R) \int_{P\in S} \vec{QP} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right) dm$$

d'où la relation :

$$\boxed{2T(S/R) = m(S)[\vec{V}(Q,S/R)]^2 + \vec{\Omega}(S/R)\, \mathcal{J}(Q,S)\, \vec{\Omega}(S/R) + 2\, m(S)\left(\vec{V}(Q,S/R), \vec{\Omega}(S/R), \vec{QG}\right)} \quad [4\text{-}27]$$

3.2.) Cas particuliers

Si Q = G

$$\boxed{2T(S/R) = m(S)\, [\vec{V}(G,S/R)]^2 + \vec{\Omega}(S/R)\, \mathcal{J}(G,S)\, \vec{\Omega}(S/R)} \quad [4\text{-}28]$$

Si le point Q est fixe dans R

$$\boxed{2T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R)\, \mathcal{J}(Q,S)\, \vec{\Omega}(S/R) \text{Q fixe dans R}} \quad [4\text{-}29]$$

3.3.) Autre relation

Reprenons la définition de l'énergie cinétique : $2T(S/R) = \int_{P\in S} [\vec{V}(P,S/R)]^2 \, dm$

et remplaçons le premier $\vec{V}(P,S/R)$ du carré scalaire : $2T(S/R) = \int_{P\in S} \left(\vec{V}(Q,S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right) \vec{V}(P,S/R)\, dm$

soit : $2T(S/R) = \vec{V}(Q,S/R) \int_{P\in S} \vec{V}(P,S/R)\, dm + \int_{P\in S} \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}\right) \vec{V}(P,S/R)\, dm$

En changeant l'ordre des opérateurs dans le produit mixte :

$$2T(S/R) = \vec{V}(Q,S/R) \int_{P\in S} \vec{V}(P,S/R)\ dm + \int_{P\in S} \vec{\Omega}(S/R)\ (\vec{QP} \wedge \vec{V}(P,S/R))\ dm$$

puis :

$$2T(S/R) = \vec{V}(Q,S/R) \int_{P\in S} \vec{V}(P,S/R)\ dm + \vec{\Omega}(S/R) \int_{P\in S} \vec{QP} \wedge \vec{V}(P,S/R)\ dm$$

Ceci représente le comoment des torseurs cinématique et cinétique relatifs au solide S dans son mouvement par rapport à R :

$$\boxed{2T(S/R) = \mathcal{V}(S/R)\ \mathcal{C}(S/R)} \quad [4\text{-}30]$$

4.) Stratégies

4.1.) Introduction

Les calculs de cinétique sont souvent longs et difficiles à mener. Il convient donc de ne calculer que les éléments strictement nécessaires.

Il est plus simple de changer le repère d'un vecteur que de changer celui de l'opérateur.

4.2.) Calcul du moment dynamique pour un solide

Soit un solide S, de masse m, de centre de masse G, auquel est associé le repère $R\{G,\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, en mouvement par rapport à un repère $R_0\{O,\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}\}$. Soit, s'il existe, A un point de S fixe dans R_0. Le point Q désigne tout autre point de S. On suppose connu le torseur cinématique : $\mathcal{V}(S/R_0) = {}_G\left\{\begin{array}{l}\vec{\Omega}(S/R_0)\\ \vec{V}(G,S/R_0)\end{array}\right.$

$\mathcal{J}(G,S)$	$\rightarrow$	$\mathcal{J}(A,S) = \mathcal{J}(G,S) + \mathcal{J}(A,G(m))$
$\downarrow$		$\downarrow$
$\vec{\sigma}(G,S/R_0) = \mathcal{J}(G,S)\ \vec{\Omega}(S/R_0)$	$\rightarrow$	$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = \mathcal{J}(A,S)\ \vec{\Omega}(S/R_0)$ $\vec{\sigma}(A,S/R_0) = \vec{\sigma}(G,S/R_0) + m\ \vec{V}(G,S/R_0) \wedge \vec{GA}$
$\downarrow$		$\downarrow$
$\vec{\delta}(G,S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(G,S/R_0)\right]_{R_0}$	$\rightarrow$	$\vec{\delta}(A,S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R_0)\right]_{R_0}$ $\vec{\delta}(A,S/R_0) = \vec{\delta}(G,S/R_0) + m\ \vec{\Gamma}(G,S/R_0) \wedge \vec{GA}$
$\downarrow$		$\downarrow$
$\vec{\delta}(Q,S/R_0) = \vec{\delta}(G,S/R_0) + m\ \vec{\Gamma}(G,S/R_0) \wedge \vec{GQ}$		$\vec{\delta}(Q,S/R_0) = \vec{\delta}(A,S/R_0) + m\ \vec{\Gamma}(G,S/R_0) \wedge \vec{AQ}$

le passage :

$\vec{\delta}(Q,S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(Q,S/R_0)\right]_{R_0} + m\ \vec{V}(Q/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$ (Q : point géométrique) est également possible.

4.3.) Recherche d'une composante du moment dynamique

On suppose que l'on ne doivent chercher qu'une seule projection du moment dynamique sur $\vec{u}$ appartenant à un repère R_1. On a alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R_0)\ \vec{u}\right) = \vec{u}\left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R_0)\right]_{R_0} + \vec{\sigma}(A,S/R_0)\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0}$$

La dérivée de $\vec{u}$ est :

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{u}$$

Si de plus, on peut appliquer :

$$\vec{\delta}(A,S/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(A,S/R_0)\right]_{R_0}$$

on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R_0)\ \vec{u}\right) = \vec{\delta}(A,S/R_0)\ \vec{u} + \left(\vec{\sigma}(A,S/R_0), \vec{\Omega}(R_1/R_0), \vec{u}\right)$$

soit :

$$\vec{\delta}(A,S/R_0)\ \vec{u} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R_0)\ \vec{u}\right) - \left(\vec{\sigma}(A,S/R_0),\vec{\Omega}(R_1/R_0),\vec{u}\right)$$

Le produit mixte est nul dans de nombreux cas, en particulier si $R_1 = R_0$. **Il faut faire très attention aux hypothèses conduisant à cette formule**.

