2. La cinématique en deux dimensions

2.1. La première loi de Newton

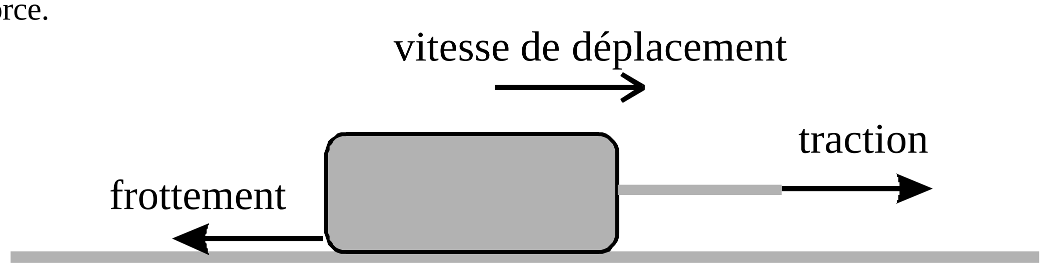
En 1687, Newton énonça sa première loi du mouvement, qu’il déduit des travaux de Galilée et de Descartes :

Première loi de Newton	Tout corps conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme à moins que des forces n’agissent sur lui et ne le contraignent à changer d’état.

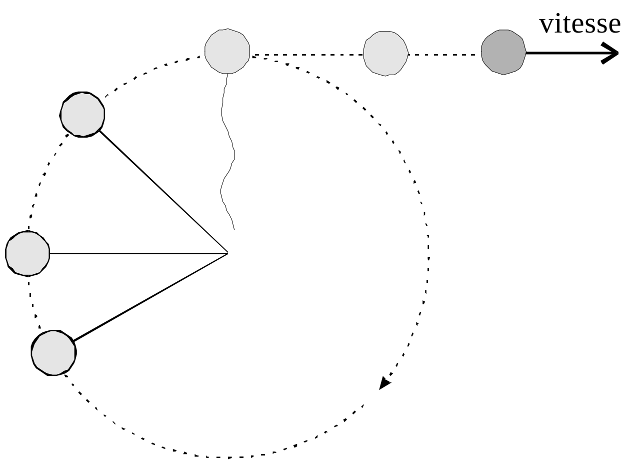
Cette loi fait intervenir une propriété appelée inertie :

Inertie	L’inertie d’un corps est sa tendance à résister à toute variation de son état de mouvement.

En d’autres termes, un objet a tendance à rester au repos s’il est au repos et à rester en mouvement à vitesse constante s’il est en mouvement.
La première loi implique donc qu’une variation de vitesse (une accélération) est produite par une force.



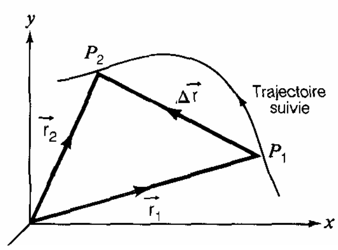
Lorsqu’on exerce une traction sur le bloc représenté, on peut le déplacer sur la droite. Il est soumis à deux forces, l’une de traction dans la ficelle, l’autre de frottement sur le sol. Si les modules de ces forces sont identiques, le bloc se déplace à vitesse constante.



Si on fait tourner une pierre attachée à une corde, sa trajectoire sera circulaire, la vitesse de la pierre sera dirigée selon la tangente en tout point. A cause de son inertie, la pierre a tendance à poursuivre son chemin en ligne droite. La traction dans la ficelle l’empêche de suivre ce trajet naturel d’inertie.
Si la corde lâche, la pierre ne sera plus soumise à aucune force et ainsi, elle obéira à la première loi de Newton.

2.2. Le mouvement à deux dimensions

La vitesse et l’accélération ont été présentées en discipline fondamentale, lors de l’étude du mouvement rectiligne. Nous allons les étendre au plan (deux dimensions) en insistant sur leur nature vectorielle.



