**المقياس: المنطق الرمزي / الفئة المستهدفة: طلبة السنة أولى ماستير عامة/ فلسفة**

المحاضرة الأولى: **المنطق الرياضي : المفهوم والتاريخ**

**مدخل**: يعزو المنطقيون والباحثون في قضايا المنطق قيمة استثنائية للتفكير المنطقي، خلاف ما ينتسب للعلوم والفنون والفلسفات من قيمة وأثر، ومردّ ذلك إلى اعتبار المنطق أصل ومعيار الانتظام والاتساق في مختلف الفاعليات الذهنية، كذا دأب العلماء والباحثون في شأن الحقيقة على تحكيم النزوع المعرفي والإبستيمي منطقيا، بالاستعانة بمبادئه وقوانينه ومقولاته. ولا شك ـ بادئ ذي بدء ـ أن العوام من الناس قد درجوا على استعمال عبارة المنطق، وذاك مؤشر على شيوع النظرية الأرسطية بين النظريات العلمية. وقد كان لأرسطو شأن وموضع في تاريخ الفلسفة والعلم، باعتباره مهندس ومنظر لطرائق التفكير. بيد أن فاعليات ثورية تجديدية استحدثها العقل الرياضي الحديث، مقوما أحيانا ومجددا في مواضع أخرى. وقد حافظ المنطق الحديث على حد المنطق، مجددا في صوريته، كاشفا عن ضروراته الرياضية الاستنباطية، متجاوزا لغة اللفظ إلى لغة الرمز، وقد اصطلح حينها على تغيير منحى الفكر المنطقي المتآلف منطقيا ورياضيا بالمنطق اللوجيستيكي( رد الرياضيات إلى أصول منطقية). **وقد عرض بعض الفلاسفة وعلماء المنطق لوضع تعريفات مختلفة لمفهوم المنطق: (بيرس): " تكمن الإشكالية الأساسية في علم المنطق في تصنيف البراهين إلى براهين سليمة وأخرى فاسدة". (كوبي): " دراسة المنطق هي دراسة المناهج والمبادئ التي تستعمل للتمييز بين البراهين السليمة والبراهين الفاسدة". (سامون): " المنطق هو العلم الذي يمدنا بأدوات تحليل البراهين". (بيانو): " المنطق هو العلم الذي يدرس خصائص الإجراءات والعلاقات"**. ويمكن بوجه عام تعريف المنطق على غير ما عهدنا من التعريفات الكلاسيكية بأنه العلم الذي يهتم بالبحث في تحديد العلاقات بين القضايا من وجهة نظر تعتد بالقيم الصدقية المحتملة لتلك القضايا. ولا شك أن ثمة أنساق منطقية تحددها قواعد النسق المنطقي الافتراضي، نحو الإقرار بأن افتراض صدق مقدمات برهان ما يستلزم صدق نتيجته، بما يتوجب الحكم بسلامته، وكذا إثبات فساده لا يستدعي سوى إثبات عدم استلزام افتراض صدق تلك المقدمات لصدق تلك النتيجة... ومما تجدر الإشارة إليه في باب المنطق وامتداداته التطورية أنه تدرج في تنويع حقوله المعرفية وتعدد أنساقه منذ عصر الفلسفة اليونانية، كذا ترتد نشأة المنطق الرمزي في البدء إلى أعمال أرسطو فمنطق الرواقيين، لتتحدد له بنيات جديدة مع أعمال **ليبنتز ودي مورغان** المنطقية. وأيا ما كانت ماهية المنطق فنية أو علمية فإن السمة التي غلبت عليه دوما هي الاتساق والدقة واليقين والوضوح. " ولقد سمى مناطقة **بور روايال** المنطق بأنه فن التفكير The art of thinking، ويرى **لاتا** و**ماكبت** خطأ تلك التسمية، ومع ذلك يقرران بأن للمنطق فائدة عملية، ذلك أنهما رأيا أن المنطق لا يعلمنا كيف نفكر، كما أنه ليس آلة نكتشف بها الحقيقة. فنحن نستطيع أن نفكر جيدا بدون دراسة المنطق، كما اننا نستطيع أن نكتشف الحقيقة عن طريق الملاحظة والتجربة وليس عن طريق المنطق. ومع ذلك فإن المنطق يمدنا باليقين وبالدقة وبالوضوح، ويساعدنا على بيان المغالطات ونقاط الضعف في تفكيرنا واستدلالاتنا، ويوجهنا إلى طلب البرهنة الصحيحة الصادقة". (علي عبد المعطي محمد: **المنطق وفلسفة العلم**، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 1988، ص 05).

