المحور الثاني: فلسفة الرياضيات

المحاضرة الثالثة: فلسفة الرياضيات المعاصرة.

مدخل: لا شك أن ثورات حصلت وأخرى آن لها أن تكون في مسارات ودروب العقل الباحث عن الحقيقة. وقد أشرنا فيما سبق إلى تفرد الفلسفة الرياضية الكلاسيكية بميزات عديدة، أبانت عن عبقرية العقل العلمي إذ يوثّق عهدا مع اليقين والدقة الرياضيين منذ أزمنة ما قبل التاريخ. ولما كانت ضرورات الحياة توجب مجاراة العلم لمنطق الضرورة اقتضى الحال تغيير النظرة إلى أنساق الرياضيات ومنطلقاتها وقيمها، في رافد من روافدها (الهندسية). لاريب أن هندسة إقليدس ثرية وغنية بيانا ووضوحا ودقة واتساقا في ما يقتضيه نسقها من ثوابت وأنماط استدلالية، لكن في مطلع الأزمنة المعاصرة تغيرت المفاهيم والطرائق والأنساق سالكة بالعقل نهج الكثرة النسبوية محل الوحدة الدوغمائية، وقد أضحى الاستكان للنمط حينها عائق وحائل دون تحرير خيال العقل وافتراضاته الخلاقة دون تقدم فهمنا الرياضي المعاصر.

01/ **إبستيمية الفكر الرياضي المعاصر:** وفي مستهل القرن التاسع عشر أسهمت التحليلات ومحاولات التعليل الهندسية. في تاريخ العلوم نقرأ لنؤكد أحقية الرياضيات بالنمذجة. هي لغة العلوم ولا يرتاب عاقل في الإقرار بدقتها ومعقوليتها البالغة إذ يقترن فيها التبديه باليقين والصدق والضرورة والاتساق الذي يستبعد عن أنساقها ونظرياتها كل تناقض وريبية. تغير معيار الحقيقة الرياضية عندما انفصلت الرياضيات عن الواقع الحسي، و أصبح الحكم على النسق الرياضي يعتمد فقط على مدى انسجامه داخليا، أي خلو النسق من التناقض الداخلي، عدم تناقض المقدمات مع النتائج. و يبرر هذا تعدد الهندسات بتعدد المنطلقات و اعتبارها كلها صحيحة إذا نظرنا إليها من حيث الانسجام الداخلي فهندسة ريمان تمثل نسقا هندسيا متناسقا و كذلك هندسة لوباتشيفسكي. فهاتين الهندستين لا تقلان تناسقا عن هندسة اقليدس. كذلك في مجال الجبر و الحساب. وجود أعداد لا علاقة لها بالواقع الحسي الأعداد التخيلية مثلا. الهندسات اللا اقليدية صحيحة لكنها لا تصف لنا الواقع كما تقدمه لنا الحواس. لم تعد الحقيقة الرياضية دوغمائية في يقينها ولكنها آيلة إلى النسبية باستمرار في ظل تطورات مذهلة شملت عديد أنساق، وفيض افتراضات عقلانية اقترنت برؤى مغايرة لنسق الرياضيات الكلاسيكية (الهندسة الإقليدية) ليستلهم العقل على أنقاضها هندسات لا أوقليدية متعددةية بشأن مسلمات إقليدس إلى الإقرار بدقة ويقين هندسة إقليدس من جهة، وقد أبانت الأبحاث الإبستيمية المعاصرة عن ضرورة تشييد هندسات أخرى على أنقاض مقومات هندسة إقليدس. فقد باءت كل محاولات الهندسيين المعاصرين بالفشل إذ نزعوا إلى محاولة إخضاع مسلمة إقليدس الخامسة للبرهنة بغرض اختبار احتمال خطئها (المصادرة الخامسة التي نصها: يوجد

خط مواز وخط واحد لخط مستقيم) . وقد " أدى الإخفاق العام إلى إثارة فكرة جديدة لدى علماء الهندسة، بصورة تبلغ قدرا غير يسير من الدقة، هي أن مسلمة إقليدس لا يمكن البرهنة عليها، ومن الضروري أن نسلم بها دون برهان، أو أن نسلم بأخرى تعادلها" بول موي: المنطق وفلسفة العلوم، تر فؤاد زكريا، دار النهضة، مصر، ص . وفيما يلي سنعرض لأبرز علماء الفكر الهندسي اللا إقليدي مبيّنين فروقا نسقية ملمحية لكل نسق في إطار مقررات المنطق النسبوي المعاصر.

