جامعة الهضاب / كلية العلوم الإنسانية والعلوم الاجتماعية / قسم الفلسفة

المحاضرة الثانية: **المنطق الرياضي الحديث من خلال أعلامه**

الفئة المستهدفة: **السنة الثانية ليسانس فلسفة**

**الأستاذ ك. كربوش**

**مدخل**: مد طالعت في كتب الفلسفة والمنطق تشديد راسل على وصل المنطق بالرياضيات أدركت أن الفيلسوف والمنطقي راسل قد اهتدى لدلالة الوصل المنطقية بينهما التي هي المنطق الرياضي، أو ما اصطلح عليه باللوجستيك (رد الرياضيات إلى أصول منطقية). ولا شك أن ثمة استمرارية لزومية تنبئنا عنها أبحاث الرياضيات والفلسفة الرياضية إذ تستوثق أنساقها وقيمها بقواعد ومعايير منطقية خالصة، عالقة بشؤون الاستدلال والبرهان وقوانينهما. بل أضحى اليوم واقع الدراسات والأبحاث المنطقية مقصورا ـــ في دوائر علمية وفلسفية خاصة ــ على قضايا المنطق الرياضي وحسب. ولا يعلم للمنطق الرياضي أثر أو تأثير على مناحي المعرفة إجمالا إلا من خلال تقدم صنائع العقل الرياضي، التي نظر وأرسى أسسسها أعلام المنطق الرياضي الحديث والمعاصر.

**المنطق الرياضي الحديث من خلال أعلامه**:

**01 ـــ المنطق الرياضي في أعمال رودلف كارناب**: تتلمذ كارناب على يد المنطقي الفذ غوتلوب فريجه مثلما انكب على دراسة وتحليل نظرية راسل في المنطق الرياضي، أدرك أهمية وضرورة التفكير الرياضي لإقامة أسس التفكير الفلسفي والعلمي وكذا المنطقي. عرض أهم أعماله المنطقية في كتابه: ' البناء المنطقي للعالم والمسائل الزائفة في الفلسفة' " الذي نشره عام 1927كشف من خلال دراسته أعمال برتراند راسل من جهة إلى الأهمية الأساسية للرياضيات في تشكيل نسق المعرفة، ومن جهة أخرى إلى خاصيته الصورية والمنطقية الخالصة، التي تقوم عليها استقلاليتها عن عرضية العالم الواقعي. تمثل هذه الرؤى أساسا لكتابي وهي الرؤى التي تطورت فيما بعد من خلال النقاشات ضمن حلقة فيينا لشليك وتحت تأثير أفكار فيتجينشتاين إلى نمط التفكير الموسوم ب حلقة فيينا". (راسل برتراند: البناء المنطقي للعالم والمسائل الزائفة في الفلسفة'، ص 14). تأثر كارناب بأعمال فريجه وهوايتهد وراسل المنطقية فيما له صلة بنظرية مفهومية عامة للعلاقات وخصائصها البنيوية، مثلما اهتم بتبيان البنية المفهومية للرياضيات من خلال تعريف الأعداد والدالات العددية انطلاقا من مفاهيم منطقية خالصة. عرض في مقالات له النظرية الماصدقية بأن اقترح صيغة تقر أن أي عبارة غير ماصدقية قابلة للترجمة إلى عبارة باللغة الماصدقية مكافئة لها منطقيا.