4.4.) Ensemble de solides

Pour un ensemble de n solides E = 1 + 2 +…+ n, on a :

4.4.a) Torseur cinétique

$$\mathcal{C}(E/R_0) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{C}(i/R_0) = \begin{Bmatrix} m_i \vec{V}(G_i,i/R_0) = m(E)\ \vec{V}(G(E)/R_0) \\ \sum_{i=1}^{i=n} \vec{\sigma}(I,i/R_0) \end{Bmatrix}_I$$

4.4.b) Torseur dynamique

$$\mathcal{D}(E/R_0) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{D}(i/R_0) = \begin{Bmatrix} m_i \vec{\Gamma}(G_i,i/R_0) = m(E)\ \vec{\Gamma}(G(E)/R_0) \\ \sum_{i=1}^{i=n} \vec{\delta}(I,i/R_0) \end{Bmatrix}_I$$

4.4.c) Énergie cinétique

$$2T(E/R_0) = \sum_{i=1}^{i=n} 2T(i/R_0)$$

DYNAMIQUE du solide

1.) PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

1.1.) Énoncé

Il existe au moins un repère R_g, dit repère galiléen tel que, pour tout sous-ensemble e d'un ensemble matériel E, le torseur dynamique de e soit égal au système d'actions mécaniques exercées par l'extérieur sur e.

La référence à ce principe est souvent abrégé en PFD. On note :

$$\boxed{\mathcal{T}(\overline{e}/e) = \mathcal{D}(e/R_g) \quad \boxed{\text{PFD}}} \quad [5\text{-}31]$$

1.2.) Repère galiléen

Un repère galiléen approché est un repère lié à la Terre. Dans un volume suffisamment réduit, le principe fondamental de la dynamique est vérifié.

Il n'est cependant pas question d'étudier dans un tel repère le mouvement Terre-Soleil. On utilise alors le repère de COPERNIC, dont l'origine est au centre de masse du Soleil et dont les directions sont données par trois étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme "fixes".

On peut également utiliser un repère géocentrique, de centre le centre de masse de la Terre et dont les directions sont celles des trois étoiles. On considère alors la Terre comme un système isolé.

Le paramètre temps est interprété de façon classique, c'est-à-dire non relativiste.

1.3.) Conséquences vectorielles

Le principe fondamental de la dynamique se traduit par deux équations vectorielles.

La première est appelée équation de la **résultante dynamique** et la seconde équation du **moment dynamique**. On prendra bien soin d'exprimer tous ces torseurs au même point avant d'écrire cette dernière équation.

Dans l'espace, cela se traduit par six équations scalaires par sous-ensemble considéré.

Lorsque le problème est considéré comme plan, c'est-à-dire que toutes les actions mécaniques sont représentables par des glisseurs coplanaires ou des couples d'axes perpendiculaires à ce plan et que tous les déplacements se font dans ce plan, on obtient trois équations scalaires par sous-ensemble considéré.

1.4.) Théorème des actions réciproques

Considérons un ensemble matériel E et une partition de E en e_1 et e_2. On a alors : $E = e_1 + e_2$

L'ensemble E est en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g.

Appliquons successivement le PFD à e_1, e_2 et E :

$$\mathcal{T}(\overline{e_1}/e_1) = \mathcal{D}(e_1/R_g) \qquad \mathcal{T}(\overline{e_2}/e_2) = \mathcal{D}(e_2/R_g) \qquad \mathcal{T}(\overline{E}/E) = \mathcal{D}(E/R_g)$$

Mais les actions extérieures à e_1 sont constituées des actions de e_2 sur e_1 et des actions extérieures à E sur e_1 :

$$\mathcal{T}(\overline{e_1}/e_1) = \mathcal{T}(e_2/e_1) + \mathcal{T}(\overline{E}/e_1)$$ d'où

$$\mathcal{T}(e_2/e_1) + \mathcal{T}(\overline{E}/e_1) = \mathcal{D}(e_1/R_g)$$

Il en est de même pour e_2 :

$$\mathcal{T}(\overline{e_2}/e_2) = \mathcal{T}(e_1/e_2) + \mathcal{T}(\overline{E}/e_2)$$

d'où :

$$\mathcal{T}(e_1/e_2) + \mathcal{T}(\overline{E}/e_2) = \mathcal{D}(e_2/R_g)$$

On peut alors écrire :

$$\mathcal{T}(e_2/e_1) + \mathcal{T}(\overline{E}/e_1) + \mathcal{T}(e_1/e_2) + \mathcal{T}(\overline{E}/e_2) = \mathcal{D}(e_1/R_g) + \mathcal{D}(e_2/R_g)$$

Mais :

$$\mathcal{D}(e_1/R_g) + \mathcal{D}(e_2/R_g) = \mathcal{D}(E/R_g)$$

$$\mathcal{T}(\overline{E}/e_1) + \mathcal{T}(\overline{E}/e_2) = \mathcal{T}(\overline{E}/E)$$

Appliquons le PFD pour E, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{T}(e_2/e_1) + \mathcal{T}(e_1/e_2) = 0} \quad [5\text{-}32]$$

Remarque

En appliquant le PFD à un système de solides, on déduit le **théorème** des actions réciproques.

1.5.) Cas particuliers

Lorsque le torseur dynamique associé à un ensemble matériel est nul, le principe fondamental de la dynamique s'écrit comme le principe fondamental de la statique.

C'est le cas si :

• la masse de l'ensemble est nulle (ou considérée comme telle)

• l'ensemble matériel est immobile par rapport à un repère galiléen.