02/ تجديل مصادراتي لا إقليدي: لم يقع تجديل *(dialectisation)* الأوليات الهندسية الإقليدية من قبل الكلاسيكيين ولا من طرف المعاصرين، لأنها قضايا لا يمكن البرهنة عليها، لكن ما أثار الجدل و شذوذ الذهن لدى المعاصرين هو البناء المصادراتي الإقليدي، وأبرز مقوماته:

. يمكن مد خط مستقيم بين نقطتين .

. يمكن مد أي خط مستقيم إلى ما لا نهاية له.

. كل الزوايا القائمة متساوية .

بيد أن المسلمة الإقليدية الخامسة قد شكلت حلقات من الجدل، و إثارة الشكوك حول يقين*(Certitude)* النسق الهندسي الإقليدي، فأريد بها لدى الهندسيون المعاصرون حجة لتبرير يقين أزمة(*Crisis*)الأساس التقليدي في الهندسة الإقليدية، وكان منطوق المسلمة كالآتي: " إذا قطع مستقيم مستقيمين، وكان مجموع الزاويتين الداخلتين في نفس الجانب أقل من قائمتين، فإن

المستقيمين إذا مدا بدون حد يتلاقيان على نفس الجانب الذي تكون فيه الزاويتان أقل من

قائمتين "[1].

لقد حاول نفر من الرياضيين البرهنة على صحة هذه المسلمة واضعين في اعتبارهم إمكانية إبطالها وتجاوزها بينهم: "بركلوس" و "جون واليس" و "ليجندر" وآخرون فافترضوا قائمة من المسلمات البديلة عن المسلمة الخامسة نحو قولهم :

". إذا قطع مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يقطع الآخر(بركلوس) .

. إذا أعطينا شكلا، فإنه يوجد شكل يشابهه من أية سعة(جون واليس) .

([1]) – جورج سارطون: تاريخ العلم، (ج4)، ترجمة لفيف من العلماء، دار المعارف، القاهرة، 1961 ص 88.

. من أية نقطة معلومة لا يمكن أن يرسم إلا مستقيم واحد يوازي مستقيما معلوما(جون بلايفير).

. يوجد مثلث مجموع زواياه الثلاث يساوي قائمتين (ليجندر)"[2].

03/ الهندسات اللاإقليدية: إدا كانت ثوابت البناء الهندسي تتميز بالإطلاق واليقين، فلنا أن نسلم بها دون برهان، ودونما إخضاعها للنقد والشك، لكن ما لم يستسغه اللاإقليديون هو لماذا التسليم بصحة المصادرات، مع أنه بالإمكان البرهنة عليها في إطار النسق الاستدلالي ؟.

لقد شكلت هذه التساؤلات بداية الأزمة في الثورة الهندسية المعاصرة، لدى الرياضيين المعاصرين انصبت حول النظر في المسلمات الإقليدية، ومحاولة إقامة البرهان على يقينها وكفايتها. " ومن بين هذه المسلمات حظيت المسلمة الخامسة بأكبر شهرة، وقد عرفت هذه المسلمة بمسلمة المستقيمين المتوازيين: من نقطة خارج المستقيم المعني، لا يمكن مد سوى مستقيم واحد مواز للمستقيم المعطى، وغدت هذه المسلمة مادة للجدال ولمحاولات إثباتها على أساس المسلمات الأربع الأخرى، وهذه المسلمة بالذات، هي التي كان لها دور شديد الأهمية في إنشاء الهندسة اللاإقليدية"[3]. حاول الرياضيون في مختلف العصور يونان وعرب وغربيون البرهنة على مسلمة التوازي هذه بالرجوع إلى قضايا أبسط منها، ولكنهم جميعا لم يفلحوا، كما أنهم لم يستطيعوا الاستغناء عنها، لأن في الاستغناء عنها انهيار للهندسة الأوقليدية كلها "[4].

وللتدقيق أكثر في المسألة، نشير بداية إلى الدقة المنهجية التي اعتمدها أوقليدس في بناء هندسته الفيزيائية، حيث ألف بين الاستنباط [*] *(deduction)* والاستقراء *(induction)* في بناء النسق المفاهيمي للنظريات الهندسية، "فالدقة الرياضية للفيزياء لا ينبغي لها أن تدفعنا إلى الاعتقاد بأن في استطاعة المناهج الاستنباطية أن تشرح وتعلل جميع العمليات الفكرية، المتضمنة في بناء هذا العلم، ذلك أن الفيزيائي يعتمد إلى جانب الاستنباط على استخدام الاستقراء"[5].