**01/ فلسفة الرياضيات:** الهدف من التعرض بالدراسة لفلسفة الرياضيات هو التعرف على بعض أنماط التفكير العلمي في مستوياتها النظرية (التجريدية) وكذا المعرفة بأسباب ومقتضيات التحولات الضرورية في أنساق التفكير والمعرفة، من خلال تفسير وفهم مناحي التفكير المنطقية، وكذا تحديد الدوافع الحقيقية التي فرضت تغيير النظرة إلى المنطق، من خلال تحول منظومة التفكير والاستدلال من المنطق الصوري إلى المنطق الرمزي. و" تقوم الرياضيات أيضا بدور مهم في كل الجهود العلمية تقريبا الرامية إلى فهم العالم الطبيعي. أعتبر مثلا أي علم طبيعي أو اجتماعي. يلزم على نحو مماثل كل فلسفة تامة في الرياضيات تبيان كيف تطبق الرياضيات على العالم المادي... تبيان كيف يتعلق موضوع الرياضيات بموضوع العلوم، وكيف يناسب نهج الرياضيات نهج العلوم. ويطرح كواين وبتنام فضلا عن آخرين مذهبا استنباطيا فرضيا في الابستيمولوجيا الرياضية، تبدأ هذه الرؤية بملاحظة أن كل العلوم تقريبا مصاغة عبر حدود رياضية، وأنه لا يبدو أن ثمة بديلا لهذا. من ثمة فإن الرؤية مدلل عليها من شواهد النظريات العلمية. تقر المحاجة أن كون العلم غير قادر على الاستغناء عن الرياضيات، وكونه مدللا عليه وصادقا (تقريبا) إنما يعني أن حال الرياضيات مشابه له. وفق هذه الرؤية المواضيع الرياضية من قبيل الأعداد والدوال مفترضات نظرية". **دليل أكسفورد للفلسفة، ج2 ص ص 427 ـ 429.**

**02/ مفهوم المنطق الرمزي:** يسمى المنطق الرمزي Symbolic logic بأسماء عدة: **لوجيستيقا ، جبر المنطق، أو المنطق الرياضي،** وكلها عبارات مترادفة. ويسمى المنطق الرمزي لأن لغته الرموز لا الكتابة، ولا أدل على رمزيته إلا لأنه يستخدم الرموز لدراسة العلاقات المختلفة بين الحدود في قضايا معينة، وتحديد العلاقات المختلفة التي تربط بين عدة قضايا، ووضع القواعد التي تجعل من القضايا التي يرتبط بعضها ببعض قضايا صادقة دائما. وعموما فإن المنطق الرمزي يهتم بدراسة أربعة نظريات رئيسية: حساب القضايا ـ حساب المحمول ـ حساب الأصناف ـ وحساب العلاقات. وترجع تسمية المنطق الرمزي باللوجستيقا إلى **إتلسن ولالاند وكوتيرا** في المؤتمر الدولي للفلسفة بباريس عام 1904. وللمنطق الرمزي خاصتان أساسيتان هما: استخدام الرموز ، وأنه نسق استنباطي، **ورموز المنطق الرمزي نوعان: متغيرات وثوابت. أما المتغيرات** فهي حروف لغوية لا ترمز في ذاتها إلى شيء محدد، ولكن يسعنا منحها قيمة محددة، وحينئذ نسمي تلك القيمة قيمة المتغير. فنحن نقول الحرف (س) في التعبير ($س^2$) إنه متغير. و**أما الثوابت** فتشير إلى علامات الإضافة أو المساواة والأس والضرب والقسمة وغيرها. ولا ريب حينئذ أن القضية هي عصب المنطق الرمزي.

**المنطق الرمزي وتاريخية النشأة:**

**1 ـ ترميز المنطق الأرسطي:** لكل علم ولكل الفلسفات والفنون والثقافات مرجعيات أصلية تعرفنا بأصول نشأتها وتطور أفكارها ونظرياتها. كذا للمنطق تاريخ حافل بتنويعات فكرية وتحويرات نسقية تمتد تاريخيا من أولى التأصيلات الجادة مع أرسطوطاليس، وقد كان المنطق الأرسطي مستغرقا في الصورنة آخذا بالرمزية أحيانا . " كان أرسطو حريصا على كتابة القضايا في صورة رمزية، إذ كان يضع حروف الهجاء متغيرات ترمز إلى الحدود في القضية. من المألوف أن تعبر كتب المنطق التقليدي عن القضية الكلية الموجبة مثلا

بالصيغة كل أ يكون ب ... كان أرسطو يقدم المحمول على الموضوع في صيغة معينة هي: ب محمول على كل أ أو ب ينتمي إلى كل أ ،وكان أرسطو يصوغ القياس في صورة رمزية أيضا لكنه لم يصغه في صورة استدلال بحيث يوضع القياس في ثلاثة أسطر متتابعة وأمام كل نتيجة علامة إذن، وأن أول من استخدم هذا الرسم من القياس هو الاسكندر الأفروديسي في أواخر القرن 2م وبداية ق3م. كذا استخدم أرسطو الرموز في قضايا العكس ونقض المحمول وعكس النقيض: إذا كان أ محمولا على كل ب، فإن ب محمولا على كل أ. وضمّن أرسطو في كتابه "التحليلات الثانية" مقالا يتحدث فيه عن مقتضيات البرهان المنطقي الرياضي، إذ يستوجب عناصر ثلاثة: التعريفات، المبادئ والفروض. أما التعريفات فيقع بموجبها تحديد معاني الألفاظ المستخدمة في العلم دونما ضرورة لتبرير صدقها أو كذبها. أما المبدأ فتجب المعرفة به لحصول العلم المستوثق بشروط القضية المبدأ: أن تكون صادقة وأولية، وأكثر قبولا في العقل.

**المنطق الميغاري** : نسبة إلى **إقليدس الميغاري** (450 ـ 374) تلميذ سقراط ، كان للمنطق حياة في الفلسفتين الرواقية والميغارية وبخاصة ما اتصل بدراسة القضايا المركبة والثوابت المنطقية ودالات الصدق. وقد كان للرواقيين مساهمات جادة في حساب القضايا، وقد استخدم زينون الإيلي البراهين لدحض مذهب الكثرة وكان يتخذ الصورتين التاليتين: (أ) **إذا كان أ هو ب، فإن ج هو د، وإذا كان أ هو ب فإن ج ليس د، من المحال إذن أن يكون أ هو ب**

(2) **إذا كان أ هو ب فإن ج هو د ، لكن ج ليس د، إذن أ ليس ب.**

تسمى الصورة الأولى في البرهان **'**الرّد إلى المحال**'** والصورة الثانية **'**برهان الخلف**'**.