2.) THÉORÈME DE L'ÉNERGIE – PUISSANCE

2.1.) Cas d'un solide

Le torseur cinématique du mouvement de S par rapport à un repère galiléen R_g est $\mathcal{V}(S/R_g)$.

Reprenons le PFD appliqué à un solide S en mouvement par rapport à R_g : $\mathcal{T}(\overline{S}/S) = \mathcal{D}(S/R_g)$

Multiplions par le torseur cinématique du mouvement de S/R_g : $\mathcal{T}(\overline{S}/S)\,\mathcal{V}(S/R_g) = \mathcal{D}(S/R_g)\,\mathcal{V}(S/R_g)$

Le premier membre représente la puissance développée par les efforts extérieurs à S dans son mouvement par rapport à R_g : (voir la statique)

$$\mathcal{T}(\overline{S}/S)\,\mathcal{V}(S/R_g) = P(\overline{S},S/R_g)$$

Explicitons le second membre, en un point A appartenant au solide S :

$$\mathcal{D}(S/R_g)\,\mathcal{V}(S/R_g) = \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{P\in S} \vec{\Gamma}(P,S/R_g)\,dm \\ \displaystyle\int_{P\in S} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P,S/R_g)\,dm \end{array}\right._A = \left\{\begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R_g) \\ \vec{V}(P,S/R_g) + \vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \vec{PA} \end{array}\right._A$$

ou encore :

$$\mathcal{D}(S/R_g)\,\mathcal{V}(S/R_g) = \int_{P\in S} \vec{\Gamma}(P,S/R)\,\left(\vec{V}(P,S/R_g) + \vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \vec{PA}\right) + \left(\vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P,S/R_g)\right)\,\vec{\Omega}(S/R_g)\,dm$$

La somme des deux produits mixtes est nulle et il reste :

$$\mathcal{D}(S/R_g)\,\mathcal{V}(S/R_g) = \int_{P\in S} \vec{\Gamma}(P,S/R)\,\vec{V}(P,S/R_g)\,dm$$

Remplaçons :

$$\vec{\Gamma}(P,S/R) = \left[\frac{d\vec{V}(P,S/R_g)}{dt}\right]_{R_g}$$

pour obtenir :

$$\mathcal{D}(S/R_g)\,\mathcal{V}(S/R_g) = \int_{P\in S} \left[\frac{d\vec{V}(P,S/R_g)}{dt}\right]_{R_g} \vec{V}(P,S/R_g)\,dm$$

Une intégration partielle sous le signe somme permet d'écrire :

$$\mathcal{D}(S/R_g)\,\mathcal{V}(S/R_g) = \frac{1}{2}\int_{P\in S} \frac{d(\vec{V}(P,S/R_g))^2}{dt}dm$$

La distributivité des opérateurs, en appliquant le théorème de conservation de la masse donne :

$$\mathcal{D}(S/R_g)\,\mathcal{V}(S/R_g) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\int_{P\in S} (\vec{V}(P,S/R_g))^2 dm]$$

En utilisant l'énergie cinétique, on obtient :

$$\mathcal{D}(S/R_g)\,\mathcal{V}(S/R_g) = \frac{dT(S/R_g)}{dt}$$

d'où la relation caractérisant le théorème de la puissance pour un solide :

$$\boxed{\frac{dT(S/R_g)}{dt} = P(\overline{S},S/R_g)} \quad [5\text{-}33]$$

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_g, est égale à la puissance développée par les efforts extérieurs à S dans son mouvement par rapport à R_g.

Le théorème de l'énergie puissance fournit une seule équation scalaire, linéairement dépendante des équations déduites du PFD.

2.2.) Cas de deux solides

Soient un système matériel $E = S_1 + S_2$ en mouvement par rapport à un repère R_g. Appliquons le théorème de la puissance à S_1 :

$$\frac{dT(S_1/R_g)}{dt} = P(\overline{S_1},S_1/R_g)$$

Il en est de même avec S_2 :

$$\frac{dT(S_2/R_g)}{dt} = P(\vec{S_2},S_2/R_g)$$

En exprimant les puissances, on a :

$$P(\overline{S_1},S_1/R_g) = \mathcal{T}(\overline{S_1}/S_1)\,\mathcal{V}(S_1/R_g) \qquad P(\overline{S_2},S_2/R_g) = \mathcal{T}(\overline{S_2}/S_2)\,\mathcal{V}(S_2/R_g)$$

Mais :

$$\mathcal{T}(\overline{S_1}/S_1) = \mathcal{T}(\overline{E}/S_1) + \mathcal{T}(S_2/S_1) \qquad \mathcal{T}(\overline{S_2}/S_2) = \mathcal{T}(\overline{E}/S_2) + \mathcal{T}(S_1/S_2)$$

Comme :

$$\frac{dT(S_1/R_g)}{dt} + \frac{dT(S_2/R_g)}{dt} = \frac{dT(E/R_g)}{dt} \qquad \mathcal{T}(S_1/S_2) = -\,\mathcal{T}(S_2/S_1)$$

On obtient la relation finale, valable dans le cas de deux solides :

$$\frac{dT(E/R_g)}{dt} = \sum_{i=1}^{i=2} \mathcal{T}(\overline{E}/S_i)\,\mathcal{V}(S_i/R_g) + \mathcal{T}(S_1/S_2)\,\mathcal{V}(S_2/S_1)$$

Le terme $\mathcal{T}(S_1/S_2)\,\mathcal{V}(S_2/S_1)$ s'interprète comme la puissance développée par les interefforts dans la liaison entre les solides S_1 et S_2.

La sommation correspond à la puissance développée par les actions extérieures au système matériel E.