([2]) . المرجع السابق نفسه، ص 89.

([3]) . س. بريوشنكين: أسرار الفيزياء الفلكية والميثولوجيا القديمة، ترجمة د. حسان ميخائيل إسحق، منشورات دار علاء الدين للنشر والتوزيع والترجمة، دمشق، سوريا، (ط1)، 2006 ص 226.

([4]) – محمد عابد الجابري:تطور الفكر الرياضي و العقلانية المعاصرة، (ج1)، ص 69.

([*]) . 'فعل البرهنة أو الاستدلال على نتيجة (معلول) استنادا إلى اليقين والضرورة من مقدمة أو أكثر عن طريق قوانين المنطق. والنتيجة الاستنباطية هي سلسلة من القضايا كل منها إما فرض أو قضية تنطلق مباشرة عن طريق قوانين المنطق من قضايا سابقة في هذه السلسلة'. (م. روزنتال و ب. يودين: *الموسوعة الفلسفية*، ص ص 27. 28).

([1]) . هانز ريشنباخ: نشأة الفلسفة العلمية، ص 107.

إن منطق الطرح المستخلص من هذه المشاحنات الجدلية هو قلب معادلة (الأصول) إلى حوار الفروع بمعنى أن أصول الهندسة لم تعد ثابتة بل هي نسبية في اعتقاد المعاصرين، ولعل هذا ما يجلي حقيقة الصراع الدياليكتيكي بين ما يقتضيه الاستدلال العقلي لبنية المفاهيم والأنساق وبين المعطيات الأولية الحدسية التي لا تبعث على الخلاف والاختلاف " فإذا كانت الهندسة التقليدية تبدو في آن واحد عقلية وحدسية، فذلك لأنها تجمع وتدمج في علم واحد علمين متمايزين علمتنا المصادريات (*axiomatique*) فيما بعد أن نفصل بينهما "[6].

فالبناء الهندسي الإقليدي ليس مستقلا عن التشكيل العقلي، والإدراك الحدسي للمعارف، كما لا يمكن الاعتبار لمشروعية المنهج الاستنباطي إلا بتحقيق معادلة تطابق المبادئ مع الوقائع. بيد أن ما يفترضه المهندسون المعاصرون ـ فيما اتصل بالمنهج ـ هو إحلال المناهج الفرضية الاستنباطية بديلا عن المنهج الاستنباطي (الحسي) الذي يرتكز على قاعدة استواء المكان"والسمة البارزة لهذه الفروض عندهم هي عدم التناقض فيما بينها، بحيث يمكن أن تنتج عنها جملة هائلة من القضايا المشتقة أو النظريات التي تتناقض فيما بينها أيضا، والمهندسون المعاصرون لا يفرقون بين المسلمات و الأصول الموضوعة " [7]. وقد أتت محاولات المعاصرين متهافتة فأعلنوا فتحا جديدا في الهندسة المعاصرة.

أ ـ **هندسة لوباتشفسكي** LOBATCHEVSKI (1793 ـ 1856): العالم الروسي لوباتشفسكي أراد أن يبرهن على مسلمة التوازي الإقليدية، بواسطة البرهان بالخلف بافتراض ما يناقض القضية الأصلية " افترض لوباتشفسكي عكس القضية أي أنه من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم، لا مواز واحد للأول كما يقول "أوقليدس"، بل موازيين أو أكثر، وانطلاقا من هذا الفرض راح يستنتج نتائج فتوصل إلى عدد من النظريات الهندسية دون أن يوقعه ذلك في تناقض ما، أي دون أن يتأدى إلى بطلان فرضه "[8]. واعتمادا على فرضيته التأسيسية، توصل لوباتشفسكي إلى نتائج غير ما عهدناه في مصادرات "إقليدس" نحو إقرار مسلمة جديدة مطابقة لنوعية الفرض الجديد ما نصها: أن مجموع زوايا المثلث لا تساوي 180° درجة، وإنما أقل من ذلك. وكون النتيجة ظهرت على نحو مخالف ليس معناه مناقضة اليقين الإقليدي، وإنما إقرار بيقين نسق المنطق الرياضي الجديد، الذي يولي أهمية للبناء النسقي الذي يحقق التطابق بين المنطلقات و النتائج من دون أن تثير النتائج انزلاقا أو تناقضا بينا. إن هذا النصر الذي حققه "لوباتشفسكي" أسهم كثيرا في تحرير العقل من نمطية التقليد والتبعية ل (الأصول). إن هندسة لوباتشفسكي التي أقامها بناء افتراضي مرتكزه تمثل مكان هندسي مقعر، والذي تبعا له