Dans le plan, le vecteur position $\vec{r}$ d'une particule de coordonnées (x, y) s'écrit : $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Si la particule se déplace du point P_1 au point P_2, son déplacement est :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

On observe alors que :

$$\vec{r}_2 = \Delta\vec{r} + \vec{r}_1$$

La vitesse moyenne est définie comme étant le rapport du déplacement et de l'intervalle de temps :

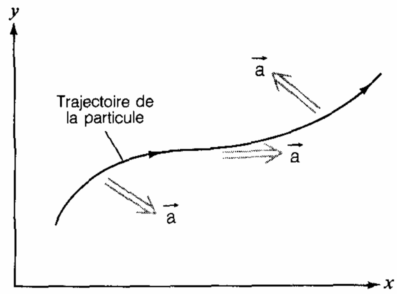
$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

et la vitesse instantanée :

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ avec $\Delta t \to 0$, c'est-à-dire très petit.

Et

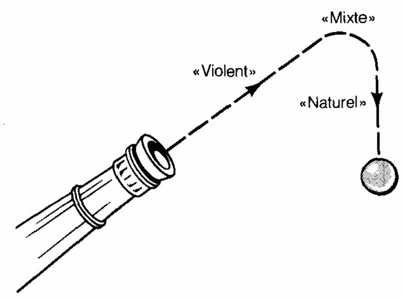
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$



L'accélération instantanée est égale au taux de variation de la vitesse par rapport au temps :

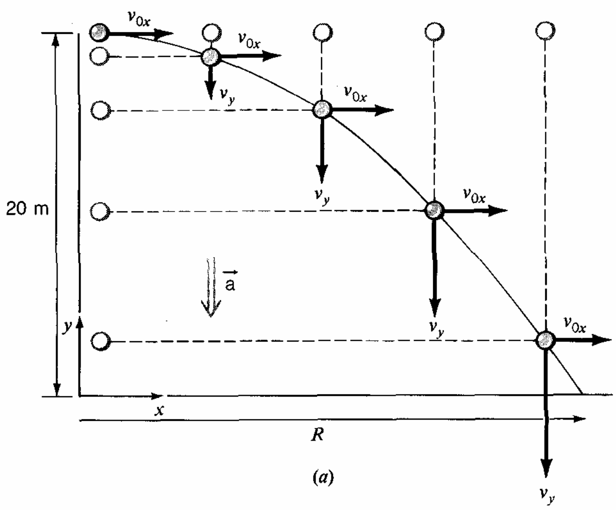
$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

2.3. Mouvement à accélération constante, le mouvement d'un projectile



Jusqu'au XVI[e] siècle, la trajectoire d'un projectile était représentée comme sur le dessin. On pensait en effet qu'en tirant un boulet de canon, on lui « imprimait » une force capable de produire un mouvement « violent » en ligne droite. À cause de la résistance de l'air, il y avait ensuite une région de mouvement mixte (mouvement « violent » et mouvement « naturel » orienté verticalement vers le bas). Enfin, le mouvement « naturel » vers le bas devenait prédominant. Cette description était due en partie à l'incapacité des savants de l'époque de combiner deux forces qui n'étaient pas parallèles : la « force du canon » dans la direction de la ligne de tir, et l'attraction de la gravité, dirigée vers le bas. De toute façon, le problème provenait de l'hypothèse fausse voulant que le canon continue d'influencer le mouvement du boulet *après* que celui-ci ait été tiré. En réalité, si l'on ne tient pas compte de la résistance de l'air, la *seule* force agissant sur le boulet une fois qu'il a été tiré est la force gravitationnelle. Au début, Galilée croyait lui aussi que le mouvement d'une particule était régi par la force qu'on lui « imprimait », laquelle diminuait progressivement. (D'ailleurs, l'idée selon laquelle la force qui sert à lancer une balle en l'air reste avec la balle est encore assez répandue. La « force de la main » est censée être compensée peu à peu par la force de gravité, qui finit par faire tomber la balle. C'est une idée fausse qui remonte loin ! Ce n'est qu'après avoir énoncé son principe d'inertie que Galilée pu résoudre correctement le problème du mouvement d'un projectile.