2.3.) Généralisation

On généralise la relation précédente pour un système matériel E constitué de n solides, par la relation :

$$\frac{dT(E/R_g)}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{T}(\overrightarrow{E}/S_i)\ \mathcal{V}(S_i/R_g) + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=i} \mathcal{T}(S_i/S_j)\ \mathcal{V}(S_j/S_i)$$

La première sommation correspond à la puissance des actions extérieures à E :

$$P(\overline{E},E/R_g) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{T}(\overline{E}/S_i)\ \mathcal{V}(S_i/R_g)$$

La seconde décrit la puissance des actions mécaniques intérieures à E :

$$P_i(E) = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=i} \mathcal{T}(S_i/S_j)\ \mathcal{V}(S_j/S_i)$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{dT(E/R_g)}{dt} = P(\overline{E},E/R_g) + P_i(E)} \quad [5\text{-}34]$$

Le théorème de la puissance s'énonce alors :

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble de solides est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques **extérieures et intérieures** à cet ensemble de solides.

Remarques

• Ce théorème est d'usage délicat lorsque la puissance des actions intérieures à E n'est pas nulle.

• On ne doit prendre en compte que les puissances mécaniques.

2.4.) Théorème de l'énergie

Le théorème de la puissance ne fournit qu'une seule équation scalaire, linéairement dépendante des équations déduites du PFD.

Elle fournit une intégrale première, appelée théorème de l'énergie, si :

• La puissance développée est nulle. On obtient alors :

$$\frac{dT(E/R_g)}{dt} = 0$$

et l'énergie cinétique $T(E/R_g)$ est constante.

• La puissance développée dérive d'une fonction U. Une intégration donne :

$$T(E/R_g) = U + H$$

où H est une constante d'intégration. C'est en particulier le cas quand les seules puissances mises en jeu sont celles des actions de pesanteur.

3.) MOUVEMENTS PARTICULIERS

3.1.) Solide en rotation autour d'un point fixe du galiléen

Soit un solide S en mouvement autour d'un point fixe O d'un repère R_g supposé galiléen.

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\overrightarrow{\delta}(O,S/R_g) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma}(G,S/R_g)\right]_{R_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O,\overline{S}/S)$$

• Si le moment est nul, alors la variation de moment cinétique est nulle et $\overrightarrow{\sigma}(O,S/R_g)$ est un vecteur constant dans R_g.

• Si la projection du moment des forces extérieures sur $\overrightarrow{u}$ fixe dans R_g, est nulle, alors la projection de $\overrightarrow{\sigma}(O,S/R_g)$ sur $\overrightarrow{u}$ est constante.

3.2.) Solide en mouvement autour d'un axe fixe du galiléen

Soient $\vec{u}$ le vecteur unitaire d'un axe fixe par rapport à un repère R_g supposé galiléen et O un point de l'axe.
Si, au cours du temps :

• la résultante des actions mécaniques extérieures est nulle, alors le vecteur $\vec{V}(G,S/R_g)$ est constant dans R_g.

• la projection de la résultante des actions mécaniques extérieures sur le vecteur $\vec{u}$ est nulle, alors le scalaire égal à $\vec{u}\,\vec{V}(G/R_g)$ est une constant dans R_g.

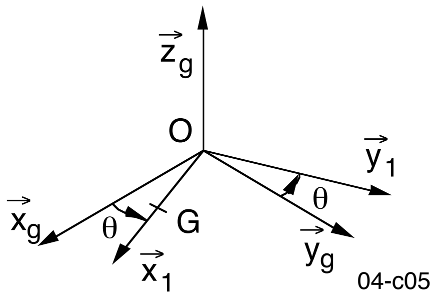
• la projection du moment des actions mécaniques extérieures sur le vecteur $\vec{u}$ est nulle, alors le scalaire égal à $\vec{u}\,\vec{\sigma}(O,S/R_g)$ est une constante dans R_g.

4.) ÉQUILIBRAGE

4.1.) Hypothèses

On considère un bâti 0 auquel est attaché le repère galiléen $R_g\{O,\vec{x_g}, \vec{y_g}, \vec{z_g}\}$.

Un solide 1, de masse m, est lié à R_g par une liaison pivot d'axe $(O,\vec{z_g})$.



Choisissons le repère $R_1\{O,\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}\}$ lié à 1 tel que :

$\vec{OG} = a\,\vec{x_1}$ $\qquad \theta = (\vec{x_g},\vec{x_1})$

L'opérateur d'inertie du solide 1 dans le repère R_1 est :

$$\mathcal{J}(O,1) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_1}$$

Les actions mécaniques extérieures connues sur le solide 1, y compris les actions de pesanteur, sont :

$$\mathcal{T}(e/1) = {}_O\begin{cases} X'\vec{x_1} + Y'\vec{y_1} + Z'\vec{z_1} \\ L'\vec{x_1} + M'\vec{y_1} + N'\vec{z_1} \end{cases}$$

Les actions mécaniques extérieures inconnues sur le solide 1 sont :

$$\mathcal{T}(0/1) = {}_O\begin{cases} X\vec{x_1} + Y\vec{y_1} + Z\vec{z_1} \\ L\vec{x_1} + M\vec{y_1} + N\vec{z_1} \end{cases}$$

où N est nul si le pivot est parfait.