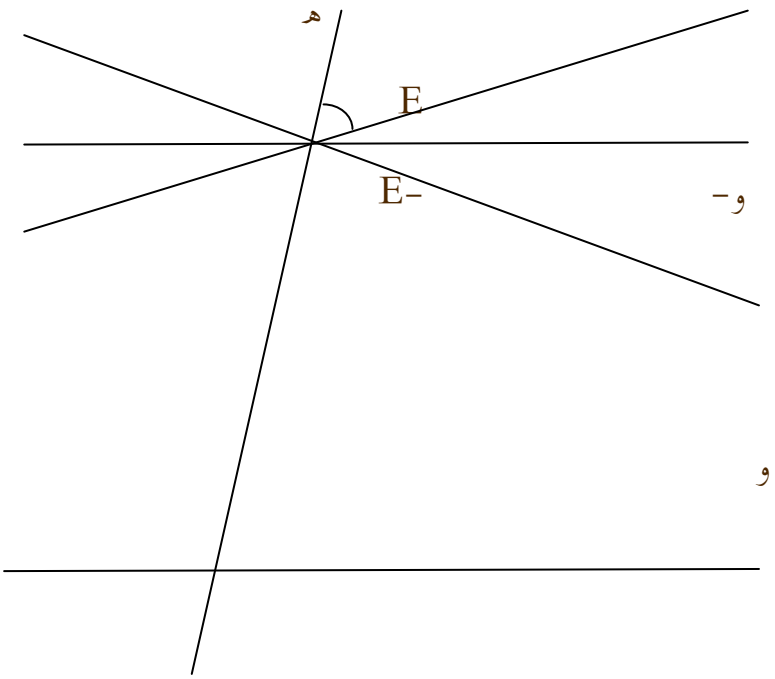
([2]) – روبير بلانشي: نظرية العلم، ترجمة د. محمود اليعقوبي، ديوان المطبوعات الجامعية . الجزائر، 2004 ص 89.

([7]) – عبد القادر بشتة: الإبستيمولوجيا، ص 69.

([8]) – محمد عابد الجابري: تطور الفكر الرياضي و العقلانية المعاصرة، (ج 1)، ص 69.

تتغير مسلمات النسق الاستنباطي الهندسي، نحو المسلمة الخامسة التي نصها: من نقطة خارج مستقيم يمر أكثر من مستقيم مواز له، وأن مجموع زوايا المثلث أقل من 180°.

إليك هذا الرسم البياني الذي يوضح تميز مصادراتي لا لإقليدي اختصت به هندسة لوباتشفسكي:



هذا الرسم البياني يوضح فارق التمثل الهندسي الإوقليدي مع التمثل الهندسي اللاإوقليدي بحيث نستنتج من هذا الرسم أنه يمكن أن تكون هناك حزمة من الخطوط الموزعة حول و- توزيعا متناسقا والتي تحدها الخطوط التي تميل على جانبي و- وبزاوية وأن كل خطوط هذه الحزمة لا تتقاطع، كما هو مبيّن في الشكل.

ب ـ هندسة ريمان: نحا نحو لوياتشفسكي العالم الألماني الشهير "ريمان" *Riemann* (1826. 1866) عندما تجاوز مسلمة التوازي الأوقليدية فاعتمد افتراضات مغايرة للأولى " لقد افترض أنه من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم أي مواز له وأن أي مستقيمين كيفما كان وضعهما لا بد أن يتقاطعا، وانطلاقا من هذا الفرض الجديد توصل ريمان إلى نتائج جديدة منها. أن زوايا المثلث تساوي دوما أكثر من 180 درجة"[9]. و ذاك إنكار صريح لريمان بأنه ليس ثمة خطوط متوازية وان كل الخطوط لا بد وان تتقاطع، ولا تأخذ هندسة إقليدس بالبديهية التي نصها: ثمة خط مستقيم واحد يصل بين نقطتين معينتين (**فيليب فرانك: فلسفة العلم**، تر علي ناصف، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، بيروت، لبنان، ط1، 1983، ص 96).