وكان **فيلون الميغاري** أول من بحث في القضايا المركبة بحثا منطقيا صائبا، قاصرا أبحاثه على القضية الشرطية المتصلة، وضع قواعد صدقها وكذبها، بذلك كان له السبق عن المنطق الرمزي في وضع دالة الصدق وقائمة الصدق. عرف فيلون أن للقضية الشرطية المتصلة حالات أربعة تتعلق بإمكان صدقها وكذبها ( للاطلاع والاستفادة أكثر عد إلى كتاب: محمود فهمي زيدان، **المنطق الرمزي ونشأته**، ص 44).

أما **الرواقيون** فقد عرفوا متغيرات القضايا ووضعوا لها رموزا، وعرفوا الثوابت المنطقية، وعلى غير ما بدا في منطق الميغاريين اهتم الرواقيون بشأن القضية المركبة المنفصلة، فاستخلصوا منها ثابت الفصل. إلى الرواقية كذلك يرتد فضل تأسيس النسق المنطقي الاستنباطي مرتكزه المقدمات الأولية التي اصطلحوا عليها بالصور الاستدلالية أحيانا وضروبا أولية لا تقبل البرهان أحيانا أخرى، وأحصوا منها خمسة. ( للاطلاع والاستفادة أكثر عد إلى كتاب: محمود فهمي زيدان، **المنطق الرمزي ونشأته**، ص ص 47ـ 49).

**ليبنتز**: (1646 ـ 1716): في مذكراته وأبحاثه المنطقية قدّم ليبنتز للمنطق فكرتين أساسيتين:

أ ـ يمكن للمنطق من حيث لمنهج أن يصبح نسقا استنباطيا على نموذج الهندسة الإقليدية، أي من حيث هو نسق من القضايا التي نبرهن عليها باستنباط مجموعة معطاة من تعريفات ومبادئ ومصادرات.

ب ـ يمكن للمنطق من حيث لغته وموضوعاته أن يتخذ علم الجبر نموذجا لغته الرموز وقوامه معادلات وقوانين. ومن ليبنتز سيستمد الرياضيون من بعده أسباب ومقتضيات التقدم للعلم الرياضي. فمنذ نشر بول كتابه عن قوانين الفكر عام 1854م، توبعت دراسة الموضوع بنشاط عظيم ووصلت إلى درجة عالية من التقدم الفني، ثم تلته أعمال جادة مع بيانو. (برتراند راسل: **أصول الرياضيات،** ج1، تر، محمد مرسي أحمد، دار المعارف بمصر، ص 41 )**كان ليبنتز معجبا بالمنطق الأرسطي** لما فيه من أثر على الفكر والعلوم قائلا: ' المنطق الأرسطي من أروع ما اكتشفه العقل الإنساني' وأنه 'فن العصمة من الزلل مما يمكن تطويره إلى نوع من الرياضيات الكلية'. كان يعتبر القضية الحملية الصورة الرئيسية والوحيدة للقضية، وأن القضية الحملية في نظره قسمان: قضايا ضرورية أو تحليلية. مثل (كل إنسان حيوان) وقضايا حادثة أو تركيبية مثل (سقراط فيلسوف). وأن نظرية القياس هي النموذج الأمثل للاستنباط. لكن تقديره للمنطق الأرسطي لم يثنه عن توقيع تعديلاته بشأن بعض المواضع كإضافته إلى نظرية ردّ الأقيسة .

ـ **اشتغل ليبنتز على نظرية الأصناف** من خلال تصنيفه الحدود المنطقية المفهومية والماصدقية. وقد حاول ليبنتز صياغة الصور الأربعة التقليدية للقضية الحملية من وجهة نظر صنفية إلى الحدود في بحثه المعنون بـ 'بعض الصعوبات المنطقية' مجدولا إياها في معلمي الإثبات والنفي، مميزا بين أصناف الحدود المفهومية والماصدقية.