**02 ـــ النزعة المنطقية الرياضية عند فريدريك غودل**: غودل عالم رياضيات نمساوي، منطقي عاش الفترة بين (1906 ــ 1943م) أثبت مبرهنة عدم الاكتمال، وتلك مبرهنة نظرية منطوقها عذم اكتمال الأنساق الصورية، أو تلك التي تفترض الصياغة الصورية لعلم حساب الأعداد الطبيعية. وقد بيّن أن مثل تلك الأنساق إنما تحتوي على قضايا هي داخل إطارها مما لا يمكن البرهنة عليها ولا يمكن رفضها على السواء. وقد تسبب الفرض الذي قدّمه غودل لقيام البحث في حدود الأنساق الصورية على أيدي ألونزو تشيرتش وستيفن لول كلين، وتارسكي، وغيرهم. وبلغ البحث ذروته في الاستنباط الفلسفي الأساسي القائل بأن الصياغة الصورية بطريقة كاملة للمعرفة العلمية مستحيلة. وقد برهن غودل عام 1931 على أن كل نظام كاف للتعبير عن علم الحساب هو بالضرورة غير مكتمل، وأن إحدى قضايا النظام غير قابلة للتقرير هي بالضبط تلك التي تؤكد أنه غير متناقض. وتعتبر مبرهنة غودل خلال العقد الممتد من 1930 إلى 1940 الحدث الأبرز في تاريخ المنطق المعاصر، خاصة وأنه يؤسس لتمايز فاصل بين أسلوب اللوجيستيك الكلاسيكي وبين نظام المنطق المعاصر.

**03 ـــ تارسكي ألفريد** (1902 ـــ 1983م) : فيلسوف ومنطقي أمريكي معاصر من أصول بولونية، طوّر ابتداء من عام 1930 فرعا جديدا في المنطق أسماه السيمانطيقا المنطقية، كما أدخل مفهوم مابعد المنطق، أسهم في تطوير نظرية النماذج. من مؤلفاته: 'مدخل إلى المنطق الرياضي' ، 'المنطق' ، 'الدلاليات' ، 'الرياضيات'. (جورج طرابيشي: معجم الفلاسفة، ص 230). وقد جمعت أعمال تارسكي في السيمانطيقا المنطقية في بحثين، تناول في الأول " مفهوم الصدق في اللغات الصورية " عام 1931، ثم عاد تارسكي وقدم أفكاره عن الصدق بشئ من الإيجاز، وبقدر كبير من الوضوح واليسر في بحثه الثاني " المفهوم السيمانطقي للصدق وأسس علم الدلالة سنة 1944، وقد حاول تارسكي صياغة تعريف للصدق يتميز بالصحة والبساطة من الناحية الصورية، ومثمر وفعال من الناحية النظرية . ويقدر المفهوم التقليدي للصدق حق قدره بقدر ما يتفق مع الواقع، والذي يشير إليه تارسكي علي أنه المفهوم الأرسطي الكلاسيكي في الصدق، ويتجلي في عبارة أرسطو المشهورة التي وردت في كتابه " الميتافيزيقيا "، والتي يقول فيها أرسطو: " إن القول عما يوجد إنه لا يوجد، أو القول عما لا يوجد إنه يوجد هو قول كاذب، علي حين إن القول عما يوجد إنه لا يوجد وعما لا يوجد إنه لا وجد هو قول صادق، ولذلك فإن من يقول عن أي شئ إنه يوجد أو إنه لا يوجد سيقول إما الصدق أو الكذب ". وعموما تنقسم نظرية تارسكي في الصدق إلي مستويين: يتموضع الأول حول تقديم " شروط الكفاية المضمنة الشروط التي يجب أن يستوفيها أي تعريف مقبول للصدق، ويستوفي الثاني تعريف الصدق بالنسبة للغة صورية محددة. **يقول تارسكي: مشكلتنا الرئيسية هي محاولة تقديم تعريف مقنع لمفهوم الصدق ولكي يكون التعريف مقبولا يجب أن يستوفي شرطين أساسيين:الأول، أن يكون التعريف كافياً ، والثاني أن يكون صحيحاً صوريا** . وثمة مسألة جديرة بالإشارة، وهي أنه عندما نتحدث عن الصدق، فأول ما يطرأ في الذهن هو الصدق المادي ؛ أعني صدق العبارات والجمل، لكن في الحقيقة توجد حالات نفسية أخري يمكن أن ننسب إليها الصدق، مثل الأحكام والاعتقادات والتقريرات ...الخ، كما ينطبق أيضاً علي القضايا، واهتمامنا هنا منصب علي صدق الجمل، لكن هذا لا يمنعا من الحديث عن صدق الأشياء الأخري، فمثلاً جملة " **الثلج أبيض** " لا نستطيع معرفة صدقها أو كذبها إلا من خلال شروط الصدق، وإذا تساءلنا عن شروط الصدق في هذه الجملة، ستكون وفقاً للمفهوم الشائع أو العادي للصدق، الجملة صادقة إذا كان الثلج أبيض، والعكس صحيح تكون كاذبة إذا لم يكن أبيضاً، أو بتعبير آخر أدق الجملة " **الثلج أبيض تكون صادقة إذا كان الثلج أبيضاً بالفعل** .