وإذ يؤكد "ريمان" هذا التصور فإنه يستند أساسا على نظريته في تصور المكان، إذ يعتبر المكان كروي " إذ يمكن فهم هندسة "ريمان" إذا اعتبرنا المكان كروي الشكل، كالكرة الأرضية المجسمة التي يستعملها الجغرافيون لتحديد

---

(9) – المرجع نفسه، ص 70.

الأمكنة والبلدان بواسطة خطوط الطول وخطوط العرض، فالمستقيم في هذه الحالة سيكون عبارة عن دائرة كبرى على سطح الكرة، ومعلوم أنه لا يمكن رسم مواز لهذا المستقيم من نقطة خارجه "[10]. وفهمنا الضمني لمتن هذه المعادلة الريمانية يطلعنا على نوعية التصور الهندسي للمكان المخالف للتصور الإقليدي وكذا لتصور "لوباتشفسكي"، فالمكان الكروي يفترض سلفا استحالة التوازي بين خطين، لأن الخط يتخذ وضعا مقعرا والاستمرار في مد الخط يؤول إلى تشكيل الدائرة، كما أن مجموع زوايا المثلث حتما ستكون أكثر من 180° درجة. فضلا عن تصور "ريمان" لطبيعة المكان الذي يعتبره نهائي محدود. ولعل هذا التصور الريماني الهندسي هو الذي يبرر نبوغه الفلكي في دراساته لحركات الكواكب والنجوم، مستخلصا في النهاية نظريته في الهندسة الفضائية " لقد اضطر هذا الرياضي الألماني لا إلى التخلي عن مصادرة "إقليدس" فحسب، بل كذلك عن البديهية الأولى القاضية بأنه لا يمر من نقطتين إلا مستقيم واحد "[11].

04/ المكان الهندسي اللاإقليدي مقولة افتراضية نسبية: فالثابت إذن ـ بحسب قراءتنا في منطوق الأنساق اللاإقليدية هندسيا ـ أن المكان الهندسي الإقليدي يختلف عن المكان الهندسي اللاإقليدي، والمرجع في ذلك هو تنوع المنطلقات البنائية في كل نسق، ومن السذاجة طرح مسألة الأصوب بين المتعارضات في الفهم الافتراضي الاستنباطي وإن كانت هذه المعادلة ستفتح روافد جدلية حول إشكالية طبيعة المفاهيم والمعادلات الهندسية أترتد إلى الاشتقاق العقلي أم إلى معطيات الخبرة .

"إن الدقة الرياضية الفيزيائية لا ينبغي لها أن تدفعنا إلى الاعتقاد بأن في استطاعة المناهج الاستنباطية أن تشرح وتعلل جميع العمليات الفكرية المتضمنة في بناء هذا العلم. ذلك أن الفيزيائي يعتمد إلى جانب الاستنباط على استخدام الاستقراء"[12].

فالافتراضات الهندسية المستنبطة من تصور طبيعة المكان هي التي تحدد كيفية تموضع وبناء المفاهيم والعلاقات الرياضية المختلفة، فالمكان في التصور الهندسي الشامل نسبي ويقيني وهذا ما تنص عليه مقررات نظرية النسبية العامة "إذ تصور هذه النظرية الكون على نموذج إحدى الهندسات اللاإقليدية وهي هندسة "ريمان" وتقول مثلا: إن الكون سطح منحني أو كروي الشكل "[13]. ولما كانت الأمكنة الهندسية نسبية، فإن وسائل رصد الأبعاد بين الخطوط والزوايا نسبية كذلك ومع ذلك" فإن من الصفات العامة للهندسة اللاإقليدية، أنها تكاد تكون

([10]) – المرجع نفسه، نفس الصفحة.

([11]) – هنري بوانكاريه: العلم والفرضية، ترجمة د. حمادي بن جاب الله، المنظمة العربية للترجمة، بيروت ـ لبنان، 2002 ص 118.

([12]) . هانز ريشنباخ: *نشأة الفلسفة العلمية*، ص 101. 102.

([13]) – د . حسين علي: فلسفة العلم عند هانز ريشنباخ، ص ص 182. 183.