**أولا/ من الفلسفة الرياضية إلى المنطق الرياضي:**

01/ **الفلسفة الرياضية:** عندما تستحضر نصا أو خطابا يذكر فيه فيثاغورس وإقليدس وأفلاطون وطاليس وأرخميدس، فلا شك أنك ستحدس الحقيقة بشان موضع الخطاب، فتشير إلى تاريخ الرياضيات اليونانية. وإنك لتدرك حينها أن لليونان فضل يعتد به في تأسيس الفكر الرياضي، الذي يصطلح عليه أيضا بالفلسفة الرياضية. ولا ريب أن الرياضيات اليونانية لها من القدر والأثر ما يثير لدينا فضول العرفان بشأنها ومنزلتها بين فلسفات وعلوم عصرها. فقد " بيّن أفلاطون موقفه من الرياضة بيانا وافيا في 'الجمهورية' حيث قال: ' من المناسب إذن يا غلوكون أن ينص في قوانيننا على وجوب دراسة هذا الفرع من العلم. ويجب أن نحمل من يلي مناصب الدولة العليا على أن يدرس الحساب ويتمكن منه، لا كما يفعل الهواة، بل عليه أن يواصل دراسته حتى يصل إلى مرحلة تدبر طبيعة العدد بالتفكير البحت" [1]. وقد رغّب تلامذة أفلاطون بينهم 'أرسطو طاليس' في الاهتمام بمسائل المنطق لغرض تنظيم العمليات العقلية، ومنه إلى تمكين الفيلسوف والعالم من تنظيم المعارف وممارسة الاستنباط الصحيح، كذا دعا إلى إعمال الطريقة الاستقراء من جهة ما تمثل منطق العلوم التطبيقية، وقد نحا نحو أرسطو بيكون وآخرون. "ولقد كان المنطق منذ ظهوره فوق المسرح الفكري في اليونان عند أرسطو المدخل الضروري لتعلم كل أقسام الحكمة النظرية والعملية، أعني لتعلم العلوم المختلفة، التي كانت تشملها قديما كلمة الفلسفة، وسمي المنطق باعتباره مدخلا للحكمة باسم 'الآلة' Organon أو الصناعة Art التي يستند إليها الناظر في تلك الموضوعات لإتقان النظر و الاستدلال فيها"[2]. وقد نالت العلوم كما الفنون شرف البنية والاتساق في أبحاثها ونظرياتها عموما بفضل إدخال المنطق في مناهجها وأسسها وقيمها الصدقية. وقد ينظر إلى المنطق من جهة ما هو فن وعلم سواء. أما من جهة دلالته الفنية فقد عرف بأنه فن التفكير السوي. ومن حيث دلالته العلمية فالأرغانون يعني الأداة أو القانون أو المنهج، إذ يحتكم إلى مبادئ وقواعد وقوانين يحتكم إليها التفكير لبلوغ الصواب واليقين المعرفي. وقد تضمن ذلك مؤلفات أرسطو المنطقية. "

---

([1]) ـ جورج ساتون: تاريخ العلم، العلم القديم في العصر الذهبي لليونان، المركز القومي للترجمة، القاهرة، مصر، 2010، ج3، ص 83.

([2]) ـ محمد ثابت الفندي: أصول المنطق الرياضي، دار النهضة العربية، بيروت، لبنان، ط1، 1972، ص 13.

عكف المشتغلون على أرسطو بتجميع العديد من أعماله تحت عنوان "الأورغانون" ("الأداة")... حيث حدد قواعد وأشكال الاستدلالات ("القياس المنطقي")، خصوصا القياسات المنطقية الضرورية، والموضوعات والتفنيدات السفسطائية (أرسطو التي تتخذ من الشبهات والحجج التي تكون مقدماتها محتملة فقط.كان لهذه الأعمال الأولى في تاريخ المنطق تأثير كبير على الفلسفة والفكر العلمي بشكل عام. وبعد أكثر من ألفي عام، لا يزال كانط يعتقد أن أرسطو اكتشف كل ما يمكن معرفته في المنطق (و أكد مؤرخ المنطق في القرن التاسع عشر، كارل فون برانت، أن المنطقيين الذين أتوا بعد أرسطو، لم يضيفوا شيئًا "جديدًا" لما تضمنه منطق أرسطو، معتبرا إياهم مشوشون أو أغبياء أو منحرفون"[3].

وعموما نميز تاريخيا بين شكلين من أشكال الفلسفة الرياضية: فلسفة رياضية قديمة، وفلسفة رياضية حديثة. وقد تعرضنا بمختصر قراءة لفلسفة الرياضيات القديمة وقصرناها على فكر اليونان. أما الفلسفة الرياضية الحديثة، فابتدأ التأسيس لها على أعقاب محاولات الفلاسفة المحدثين لإرساء فكر رياضي ينزع إلى توثيقه بالعلم أكثر من محاولة وصله بالفلسفة، وقد أثمرت أولى المحاولات مع ديكارت وليبنتز وآخرون، إذ هموا بوصل الفكر الرياضي بالمنطق الرمزي. لذلك فإن موضوع الفلسفة الرياضية " نشأ وتطور مع نشأة المنطق الرمزي وتطوره، وهو مبحث في طبيعة العلوم الرياضية ومناهجها، ومعيار صحة نظرياتها، وهو أيضا مبحث في رد التصورات الرياضية الأساسية إلى تصورات منطقية بحتة، أو ردها جميعها إلى تصورات أكثر منها سبقا. فلسفة الرياضة مرتبطة بالمنطق من جهتين: أن التفكير في إقامة الأولى هو الذي أثار البحث في إقامة الثاني، وأن تطوير الثاني هو الذي ساعد على تدعيم الأولى"[4]. وخلال عقود من الزمن حصلت الانقلابات الثورية في الأنساق المنطقية لضرورات علمية بالأساس لتحدث وثبات أكثر تأثيرا على واقع العلم الرياضي، إذ صرفت النظر عن الفلسفة الرياضية لتؤسس لمنظومة المعارف المنطقية الرياضية. " تغير هذا الوضع جذريا مع ظهور المنطق الحديث الذي كان فضل اكتشافه بقدر كبير إلى عالم الرياضيات والفيلسوف الألماني جوتلوب فريجه (1848-1925)، بعد ذلك نال شرف التطور بفضل أعمال برتراند راسل وألفريد وايتهيد، ولودفيج فيتجنشتاين وآخرون. اكتشافات فريجه للمنطق الحديث كانت بالتوازي مع تطورات الأنساق الأساسية لشرودر بيرس، بيانو، دي مورغان، راسل، وايتهيد وما إلى ذلك، أصبح المنطق حجر الزاوية في الفلسفة والرياضيات... باعتباره فرعًا من فروع الرياضيات. لعب المنطق دورًا حاسمًا في تطور الرياضيات الحديثة إذ بلغت من الدقة لما م تعهده في القرون السابقة، هذه الصرامة تتجلى في استخدام الطريقة الأكسيومية المعممة تقريبا على جميع مجالات الرياضيات المعاصرة"[5].