4.2.) Cinématique

Le torseur cinématique du mouvement du solide 1 par rapport ai bâti 0 est :

$$\mathcal{V}(1/0) = {}_O\begin{cases} \dot{\theta}\,\vec{z_1} \\ 0 \end{cases}$$

La vitesse de G dans R_g est donc :

$$\vec{V}(G,1/0) = a\,\dot{\theta}\,\vec{y_1}$$

Par dérivation, l'accélération de G dans R_g est :

$$\vec{\Gamma}(G,1/0) = a\,(\ddot{\theta}\vec{y_1} - \dot{\theta}^2\vec{x_1})$$

4.3.) Cinétique

Le point O étant fixe dans R_g, on a :

$$\vec{\sigma}(O,1/0) = \mathcal{J}(O,S)\,\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta}\,(-E\,\vec{x_1} - D\,\vec{y_1} + C\,\vec{z_1})$$

puis :

$$\vec{\delta}(O,1/0) = \left[\frac{d\,\vec{\sigma}(O,1/0)}{dt}\right]_{R_g}$$

En effectuant la dérivation, on obtient :

$$\vec{\delta}(O,1/0) = \ddot{\theta}\,(-E\,\vec{x_1} - D\,\vec{y_1} + C\,\vec{z_1}) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \dot{\theta}\,(-E\,\vec{x_1} - D\,\vec{y_1} + C\,\vec{z_1})$$

soit :

$$\vec{\delta}(O,1/0) = (-E\,\ddot{\theta} + D\,\dot{\theta}^2)\,\vec{x_1} + (-D\,\ddot{\theta} - E\,\dot{\theta}^2)\,\vec{y_1} + C\,\ddot{\theta}\,\vec{z_1}$$

4.4.) Principe fondamental de la dynamique

En appliquant le PFD au solide 1, on a : $\mathcal{T}(0/1) + \mathcal{T}(e/1) = \mathcal{D}(1/0)$

Écrivons cette égalité en O, en projection sur R_1 :

$-m\,a\,\dot{\theta}^2 = X + X'$ $\quad$ $m\,a\,\ddot{\theta} = Y + Y'$ $\quad$ $0 = Z + Z'$

$-E\,\ddot{\theta} + D\,\dot{\theta}^2 = L + L'$ $\quad$ $-D\,\ddot{\theta} - E\,\dot{\theta}^2 = M + M'$ $\quad$ $C\,\ddot{\theta} = N + N'$

On a donc 7 inconnues : X, Y, Z, L, M, N et θ.

4.5.) Liaison parfaite

Dans ce cas N = 0. Il reste donc 6 équations et 6 inconnues :

$-m\,a\,\dot{\theta}^2 = X + X'$ $\quad$ $m\,a\,\ddot{\theta} = Y + Y'$ $\quad$ $0 = Z + Z'$

$-E\,\ddot{\theta} + D\,\dot{\theta}^2 = L + L'$ $\quad$ $-D\,\ddot{\theta} - E\,\dot{\theta}^2 = M + M'$ $\quad$ $C\,\ddot{\theta} = N'$

On pourrait également se fixer une équation de frottement liant N à θ.

4.6.) Définition de l'équilibrage

Un solide S en rotation autour d'un axe fixe dans un repère, est dit équilibré si le torseur de liaison est indépendant de la fréquence de rotation.

Les conditions d'équilibrage sont satisfaites si :

$$\boxed{a = 0} \quad [5\text{-}35]$$

C'est l'équilibrage dit "statique", impliquant que G appartienne à l'axe de rotation.

Mais il faut de plus un équilibrage "dynamique" :

$$\boxed{D = 0 \text{ et } E = 0} \quad [5\text{-}36]$$

4.7.) Équilibrage par masses additionnelles

4.7.a) Équilibrage à une seule masse

On désire placer une masse ponctuelle M_0 située au point P_0, fixe dans S, tel que l'ensemble M_0+S soit équilibré.

Le point P_0 est donné par : $\vec{OP_0} = x\,\vec{x_1} + y\,\vec{y_1} + z\,\vec{z_1}$

L'opérateur d'inertie de l'ensemble M + S est :

$$\mathcal{J}(O,M_0+S) = \begin{pmatrix} A+M_0\,(y^2+z^2) & -F-M_0\,x\,y & -E-M_0\,x\,z \\ -F-M_0\,x\,y & B+M_0\,(x^2+z^2) & -D-M_0\,y\,z \\ -E-M_0\,x\,z & -D-M_0\,y\,z & C+M_0\,(x^2+y^2) \end{pmatrix}_R$$

En considérant M_0 + S, les équations deviennent :

$$(-m\,a - M_0\,x)\,\dot{\theta}^2 = X + X' \qquad -M_0\,y\,\ddot{\theta} = Y + Y' \qquad 0 = Z + Z'$$

$$(-E - M_0\,x\,z)\,\ddot{\theta} + (D + M_0\,y\,z)\,\dot{\theta}^2 = L + L' \qquad (-D - M_0\,y\,z)\,\ddot{\theta} + (-E - M_0\,x\,z)\,\dot{\theta}^2 = M + M'$$

$$\left(C + M_0\,(x^2+y^2)\right)\ddot{\theta} = N'$$

Pour qu'elles soient indépendantes de $\dot{\theta}$, il faut donc que :

$$M\,a + M_0\,x = 0 \qquad M_0\,y = 0 \qquad D + M_0\,y\,z = 0 \qquad E + M_0\,x\,z = 0$$

D'où immédiatement :

$$y = 0 \qquad D = 0 \qquad x = -\,a\,\frac{m}{M_0} \qquad z = \frac{E}{m\,a}$$

Ceci n'est donc possible que dans le cas particulier où D est nul.

4.7.b) Équilibrage à deux masses

On adjoint au solide S les masses M_1 en P_1 et M_2 en P_2.

On pose :

$$\vec{OP_1} = x_1\,\vec{x_1} + y_1\,\vec{y_1} + z_1\,\vec{z_1} \qquad \vec{OP_2} = x_2\,\vec{x_1} + y_2\,\vec{y_1} + z_2\,\vec{z_1}$$

Pour obtenir l'équilibrage global de l'ensemble S+M_1+M_2, il faut satisfaire les équations :

$$m\,a + M_1\,x_1 + M_2\,x_2 = 0 \qquad M_1\,y_1 + M_2\,y_2 = 0$$

$$D + M_1\,y_1\,z_1 + M_2\,y_2\,z_2 = 0 \qquad E + M_1\,x_1\,z_1 + M_2\,x_2\,z_2 = 0$$

On obtient donc 4 équations à 8 inconnues. Ce qui laisse la possibilité de fixer des conditions complémentaires.