مماثلة للهندسة الإقليدية بالنسبة إلى المساحات الصغيرة، والأبعاد الأرضية صغيرة بالقياس إلى الأبعاد الفلكية فنحن لا نستطيع ملاحظة ما يحدث من انحرافات عن الهندسة الإقليدية عن طريق الملاحظة الأرضية"[14].

05/ تعدد الأنساق الهندسية انفتاح ثوري إبستيمي: وعموما فإن الطرح الجدلي و صراع القديم بالجديد قي نطاق الأبحاث الهندسية التقليدية والمعاصرة، ليجسد تنوع وثراء الفكر العلمي، الذي تجاوز النزعة الدوغماطية، بتخطي عقبة اليقين الهندسي المطلق ليطرح مشكلة أزمة الأسس، والفضل في تخطي كل هذه العقبات المعلومية، يتجلى من خلال تأثير نظرية النسبية التي قومت عديدا من المعادلات الفيزيائية والرياضية، وإذ ذاك فقد جاءت أعمال (أينشتين و ماكس بلانك و هيزنبرغ) ثورة مجددة، باعثة على معقولية الانفتاح، التي ترتكز لا على مبدأ الهوية، ولكن تجعل من مبدأ تحديل المعارف وتصادم الافتراضات قاعدة إبستيمولوجية غرضها الارتقاء بأسباب الكشف والثورة لتحقيق الاكتمال في روح العلم.

وقد أفرد بولغان قولا بليغا في شأن تعدد الأنساق الرياضية المعاصرة قائلا: " إن كثرة تعدد الأنساق في الهندسة لدليل على أن ليس ثمة حقائق مطلقة في الرياضيات". كما أن ثمة ما يوحي بأن صفة اليقين في الرياضيات قد امتزجت باللايقين خاصة عندما يتعلق الأمر بنظريتي الاحتمالات واللامعين ، كذا ينطبق الحكم على بعض القيم التقريبية مثل القيمة $\prod$ (3,14). إن اليقين الرياضي في نسبيته يستمد معايير الدقة والمعقولية التامة من نسقه الذي هو إنشاء عقلي مجرد، حيث لا يستند في تأسيس براهينه على معطيات الواقع، ولكنه يرتكز على مقومات نسقية مطلقة وواضحة، سمتها التجريد والصورنة البحتة (التعريفات والبديهيات والمصادرات) . أما التعريفات الرياضية فمؤشر على بداهة ووضوح المنطلقات التي ينبنى عليها النسق الاستنباطي إذ لا يتوجب أن تتناقض مع نسقها الافتراضي ‘إن الرياضيات المعاصرة صارت صورية لا تهتم سوى باندماج القضية في النسق أي الانسجام الداخلي.و صارت المنطلقات مجرد فرضيات لا يمكن الحكم عليها بالصحة و الخطأ إلا داخل النسق الذي تنتمي إليه مثلا. القضية القائلة مجموع زوايا المثلث أكبر من 180° هي صحيحة بالنسبة لنسق ريمان ،و غير صحيحة بالنسبة للأنساق الأخرى...و لهذا قال برتراند راسل:" إن الرياضي الحديث يشبه خياط الملابس يخيط بدلات و لا يعرف أصحابها" يعني يؤلف أنساق صحيحة منطقيا لكن لا يهمه هل يوجد لها تطبيقا على مستوى الواقع، فتلك مهمة الرياضيات التطبيقية. و قال أيضا :"إن الرياضي المعاصر لا يعرف عما يتحدث و لا إذا كان ما يتحدث عنه صحيحا".

خاتمة: تأكد لدينا من خلال العرض التحليلي لمشكلة اليقين الرياضي وأزمة الأنساق والأسس أن منطق النظرية المعاصرة مشروع، إذ بررت بالمحاجة المنطقية نسبية اليقين في الحقائق والقوانين والأنساق الرياضية، لا ريب أن هذا

([14]) – المرجع السابق نفسه، ص 183.

الإقرار له ما يؤيده في تاريخ العلوم المعاصرة عامة وفي التفكير الرياضي خصوصا، إذ أضحى من الضروري إيصال الأنساق والنظريات الرياضية بتحولات العلوم وثوراتها الإبستيمولوجية التي بدّدت دوغمائية اليقين والمطلق، لتفسح المجال أمام تحرر الأفكار والأنساق من نمطيتها، وتلك غاية العلوم (وحدة المعرفة العلمية).