**02/ أهمية المنطق للفلسفة المعاصرة:** أبدا لا يمكننا إغفال الأعمال الخالدة لعالم الرياضيات الألماني جوتلوب فريجه بشأن تطوير ثم بعث نظريات تؤسس لأنساق منطقية رياضية بالغة الأهمية في تاريخ الرياضيات المعاصرة. ولا شك أيضا أن أعمال فريجه ظلت إرثا معرفيا يرجع إليه المنطقيون الرياضيون حيث اقتضت الضرورة لتأصيل أبحاثهم ومطابقتها لنسق نظريات فريجة الأساسية المنطقية منها واللغوية. لذلك قيل: " ولدت الفلسفة المعاصرة في عام 1879 مع نشر كتاب "الإيديولوجية" لجوتلوب فريجه. في هذا العمل حاول عالم الرياضيات الألماني فريجه تطوير الأشكال الرمزية للغة، لإضفاء الطابع الرسمي على الرياضيات، ولهذا الغرض اخترع فريجه حساب المنطق المسند، وبالتالي إجراء ثورة في المنطق"[6]. وقد تزامنت الثورة الرياضية آنذاك مع ظهور ثورات حاسمة أخرى

---

(3) - *Philipp Keller : Introduction à la logique La logique classique des propositions et des prédicats, Département de Philosophie, Université de Genève 2007, P 11.*

(4) - محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي ونشأته، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، 1979، ص 15.

(5) – *Ibid. P 72.*

(6) – *Ibid. P15.*

على صعيد فلسفة اللغة، تضمنت مدخلات الكشف المنطقي الرياضي الذي أثاره فريجه واشتغل عليه التحليليون بينهم برتراند راسل ولودفيج فتجنشتين وجورج مور وآخرون. ولعل الهمية والقيمة التي تحظى بها الرياضيات لا ترتد عليها وحسب، ولكن لها تأثير بين على الحقول المعرفية ذات الصلة بالعلوم النظرية منها والعملية، لأجل الإحاطة بمشكلاتها. " ثمة إشكاليات أنطولوجية تتعلق بموضوع تتعلق بموضوع الرياضيات: بأي شيء تتعلق؟ وثمة إشكاليات إبستيمولوجية: كيف نعرف الرياضيات؟ ما نهجها، وإلى أي حد يعد جدير بالثقة؟ أيضا ثمة إشكاليات المنطق والسيمانتكس: كيف تفهم لغات الرياضيات، كيف يتم تعلمها، تبليغها، إلخ؟... يتعين الإمكان الآخر في القول بأن الرياضيات ترتهن بالعقل والموضوعية، ربما عبر تبني رأي 'كانت' القائل ' إن الرياضيات تتعامل مع بنى مشتركة بين العقول البشرية'... يطرح كواين وبنتام فضلا عن آخرين مذهبا استنباطيا فرضيا في الإبستيمولوجيا الرياضية، تبدأ هذه الرؤية بملاحظة أن كل العلوم تقريبا مصاغة عبر حدود رياضية، وأنه لا يبدو أن ثمة بديلا لهذا. من ثمة فإن الرؤية مدلل عليها بقدر ما لدينا من شواهد على النظريات العلمية"[(7)]. وأيا كانت قراءات ووجهات نظر الفلاسفة حول قيمة الرياضيات ومنزلتها، فإن ما يجلي تميز النظرة القيمية التي نمنحها للفكر الرياضي إنما نستقريها من المنطق. وما تنوع الأنساق والبنيات في المنطق الرياضي إلا دليلا على تميز العلاقة الوثيقة بين المنطق والرياضيات.

تشديد راسل على وصل المنطق بالرياضيات أدركت أن الفيلسوف والمنطقي راسل قد اهتدى لدلالة الوصل المنطقية بينهما التي هي المنطق الرياضي، أو ما اصطلح عليه باللوجستيك (رد الرياضيات إلى أصول منطقية). ولا شك أن ثمة استمرارية لزومية تنبئنا عنها أبحاث الرياضيات والفلسفة الرياضية إذ تستوثق أنساقها وقيمها بقواعد ومعايير منطقية خالصة، موصولة بآليات الاستدلال والبرهان وقوانينهما. بل أضحى اليوم واقع الدراسات والأبحاث المنطقية مقصورا ـ في دوائر علمية وفلسفية خاصة ـ على قضايا المنطق الرياضي وحسب. ولا يعلم للمنطق الرياضي أثر أو تأثير على مناحي المعرفة إجمالا إلا من خلال تقدم صنائع العقل الرياضي، التي قعّد وأسس لها أعلام المنطق الرياضي الحديث والمعاصر.