4.7.c) Roue de véhicule

Il est plus facile de placer les masses additionnelles sur le diamètre extérieur de la jante. La distance $z_1 - z_2$ doit être égale à la largeur de la jante.

En appelant R le rayon extérieur de la jante, e sa largeur, θ_1 et θ_2 les angles de mise en place, on obtient :

$$x_1 = R\cos\theta_1 \qquad y_1 = R\sin\theta_1 \qquad z_1 = 0$$

$$x_2 = R\cos\theta_2 \qquad y_2 = R\sin\theta_2 \qquad z_2 = e$$

En remplaçant dans les équations précédentes, il vient :

$$ma + M_1R\cos\theta_1 + M_2\,R\cos\theta_2 = 0 \qquad M_1\,R\sin\theta_1 + M_2\,R\sin\theta_2 = 0$$

$$D + M_2R\,e\sin\theta_2 = 0 \qquad E + M_2R\,e\cos\theta_2 = 0$$

Ces quatre équations ont pour inconnues : M_1, θ_1, M_2 et θ_2.

Elles se résolvent en :

$$\tan\theta_2 = \frac{D}{E} \qquad \tan\theta_1 = \frac{D}{E - m\,a\,e} \qquad M_2 = \frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{e\,R} \qquad M_1 = \frac{\sqrt{D^2 + (E - m\,a\,e)^2}}{e\,R}$$

5.) MOTEURS

5.1.) Définition

Un moteur peut fournir de l'énergie mécanique à partir d'un autre type d'énergie.

On sait principalement réaliser des moteurs électriques, thermiques, hydrauliques et pneumatiques.

5.2.) Mouvements

On trouve principalement deux types de moteurs :

• mouvement circulaire

• mouvement linéaire.

5.3.) Accouplements

On considère que les moteurs sont liés aux systèmes mécaniques étudiés par des accouplements qui n'introduisent pas d'efforts parasites.

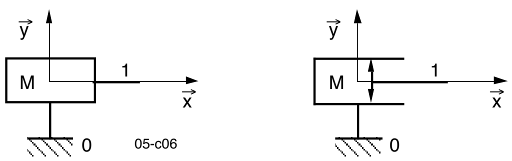
Les actions mécaniques des moteurs sur les pièces entraînées sont alors du type :

$\mathcal{T}(M/1) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ L\,\vec{x} \end{matrix} \right.$ $\qquad$ $\mathcal{T}(M/1) = {}_{O}\left\{ \begin{matrix} X\,\vec{x} \\ 0 \end{matrix} \right.$

Il ne faut pas penser que les quantités caractérisant les actions mécaniques sont des constantes.

Par contre on peut calculer un couple moyen ou un effort moyen.

5.4.) Schémas



Il faut faire très attention à la pièce à laquelle est liée le bâti du moteur. Lorsque que c'est le bâti général, on ne figure pas toujours explicitement la liaison pour faciliter la lecture des schémas.

6.) MÉTHODE GÉNÉRALE D'ÉTUDE DES SYSTÈMES DE SOLIDES

On se reportera avec profit à la cinématique et à la statique.

6.1.) Schéma de principe

Il convient tout d'abord de transformer l'ensemble considéré en un schéma de principe, plus directement utilisable.

À partir de l'ensemble réel ou d'un plan, la méthode générale consiste à regrouper d'abord les pièces mécaniques qui font l'objet de liaisons à mobilité zéro (liaison complète). Les sous-ensembles ainsi obtenus peuvent être différenciés par des hachures ou des couleurs différentes.

On examine les surfaces de contact en enlevant les éléments intermédiaires tels que les roulements. On définit ensuite les liaisons entre ces solides pris deux à deux, en déterminant les mouvements relatifs possibles. La représentation obtenue est quelquefois appelée "Schéma minimal global". Mais pour une meilleure compréhension du mécanisme, ce schéma peut être simplifié, indépendamment de toutes notions de dimensions, en ne tenant compte que des fonctions globales des liaisons.

C'est le schéma de principe du mécanisme, plan ou spatial, qui est l'outil privilégié de la réflexion. Cette étape de modélisation est très délicate à réaliser.

Deux mécanismes ayant le même schéma de principe devraient remplir la même fonction. En dehors de toutes autres considérations, ils sont équivalents du point de vue du fonctionnement.

On peut ainsi définir des classes d'équivalence de mécanismes ayant même fonction.

6.2.) Numéroter les solides

Il faut ensuite numéroter le plus clairement possible tous les solides, en attribuant conventionnellement le numéro 0 au bâti ou au solide de référence.

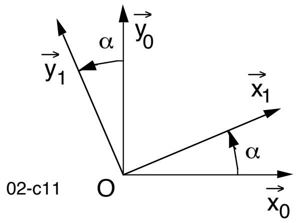
Généralement il n'y a pas de correspondance entre les repères de la nomenclature et ceux affectés aux sous-ensembles du schéma de principe.

6.3.) Établir les repères et paramétrer

On attribue à chaque solide un repère de référence, en vertu de l'équivalence solide-repère. Ce repère doit tenir compte des points particuliers du solide. Les orientations des vecteurs unitaires doivent être déterminées avec soin.

Les repères doivent ensuite être mis en position, de manière unique, les uns par rapport aux autres.

On installe ainsi un paramétrage de longueurs et d'angles, qui doit rendre compte de façon biunivoque de la configuration du mécanisme.



Il est nécessaire d'établir, à ce stade, des schémas de passage d'un repère à l'autre. Ces schémas feront apparaître les angles **petits (inférieurs à 30°) et positifs**. De cette façon, on ne peut se tromper sur les signes. De plus, le cosinus est plus grand que le sinus.

Le vecteur perpendiculaire au plan est obligatoirement dirigé vers l'avant pour éviter des confusions dans le signe des produits vectoriels.