04 ـــ **منطق راسل ووايتهد**: منطلقنا في المعرفة بملخص نظريتي راسل ووايتهد في المنطق الرياضي نتمثلها من خلال مضمون كتاب راسل برتراند (1872 ـــ 1970م) برنكيبيا ماتيماتيكا الذي ألفه عام 1903م من جهة ما يمثل حلقة تالية لأعمال فريجه وبييانو في تطور المنطق الرمزي، ويتضمن الكتاب قضيتين أساسيتين: تطوير الاتجاه اللوجيستيكي، وتطوير المنطق الرمزي أكثر مما ذهب إليه فريجه وبيانو. كان راسل قد أحاط سلفا بالأعمال المنطقية لـ : ليبنتز وبول وبيرس وشرويدر وكانتور وبرادلي. والمنطق بنظر راسل لا يعدو أن يقتصر سوى على تعديل وتعميق وتطوير المنطق التقليدي، وقد رغب راسل في أن يكون المنطق أكثر صورية ورمزية مما بدا في منطق أرسطو، مثلما أراد أن يجعل منه نسقا استنباطيا. كما اهتم راسل لشأن نظريات منطقية على نهج ما تبناه فريجه وبييانو وبول. وشأن المنطق الرمزي أن يحلل القضايا ويصنفها، ويبني العلاقات ويدقق في حسابها ويستتبعها بتقعيد دوال الصدق بشأنها. **يميز راسل في القضايا بين خمسة أصناف: قضية ذرية:** قضية معطاة مسلم بها، وهي أكثر القضايا بساطة. موضوع القضية الذرية هو الفردي أو الجزئي. مثل قولنا 'هذا أحمر' 'أ أكبر من ب' والقضية الذرية نوعان: شخصية نسند فيها صفة إلى شيء جزئي. وقضية علاقة تربط بين شيئين بعلاقة ما وإن شئنا أسميناها بالقضية الحملية**. ـــ قضية مركبة**: لا تفهم إلا في صلتها بالثابت والمتغير ودالة الصدق. أما المتغير فقد يكون اسم علم أو إلى صنف أو إلى قضية أو إلى علاقة. نشير إلى المتغيرات بحروف معينة من لغة الهجاء. أما الثوابت فتشير إلى الروابط المنطقية أو العلاقات بين القضايا كالفصل والوصل مثلا. أما دالات الصدق فأربعة: (دالة تناقض، ودالة الربط، ودالة الفصل، ودالة التضمن) (للتوسيع والفهم أكثر عد إلى كتاب: محمود فهمي زيدان: **المنطق الرمزي ونشأته**) **ـــ قضية عامة:** القضية العامة شرطية متصلة لا تقرر واقعا و لكنها لا تقرر شيئا. مثل 'كل إنسان فان' **ـــ قضية عامة عمومية تامة:** يقصد بها القضية المنطقية التي تتضمن حقيقة منطقية، ويقصد بها على وجه الدقة القضايا الرياضية البحتة التي لا تحتوي غير حدود منطقية وحسب. مثال: إذا كان أ يتضمن ب وب يتضمن ج فإن أ يتضمن ج **ـــ قضية وجودية .**