## ثانيا/ إبستيمية المنطق الرياضي في فلسفة أعلامه:

**01/ ليبنتز** G.w.Leibniz (1646 . 1716) أشهر فلاسفة عصره، تنوعت أعماله لتشكل في فلسفته موسوعة المعارف. كان له سبق التأسيس للمنطق الرمزي وقد عد رائدا له، وله أعمال في الميثافيزيقا والأخلاق واللاهوت والفيزيقا، عرض قراءات إرجاعية بناءة لمنطق أرسطو، وأبان عن ملاحظات وجيهة كانت دافعا لتأسيس المنطق الرمزي، وقد عرض ليبنتز لفكرتين مركزيتين في أبحاثه المنطقية: أولاهما: يمكن للمنطق أن يدرك التماثل التي هي عليه الهندسة الإقليدية من جهة الاقتداء بنسقها الاستنباطي، أي أن يتألف من قضايا نبرهن عليها بالاستنباط من مجموعة معطاة من التعريفات والمبادئ والمصادرات. وثانيهما: أن يتخذ المنطق علم الجبر نموذجا له من حيث لغته الرمزية، وكذا من جهة موضوعاته وقوامه معادلات وقوانين[8]. ولعل فرادة منطق راسل الموصولة بتاريخ المنطق، قد أبانت عن إنصافه لمنطق أرسطو وإعجابه به. "كان ليبنتز معجبا بالمنطق الأرسطي، قال عنه إنه ' من أروع ما اكتشفه العقل الإنساني' وأنه ' فن العصمة من الزلل مما يمكن تطويره إلى نوع من الرياضيات الكلية'. كان يرى ان القضية الحملية هي الصورة

---

([7]) ـ دليل أكسفورد للفلسفة، ج2 ،تر، نجيب الحصادي، المكتب الوطني للبحث والتطوير، الجماهيرية العربية الليبية، 2003، ص ص 427 ـ 428.

([8]) ـ محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي ونشأته ، ص 51.

الرئيسية و الوحيدة للقضية... وبالرغم من تقديره للمنطق الأرسطي، كانت له مواقف عديدة يعدل بها ذلك المنطق، كإضافته إلى نظرية رد الأقيسة ما لم يرد عند مناطقة العصر الوسيط، وأنه لا يمكن رد كل أنواع الأقيسة الشرطية المتصلة والمنفصلة إلى أقيسة حملية"[9]. وقد عرض ليبنتز لوجهة نظر أقر فيها " إمكان النظر إلى الحدود نظر صنفية: ننظر إلى الحد نظرة من جهة المفهوم إذا حددنا معناه، وننظر إلى الحد نظرة صنفية أو من جهة الماصدق حين نعتبره صنفا من الأشياء يحوي أفرادا تندرج تحته"[10]. (للإطلاع لأجل الاستفادة أكثر عد إلى كتاب محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي ونشأته، ص ص 54 ـ 56 ).

**02/ منطق رودلف كارناب**: يعد رودلف كارناب أحد أبرز أعضاء حلقة فيينا، وهو رائد من رواد الفلسفة التحليلية. تتلمذ على يد المنطقي الفذ غوتلوب فريجه مثلما انكب على دراسة وتحليل نظرية راسل في المنطق الرياضي، أدرك أهمية وضرورة التفكير الرياضي لإقامة أسس التفكير الفلسفي والعلمي وكذا المنطقي. عرض أهم أعماله المنطقية في كتابه: ' البناء المنطقي للعالم والمسائل الزائفة في الفلسفة' " الذي نشره عام 1927كشف من خلال دراسته أعمال برتراند راسل من جهة إلى الأهمية الأساسية للرياضيات في تشكيل نسق المعرفة، ومن جهة أخرى إلى خاصيته الصورية والمنطقية الخالصة، التي تقوم عليها استقلاليتها عن عرضية العالم الواقعي. تمثل هذه الرؤى أساسا لكتابي وهي الرؤى التي تطورت فيما بعد من خلال النقاشات ضمن حلقة فيينا لشليك وتحت تأثير أفكار فيتجينشتاين إلى نمط التفكير الموسوم ب حلقة فيينا"[11]. تأثر كارناب بأعمال فريجه وهوايتهد وراسل المنطقية فيما له صلة بنظرية مفهومية عامة للعلاقات وخصائصها البنيوية، مثلما اهتم بتبيان البنية المفهومية للرياضيات من خلال تعريف الأعداد والدالات العددية انطلاقا من مفاهيم منطقية خالصة. عرض في مقالات له النظرية الماصدقية بأن اقترح صيغة تقر أن أي عبارة غير ماصدقية قابلة للترجمة إلى عبارة باللغة الماصدقية مكافئة لها منطقيا... يرى رودلف كارناب شأنه في ذلك شان باقي الوضعيين المناطقة والفلاسفة التحليليين أن التحليل المنطقي للغة هو السبيل الوحيد للكشف عن المسائل الفلسفية وبالتالي حلّها، بمعنى أن مسائل الفلسفة والعلم تكمن في معنى العبارات، وحيث أن اللغة الطبيعية تتصف بالالتباس والغموض وجب اللجوء إلى اللغة الاصطناعية للمنطقيات والرياضيات"[12].

**03/ ديمورغان ونظرية العلاقات**: يعتبر أغسطس دي مورغان بحق رائدا من رواد المنطق الرمزي الحديث، ساهم إلى جانب المنطقيين الآخرين في وضع قواعد وأصول نظريات المنطق الرمزي بينها نظرية العلاقات، التي كان لها بالغ الأثر في تجاوز عقم نظرية العلاقات في المنطق التقليدي، مؤسسا لنسق جديد. " أغسطس دي مورغان A. De Morgan (1806 ـ 1871) أحد كبار الرياضيين والمناطقة الإنجليز في القرن التاسع عشر. كان أستاذ الرياضيات في جامعة لندن فيما بين 1828 و 1831، ثم أعيد إلى نفس الوظيفة عام 1836 وظل بها حتى 1866. كتابه المنطقي الأساسي هو المنطق الصوري: أو حساب الاستدلال الضروري والاحتمالي... كتب مقالات عديدة في المنطق والرياضيات نشرت في: 'منشورات جمعية كمبردج الفلسفية'... كان أحد

---

([9]) ـ المرجع نفسه، ص 52.
([10]) ـ المرجع نفسه، ص54.
([11]) . برتراند راسل: البناء المنطقي للعالم والمسائل الزائفة في الفلسفة، تر، يوسف تيبس، المنظمة العربية للترجمة، بيروت، لبنان، ط1، 2011، ص 36.
([12]) ـ المرجع نفسه، ص 38.