Pour illustrer la caractéristique essentielle du mouvement d'un projectile, Galilée proposa l'expérience suivante. Supposons qu'une boule tombe du mât d'un navire *se* déplaçant à vitesse constante. Où va-t-elle tomber ? Galilée expliquait qu'au moment où elle est lâchée du sommet du mât, la boule a la même vitesse horizontale que le navire. Si l'on néglige l'effet de la résistance de l'air, elle va *garder* cette composante horizontale de la vitesse, même en accélérant dans la direction verticale. Elle va par conséquent tomber au pied du mât.



Galilée avait donc dégagé l'idée cruciale selon laquelle un projectile près de la surface de la Terre a *deux mouvements indépendants:* un ***mouvement horizontal à vitesse constante et un mouvement vertical dû à l'accélération gravitationnelle***.

Pour résoudre n'importe quel problème de mouvement d'un projectile, on doit choisir un système de coordonnées et préciser l'origine. Si l'axe des x est horizontal et l'axe des y est vertical et orienté vers le haut, alors

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

Les équations de la cinématique pour un projectile près de la Terre :

$$\boxed{\begin{aligned} &x = v_{0x} \cdot t \\ &v_y = v_{0y} - g \cdot t \\ &y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ &v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot (y - y_0) \end{aligned}}$$

avec les indications suivantes :

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Applications :

1 Une balle est lancée horizontalement à 15 m/s d'une falaise de 20 *m* de hauteur.
Déterminer la durée du mouvement en l'air, la portée horizontale du tir.

2 Un projectile est lancé vers le haut à partir du sol avec une vitesse initiale v_0 selon un angle θ par rapport à l'horizontale.
Déterminer la portée horizontale et la forme de la trajectoire, l'angle de tir pour atteindre une cible.

La portée horizontale :

$$x = v_0 \cos\theta \ t \qquad 1)$$

$$y = v_0 \sin\theta \ t - \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad 2)$$

On doit d'abord trouver la durée de la trajectoire. On remarque que $y = 0$ au départ comme à l'arrivée. D'après la seconde équation, on trouve :

$$t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

On remplace *t* dans la première équation et on trouve *R*, la portée du tir (on utilise $\sin 2\theta = 2\sin\theta\ \cos\theta$) :

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Donc la **portée est maximale pour un tir à** $\theta = 45°$ $(\sin 90 = 1)$

Forme de la trajectoire :
Pour trouver la forme de la trajectoire, il faut exprimer *y* en fonction de *x*. On tire donc *t* de la première équation :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

et on remplace dans la seconde. Cela donne :

$$y = \tan\theta\ x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} x^2$$

Cette équation est de la forme d'une équation du second degré. **La forme de la trajectoire est une parabole**.

L'angle de tir pour atteindre une cible :
En fixant la grandeur de la vitesse de départ, quel doit être l'angle de tir pour atteindre une cible ?
En utilisant la formule trigonométrique :

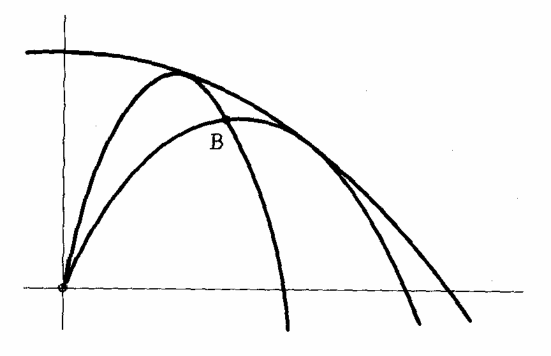
$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

dans la formule obtenue précédemment,

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + \tan^2\theta\right)$$

Cette équation peut ne pas avoir de solution ou éventuellement deux solutions :

$$\tan\theta = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2v_0^2 gy - g^2x^2}}{gx}$$



Pour qu'une solution soit possible, il faut que :

$$v_0^4 - 2v_0^2 gy - g^2x^2 \geq 0$$

La frontière du domaine est de nouveau l'équation d'une parabole. Tout point situé au-dessous de cette parabole peut être atteint par le projectile, tout point situé au-dessus ne peut pas être atteint. On l'appelle la **parabole de sûreté**.