**ـــ نظرية حساب القضايا:** يرجع الفضل في التأسيس لها إلى فريجه وبيانو ، ويصطلح على النظرية كذلك بـــــ 'نظرية الاستنباط' و 'نظرية دالات الصدق' و 'نظرية تركيب القضايا' . موضوع نظرية حساب القضايا هو الاستنباط، الذي مادته الثوابت والمتغيرات ودالات الصدق**.**

**ـــ نظرية دالة القضية:** يعرف راسل دالة القضية بقوله: 'هي تعبير يحوي عنصرا أو أكثر غير محدد، بحيث حين نعطي قيمة لهذه العناصر يصبح التعبير قضية، دالة القضية بعبارة أخرى دالة قيمتها قضية'. 'ه إنسان' دالة قضية لا قضية، ولا معنى لها بمفردها وليست صادقة ولا كاذبة، لكنها تكتسب معنى وتحتمل الصدق والكذب حين نعطي قيمة للمتغير : 'سقراط إنسان' قضية صادقة. بينما 'راسل طبيب' كاذبة.

ــــ **مجال قيم الدالة**: بإزاء كل دالة قضية يجب منح المتغير فيها قيمة ما ومجالات قيم الدالة ثلاثة: أن تكون القضية صادقة دائما ـــ أن تكون القضية صادقة أحيانا ـــ أن تكون القضية كاذبة دائما. وثمة نظريات أخرى عرض لها راسل مثل النظرية الوصفية في جانبيها المنطقي والمعرفي (الإبستيمي) والوصف قد يكون واضحا أو غامضا . والغامض ما تضمن في القضية من حد عام في صيغة نكرة. مثل: 'قابلت رجلا ما' أما الوصف المحدد فمعرف وتشير العبارة الوصفية فيه إلى شيء بعينه. مثل: الجزائر مستقلة.

**نظرية حساب الأصناف**: لها مستويين منطقي ورياضي. يرتبط الجانب الرياضي بتعريف العدد تعريفا منطقيا بحتا، برده إلى تصورات الصنف والعلاقة المشابهة. بينما يرتبط الثاني بما نصطلح عليه المفارقات أو التناقضات

**نظرية العلاقات**: لنظرية العلاقات مستويين منطقي ورياضي. يتجلى المستوى الأول في رد العلاقات بين التصورات الرياضية إلى علاقات منطقية خالصة. وجدير بالذكر الإشارة إلى أن المنطق التقليدي لم يعرف هذا الشكل من العلاقات لذا فهي حديثة حداثة المنطق الرمزي. أول من أشار إليها دي مورغان حين درس بعض العلاقات بين الحدود كالهوية والتعدي والعكس والسلب، مثلما درس علاقات الربط والفصل بين تلك العلاقات. والعلاقات بنظر راسل تصنف بحسب أسس مختلفة نوجزها كالآتي: علاقات تماثلية ـــ علاقات لاتماثلية علاقات بينية ـــ علاقات ثنائية ـــ علاقات ثلاثية ــــ علاقات رباعية ــــ علاقة واحد بواحد ــــ علاقة واحد بكثير ـــ علاقة كثير بواحد ــــ علاقة كثير بكثير. (للاطلاع أكثر عد إلى كتاب: محمود فهمي زيدان: **المنطق الرمزي ونشأته**).

**خاتمة: لا شك أن المنطق الرياضي إنما بلغ مستوى من التقدمية بفضل أعمال جهابدة المنطق الحديث والمعاصر ابتداء من أعمال ليبنتز وقد أضحت الفروق بيّنة بين المنطق التقليدي وبين المنطق الحديث الذي أبان عن خصوبته وقدرته على توقيع الانفتاح الضروري للفكر الرياضي على الأفكار والنظريات التي ما فتئت تعدل في مسارات المنطق والرياضيات في واصلية أنساقهما ونجاعة نظرياتهما التي بلغت بالمنطق الحديث مبلغا متميزا من حيث الصورانية والرمزية المستجدة.**