أعضاء هذه الجمعية العاملين، كما كان عضوا في 'الجمعية الفلكية الملكية'"[13]. إذا كان لكل منطقي رياضي فضل على المنطق الرياضي من حيث إسهامه في تأسيسه أو تطويره، فإن " لدى ديمورغان الفضل في موضوعين رئيسيين في المنطق: إصلاحه للمنطق التقليدي، وإقامته مبادئ جديدة هي نظرية العلاقات. ولا بأس من إشارة سريعة إلى أهم تعديلاته على المنطق التقليدي. الحدود تدل على أصناف من الأشياء، لا على معان أو تصورات. ومن ثم كان دي مورغان يسمي الحدود 'حدودا صنفية'... رفض التصنيف الرباعي التقليدي للقضية الحملية وصنفها تصنيفا ثمانيا وفق نظرية كم المحمول. وضع القضايا في صورة رمزية ترمز حروف الهجاء فيها إلى الحدود"[14]. كما عرض لقواعد التقابل بين القضايا وقواعد الاستدلال المباشر بأشكاله وأضربه مستبدلا اللغة الطبيعية باللغة الرمزية وقد كان لـ دي مورغان موقف من القضية الحملية الأرسطية، معدلا في صيغتها القضوية الحملية إلى صيغة علائقية رمزية. حيث استبعد " اعتبار القضية الحملية الصورة الرئيسية والوحيدة لكل قضية، وإمكان رد أي صورة أخرى للقضية إلى الصورة الحملية... بل أضاف أنه يمكن رد القضية الحملية إلى قضية علاقة، وقد كان يعلم أنه بصدد منطق جديد، ومن ثم قال: ' ... وهنا تنبثق الفكرة العامة للعلاقة، ولأول مرة في تاريخ المعرفة، أمكننا وضع أفكار العلاقة وعلاقة العلاقة في صورة رمزية"[15].

ـ قانونا دي مورغان: " أ ـ العلاقات عند دي مورغان نوعان: علاقات من الدرجة الأولى وعلاقات من الدرجة الثانية. كلمات أب، ابن، قبل، بعد، أكبر من، أصغر من، يساوي، يشبه، يختلف، يعطي، يحب... إلخ أمثلة لعلاقات الدرجة الأولى، وتربط بين حدين أو أكثر. أما العلاقات من الدرجة الثانية فهي علاقات تجري على العلاقات السابقة، ويسميها دي مورغان 'علاقة العلاقة' ومن امثلتها علاقات العكس والسلب والتعدي والجمع والربط... مثل 'ابن عم صديق. ب ـ استطاع دي مورغان من دراسة الخواص السابقة للعلاقات أن يصل إلى نظرية هامة منطوقها: ' سلب جمع ما هو سلبي الحدين المجموعين، وسلب ربط ما هو جمع سلب الحدين المرتبطين"[16].

04/ **منطق راسل ووايتهد**: منطلقنا في المعرفة بملخص نظريتي راسل ووايتهد في المنطق الرياضي نتمثلها من خلال مضمون كتاب راسل برتراند (1872 ـ 1970م) برنكيبيا ماتيماتيكا الذي ألفه عام 1903م من جهة ما يمثل حلقة تالية لأعمال فريجه وبيانو في تطور المنطق الرمزي، ويتضمن الكتاب قضيتين أساسيتين: تطوير الاتجاه اللوجيستيكي، وتطوير المنطق الرمزي أكثر مما ذهب إليه فريجه وبيانو. كان راسل قد أحاط سلفا بالأعمال المنطقية لـ : ليبنتز وبول وبيرس وشرويدر وكانتور وبرادلي. والمنطق بنظر راسل لا يعدو أن يقتصر سوى على تعديل وتعميق وتطوير المنطق التقليدي، وقد رغب راسل في أن يكون المنطق أكثر صورية ورمزية مما بدا في منطق أرسطو، مثلما أراد أن يجعل منه نسقا استنباطيا. كما اهتم راسل لشأن نظريات منطقية على نهج ما تبناه فريجه وبيانو وبول. وشأن المنطق الرمزي أن يحلل القضايا ويصنفها، ويبني العلاقات ويدقق في حسابها ويستتبعها بتقعيد دوال الصدق بشأنها[17]. **يميز راسل في القضايا بين خمسة أصناف: قضية ذرية**: قضية معطاة مسلم بها، وهي أكثر القضايا بساطة. موضوع القضية

---

([13]) ـ محمود فهمي زيدان: **المنطق الرمزي ونشأته**، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، 1979، ص 65.

([14]) ـ المرجع نفسه، ص ص 66 ـ 67.

([15]) ـ المرجع نفسه، ص 67.

([16]) ـ المرجع نفسه، ص 71.

([17]) ـ المرجع نفسه، ص ص 171 ـ 172.