Il convient de bien distinguer dans les paramètres, ceux qui dépendent du temps, si possible désignés par des lettres grecques et ceux qui fixent les dimensions ou les réglages d'un mécanisme, si possible désignés par des lettres latines.

6.4.) Caractériser les liaisons

6.4.a) Cinématique

Établir pour chaque liaison le torseur cinématique associé, relativement au paramétrage effectué. Ce torseur doit être exprimé en un point où sa forme est la plus simple. Si l'on ne peut déterminer directement les projections nulles, on a recours aux conditions vectorielles, qui doivent être exprimées avec les paramètres du problème.

6.4.b) Actions mécaniques

On détermine pour chaque liaison les particularités du torseur associé aux actions mécaniques. Il est souhaitable que le point choisi soit le même que celui utilisé en cinématique. On établit alors les projections positives des actions inconnues sur les repères de références. Sur les schémas, ces efforts inconnus doivent être représentés positifs.

Deux méthodes sont possibles :

• Projeter sur le repère lié au bâti et écrire les équations de liaison.

• Projeter directement sur un repère lié à l'un des solides de la liaison en tenant compte directement des particularités.

Pour les liaisons parfaites, il faut vérifier à ce niveau, en faisant le comoment du torseur cinématique et du torseur d'action mécanique, que la puissance est bien nulle.

6.4.c) Liaison avec frottement

On obtient toujours une équation et une inéquation. On note f le coefficient de frottement.

Sans glissement

Il existe des points de vitesse nulle et l'action tangentielle est limitée : $\vec{V}(I,2/1) = 0$ $\quad \|\vec{T}_{12}\| < f\,|N_{12}|$

Avec glissement

Il n'existe pas de point de vitesse nulle, mais l'action tangentielle est connue :

$\vec{V}(I,2/1) \neq 0$ $\quad \vec{T}_{12}\,\vec{V}(I,2/1) < 0$ $\quad \vec{T}_{12} \wedge \vec{V}(I,2/1) = 0$ $\quad \|\vec{T}_{12}\| = f\,|N_{12}|$

6.4.d) Problème plan

Le problème est dit plan si, pour tout solide i et tout solide j, on a :

$$\mathcal{V}(j/i) = \left\{\begin{array}{l} r\,\vec{z} \\ u\,\vec{x} + v\,\vec{y} \end{array}\right._A \qquad \mathcal{T}(i/j) = \left\{\begin{array}{l} X\,\vec{x} + Y\,\vec{y} \\ N\,\vec{z} \end{array}\right._A \qquad \mathcal{D}(i/0) = \left\{\begin{array}{l} G\,\vec{x} + H\,\vec{y} \\ F\,\vec{z} \end{array}\right._A$$

6.5.) Cinématique

On détermine les boucles cinématiques, relativement au paramétrage effectué. Chaque boucle permet d'écrire une équation torsorielle du type :

$\mathcal{V}(a/b) + \ldots + \mathcal{V}(d/e) + \mathcal{V}(e/a) = 0$

Elle donne au maximum six équations scalaires.

En appelant b le nombre de boucles indépendantes du système, on a 6 b équations scalaires pour un problème spatial et 3 b équations scalaires pour un problème plan.

Pour le calcul effectif, il faut choisir les points les plus simples, en général les "centres" des liaisons et tenir compte des équations complémentaires. Des produits scalaires convenables permettent souvent d'éliminer les inconnues indésirables et d'obtenir directement les relations cherchées.

Dans la majorité des cas, les équations trouvées sont intégrables (sans oublier la constante). On peut alors souvent trouver une interprétation géométrique, qui apparaît comme lumineuse… une fois le problème résolu. Ces intégrations constituent une bonne vérification.

6.6.) Application du PFD

Pour appliquer le PFD, il faut définir très précisément le solide ou l'ensemble de solides que l'on considère. Pour un ensemble constitué d'un bâti et de n solides, on ne peut écrire que n équations torsorielles indépendantes. Toute équation supplémentaire est nécessairement linéairement dépendante des précédentes.

Il n'est pas utile de considérer le bâti, car on ferait apparaître les actions de l'extérieur sur celui-ci, actions qui ne sont en général pas recherchées.

6.7.) Résolution

Le plus souvent, il faut commencer par considérer les solides "sans masse", ce qui permet d'appliquer le PFS.

Dans le cas général, il faut utiliser les composantes nulles des torseurs d'actions mécaniques.

6.7.a) Sans glissement ou sans frottement

Le premier objectif est de trouver les équations de mouvement en éliminant les actions mécaniques inconnues.

La connaissance des mouvements permet ensuite de déterminer les actions mécaniques.