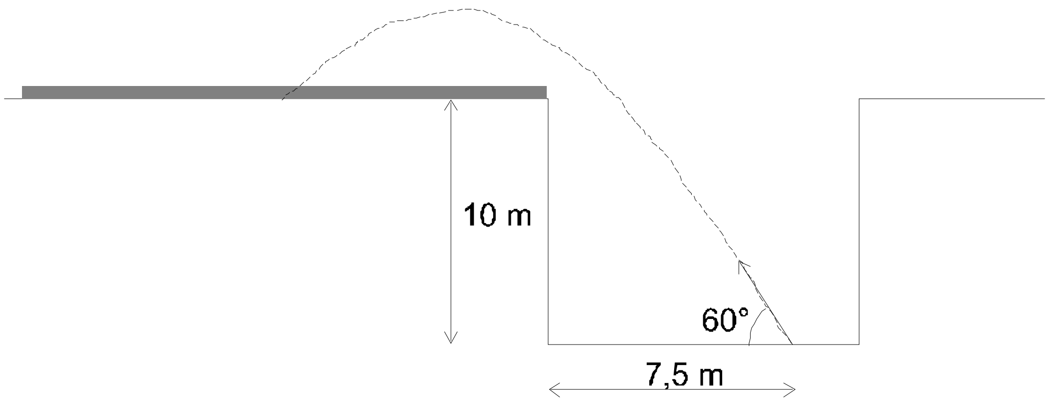
3 Une balle est lancée vers le bas du toit d'un bâtiment haut de 45 *m* avec une vitesse faisant une angle θ avec l'horizontale. Elle touche le sol 2 *s* plus tard en un point situé à 30 *m* du pied du bâtiment. Trouver la vitesse de départ.

2.4. Exercices.

1. Le pilote d'un avion volant à 130 *km/h*, à l'horizontale, veut larguer des médicaments sur la place d'une ville. Il vole à 200 *m* au dessus du sol au moment où il effectue le largage.
   a) Combien de secondes avant que l'avion ne passe directement au dessus de la place devrait-il lâcher son colis ?
   b) A quelle distance horizontale de l'objectif le pilote commandera-t-il son largage ?

2. Un joueur de basket des *Harlem Globe Trotter* est capable de lancer sa balle depuis la ligne médiane et de mettre un panier. La distance entre le panneau et la ligne médiane est de 11,8 *m*, la hauteur du panier est de 3,05 *m*. Le joueur lance sa balle en la relevant de 15°. Le ballon est lancé d'une hauteur de 2 *m*.
   Déterminer la vitesse de départ de la balle.

3. Une pierre est lancée vers le haut, selon un angle de 60° par rapport à l'horizontale, depuis le fond d'un puits de 10 *m*. La vitesse initiale de la pierre est de 25 *m/s*. Elle retombe ensuite au bord du puits, dans l'herbe.
   a) Calculer la hauteur maximale, au dessus du sol, atteinte par la pierre.
   b) A quelle distance du bord du puits se trouve-t-elle lorsqu'elle touche le sol ?
   c) Calculer, les composantes de sa vitesse lorsque la pierre tombe au sol.



4. Un lanceur de poids propulse le poids à 42° par rapport à l'horizontale à partir d'une hauteur de 2,1 *m*. Le poids touche le sol 17 *m* plus loin. Si se second jet est effectué à un angle de 40°, quel sera l'effet sur la portée du jet ?