الذرية هو الفردي أو الجزئي. مثل قولنا 'هذا أحمر' 'أ أكبر من ب' والقضية الذرية نوعان: شخصية نسند فيها صفة إلى شيء جزئي. وقضية علاقة تربط بين شيئين بعلاقة ما وإن شئنا أسميناها بالقضية الحملية. ـ **قضية مركبة:** لا تفهم إلا في صلتها بالثابت والمتغير ودالة الصدق. أما المتغير فقد يكون اسم علم أو إلى صنف أو إلى قضية أو إلى علاقة. نشير إلى المتغيرات بحروف معينة من لغة الهجاء. أما الثوابت فتشير إلى الروابط المنطقية أو العلاقات بين القضايا كالفصل والوصل مثلا. أما دالات الصدق فأربعة: (دالة تناقض، ودالة الربط، ودالة الفصل، ودالة التضمن) ـ **قضية عامة:** القضية العامة شرطية متصلة لا تقرر واقعا و لكنها لا تقرر شيئا. مثل 'كل إنسان فان' ـ **قضية عامة عمومية تامة:** يقصد بها القضية المنطقية التي تتضمن حقيقة منطقية، ويقصد بها على وجه الدقة القضايا الرياضية البحتة التي لا تحتوي غير حدود منطقية وحسب. مثال: إذا كان أ يتضمن ب وب يتضمن ج فإن أ يتضمن ج ـ **قضية وجودية**[18] .

ـ **نظرية حساب القضايا:** يرجع الفضل في التأسيس لها إلى فريجه وبيانو ، ويصطلح على النظرية كذلك بـ 'نظرية الاستنباط' و 'نظرية دالات الصدق' و 'نظرية تركيب القضايا' . موضوع نظرية حساب القضايا هو الاستنباط، الذي مادته الثوابت والمتغيرات ودالات الصدق[19].

ـ **نظرية دالة القضية:** يعرف راسل دالة القضية بقوله: " 'هي تعبير يحوي عنصرا أو أكثر غير محدد، بحيث حين نعطي قيمة لهذه العناصر يصبح التعبير قضية، دالة القضية بعبارة أخرى دالة قيمتها قضية'. 'هـ إنسان' دالة قضية لا قضية، ولا معنى لها بمفردها وليست صادقة ولا كاذبة، لكنها تكتسب معنى وتحتمل الصدق والكذب حين نعطي قيمة للمتغير : 'سقراط إنسان' قضية صادقة. بينما 'راسل طبيب' كاذبة" [20].

ـ **مجال قيم الدالة:** بإزاء كل دالة قضية يجب منح المتغير فيها قيمة ما ومجالات قيم الدالة ثلاثة: أن تكون القضية صادقة دائما ـ أن تكون القضية صادقة أحيانا ـ أن تكون القضية كاذبة دائما. وثمة نظريات أخرى عرض لها راسل مثل النظرية الوصفية في جانبيها المنطقي والمعرفي (الإبستيمي) والوصف قد يكون واضحا أو غامضا . والغامض ما تضمن في القضية من حد عام في صيغة نكرة. مثل: 'قابلت رجلا ما' أما الوصف المحدد فمعرف وتشير العبارة الوصفية فيه إلى شيء بعينه. مثل: الجزائر مستقلة.

**نظرية حساب الأصناف:** لها مستويين منطقي ورياضي. يرتبط الجانب الرياضي بتعريف العدد تعريفا منطقيا بحتا، برده إلى تصورات الصنف والعلاقة المشابهة. بينما يرتبط الثاني بما نصطلح عليه المفارقات أو التناقضات... يرجع الفضل إلى بول في تقديم أولى محاولة لإقامة المنطق الرمزي بالمعنى الدقيق، وإن كان قد اقتصر في جهده على إقامة مبادئ حساب الأصناف دون غيرها من نظريات ذلك المنطق"[21].

**نظرية العلاقات:** لنظرية العلاقات مستويين منطقي ورياضي. يتجلى المستوى الأول في رد العلاقات بين التصورات الرياضية إلى علاقات منطقية خالصة. وجدير بالذكر الإشارة إلى أن المنطق التقليدي لم يعرف هذا الشكل من العلاقات لذا فهي حديثة حداثة المنطق الرمزي. أول من أشار إليها دي مورغان حين درس بعض العلاقات بين الحدود كالهوية والتعدي والعكس والسلب، مثلما

---

([18]) ـ المرجع نفسه، ص ص 178 . 180.
([19]) ـ المرجع نفسه، ص 203.
([20]) ـ المرجع نفسه، ص 221.
([21]) ـ المرجع نفسه، ص 247.

درس علاقات الربط والفصل بين تلك العلاقات. والعلاقات بنظر راسل تصنف بحسب أسس مختلفة نوجزها كالآتي: علاقات تماثلية ـ علاقات لاتماثلية علاقات بينية ـ علاقات ثنائية ـ علاقات ثلاثية ـ علاقات رباعية ـ علاقة واحد بواحد ـ علاقة واحد بكثير ـ علاقة كثير بواحد ـ علاقة كثير بكثير[22].

**خاتمة:** لا شك أن المنطق الرياضي إنما بلغ مستوى من التقدمية بفضل أعمال جهابذة المنطق الحديث والمعاصر ابتداء من أعمال ليبنتز وقد أضحت الفروق بيّنة بين المنطق التقليدي وبين المنطق الحديث الذي أبان عن خصوبته وقدرته على توقيع الانفتاح الضروري للفكر الرياضي على الأفكار والنظريات التي ما فتئت تعدل في مسارات المنطق والرياضيات في واصلية أنساقهما ونجاعة نظرياتهما التي بلغت بالمنطق الحديث مبلغا متميزا من حيث الصورانية والرمزية المستجدة.

([22]) ـ المرجع نفسه، ص ص 259 - 261.