6.7.b) Avec glissement et frottement

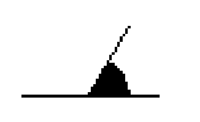
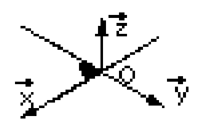
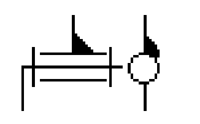
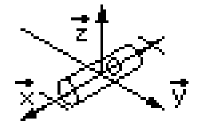
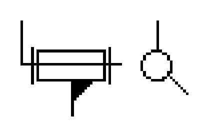
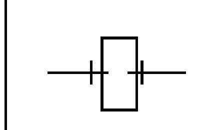
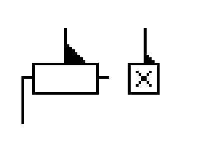
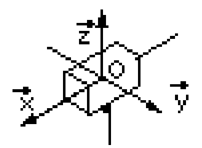
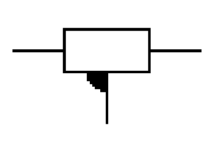
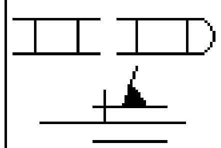
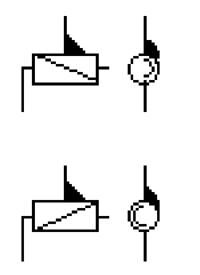
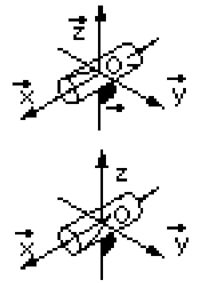
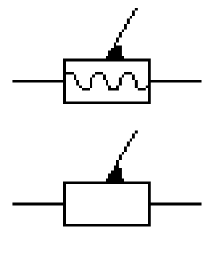
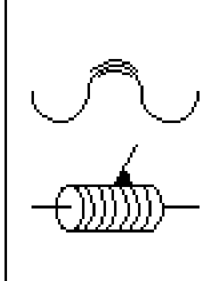
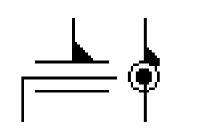
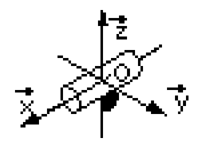
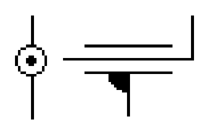
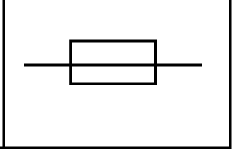
Il faut d'abord déterminer les actions "normales". On obtient ensuite les actions "tangentielles" à l'aide des lois de COULOMB. Le mouvement se détermine enfin, en éliminant les efforts.

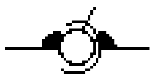
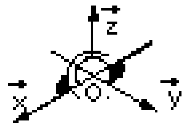
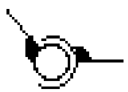
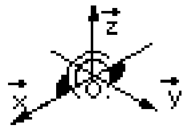
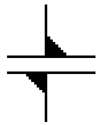
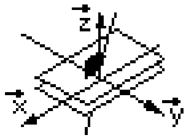
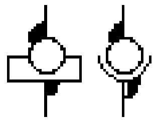
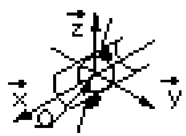
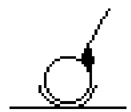
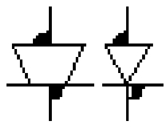
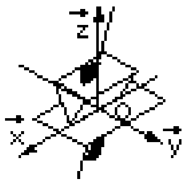
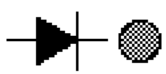
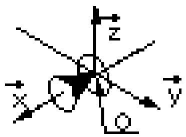
6.7.c) Remarques

Le théorème de la puissance est très utile pour des mouvements dépendant d'un seul paramètre. Il peut également donner des intégrales premières.

C'est, en toute fin de résolution, si l'on ne peut pas faire autrement, que l'on calcule les composantes nécessaires des torseurs dynamiques.

6.8.) Tableau récapitulatif des liaisons normalisées

TABLEAU RÉCAPITULATIF des LIAISONS SIMPLES							
			Norme E04-015 octobre 1984			Norme ISO 3952-1 mai 1995	
Noms	n_c	n_s	Projection	Perspective	Torseurs cinématiques associés	Symboles de base	Symboles admissibles
Encastrement	0	6			$\mathcal{V}(2/1) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_P \quad \forall P$		
Pivot	1	5			$\mathcal{V}(2/1) = \left\{ \begin{matrix} p\vec{x} \\ 0 \end{matrix} \right\}_P \quad \forall P \in (O, \vec{x})$		
Glissière	1	5			$\mathcal{V}(2/1) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ u\vec{x} \end{matrix} \right\}_P \quad \forall P$		
Hélicoïdale	1	5			$\mathcal{V}(2/1) = \left\{ \begin{matrix} p\vec{x} \\ u\vec{x} \end{matrix} \right\}_P \quad \forall P \in (O, \vec{x})$ avec $u = \lambda p$ et $\left\{ \begin{matrix} p > 0 \text{ pour un pas à droite} \\ p < 0 \text{ pour un pas à gauche} \end{matrix} \right.$		
Pivot glissant	2	4			$\mathcal{V}(2/1) = \left\{ \begin{matrix} p\vec{x} \\ u\vec{x} \end{matrix} \right\}_P \quad \forall P \in (O, \vec{x})$		

			Norme E04-015 octobre 1984			Norme ISO 3952-1 mai 1995	
Noms	n_c	n_s	Projection	Perspective	Torseurs cinématiques associés	Symboles de base	Symboles admissibles
Sphérique à doigt	2	4			$\mathcal{V}(2/1) = {}_O\left\{\begin{matrix} p\vec{x} + r\vec{z} \\ 0 \end{matrix}\right.$ au point O		
Rotule ou (liaison sphérique)	3	3			$\mathcal{V}(2/1) = {}_O\left\{\begin{matrix} p\vec{x} + q\vec{y}\ r\vec{z} \\ 0 \end{matrix}\right.$ au point O		
Appui plan	3	3			$\mathcal{V}(2/1) = {}_P\left\{\begin{matrix} r\vec{z} \\ u\vec{x} + v\vec{y} \end{matrix}\right.$ $\forall P$		
Linéaire annulaire Sphère-cylindre	4	2			$\mathcal{V}(2/1) = {}_O\left\{\begin{matrix} p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ u\vec{x} \end{matrix}\right.$ au point O		
Linéaire rectiligne	5	1			$\mathcal{V}(2/1) = {}_P\left\{\begin{matrix} p\vec{x} + r\vec{z} \\ u\vec{x} + v\vec{y} \end{matrix}\right.$ $\forall P \in \{O, \vec{x}, \vec{z}\}$		
Ponctuelle sphèrte-plan					$\mathcal{V}(2/1) = {}_O\left\{\begin{matrix} p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \\ v\vec{y} + w\vec{z} \end{matrix}\right.$ $\forall P \in \{O, \vec{x}\}$