المحاضرة 10

الموضوع : **مقاييس التشتت (2)**

عنوان الدرس : **الإنحراف المعياري والتباين**

عناصر المحاضرة

- مقدمة
- نشاط
- **المقطع الأول :** حساب الإنحراف المعياري والتباين لبيانات مبوبة
- نشاط
- **المقطع الثاني :** خصائص التباين والإنحراف المعياري

نشاط

الخصائص والمميزات

مثال توضيحي.

تطبيق (واجب) .

أهداف المحاضرة

الخاص : في نهاية المحاضرة

- يحسب الطالب التباين والإنحراف المعياري لسلسلة بيانات مبوبة و يستنتج خصائصهما الرياضية .

إجرائي

- يحسب الإنحراف المعياري والتباين لبيانات مبوبة بتهيئة الجدول التكراري مستخدما العلاقة الرياضية لكل منهما من دون خطإ .
- يحدد خصائص التباين والإنحراف المعياري لسلسلة بيانات مبوبة باستخدام المفهوم ويترجمها رياضيا .

ملخص المحاضرة

تتضمن المحاضرة أنشطة تدريبية وعملية بطريقة حساب التباين والإنحراف المعياري لبيانات

سلسلة احصائية مبوبة في جدول تكراري بطرق متعددة ، وتستعرض مميزات وخصائص كل منهما بأمثلة وأنشطة توضيحية .

مقدمة

تعرضنا في المحاضرة السابقة لمقاييس التشتت (الإنحراف المعياري ، والتباين) لبيانات غير مبوبة ، وسنتطرق هنا لحالة البيانات المبوبة في جدول تكراري لنستعرض الطرق الرياضية الممكنة لحساب كل منهما ومعرفة تشتت السلسلة ومميزات كل من المقياسيين .

نشاط 1 :

لتكن السلسلة الإحصائية التالية :

x_i	3	5	7	9	11	13
f_i	0,08	0,15	0,28	0,35	0,1	0,04

1- أحسب التباين و الانحراف المعياري للسلسلة

الحل :

نستعمل التعريف ونظيف سطرا للجدول لحساب قيم $f_i.x_i$

وباستخدام القاعدة الرياضية لكل من الإنحراف المعياري والتباين نجد

التباين $V = 5,8016$

الإنحراف المعياري $s \simeq 2,4086$

x_i	3	5	7	9	11	13	المجموع
f_i	0,08	0,15	0,28	0,35	0,1	0,04	
$f_i.x_i$	0,24	0,75	1,96	3,15	1,1	0,52	7,72
$f_i.x_i^2$	0,72	3,75	13,72	28,35	12,1	6,76	65,4

المقطع الأول : حساب الإنحراف المعياري والتباين لبيانات مبوبة

إذا كان لدينا بيانات عددها n وكانت هذه البيانات ملخصة في جدول تكراري بحيث أن:

أ- عدد الفترات هو k.

ب- مراكز الفترات هي $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

ج- تكرارات الفترات هي $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

بطريقة مشابهة لحسب المتوسط للتوزيع التكراري فإن التباين للتوزيع التكراري المبوب يمكن حسابه بشكل تقريبي بالصيغة التالية:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} \qquad (7)$$

حيث أن:

$$n = \sum_{i=1}^{k} f_i \ , \quad \bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{\sum xf}{n} \ ,$$

كما يمكن استخدام إحدى الصيغتين الحسابيتين التاليتين:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i f_i\right)^2 / \ n\right\} \qquad (8)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - n\left(\bar{x}\right)^2\right\} \qquad (9)$$

يمكن تلخيص عمليتي إيجاد المتوسط والتباين باستخدام الجدول التالي:

الفترة	مركز الفترة x	التكرار f	xf	$x^2 f$	$f(x-\bar{x})^2$
الفترة رقم 1	x_1	f_1	$x_1 f_1$	$x_1^2 f_1$	$f_1 (x_1 - \bar{x})^2$
الفترة رقم 2	x_2	f_2	$x_2 f_2$	$x_2^2 f_2$	$f_2 (x_2 - \bar{x})^2$
:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:
الفترة رقم k	x_k	f_k	$x_k f_k$	$x_k^2 f_k$	$f_k (x_k - \text{ر})^2$
المجموع		$\sum f = n$	$\sum xf$	$\sum x^2 f$	$\sum_{i=1}^{k}(xi - \bar{x})$

مثال :

أوجد التباين والانحراف المعياري لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما يلي .

الحل:

من خلال الجدول الذي يلخص المعطيات يمكن إيجاد التباين :

مستوى الهيموجلوبين	مركز الفترة x	التكرار f	xf	$x^2 f$	$f(x-\bar{x})^2$ $f(x-16.01)^2$
12.95 – 13.95	13.45	3	40.35	542.708	19.6608
13.9 5– 14.95	14.45	5	72.25	1044.013	12.1680
14. 95– 15.95	15.45	15	231.75	3580.538	4.7040
15. 95– 16.95	16.45	16	263.20	4329.640	3.0976
16. 95– 17.95	17.45	10	174.50	3045.025	20.7360
17. 95– 18.95	18.45	1	18.45	340.403	5.9536
المجموع		$\sum f$ $= 50$	$\sum xf$ $= 800.5$	$\sum x^2 f$ $=12882.33$	$\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i-\bar{x})^2$ $= 66.320$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{\sum xf}{n} = \frac{800.5}{50} = 16.01$$

حساب التباين باستخدام صيغة التعريف:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{66.320}{50-1} = 1.3535$$

حساب التباين باستخدام الصيغة الحسابية الأولى:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i f_i\right)^2 / n\right\}$$

$$= \frac{1}{50-1}\left(12882.33 - \frac{(800.5)^2}{50}\right)$$

$$= \frac{1}{49}(12882.33 - 12816.005)$$

$$= \frac{66.325}{49} = 1.3536$$

حساب التباين باستخدام الصيغة الحسابية الثانية:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - n(\bar{x})^2\right\}$$

$$= \frac{1}{50-1}\{12882.33 - (50)(16.01)^2\}$$

$$=\frac{1}{49}\{12882.33-12816.005\}$$

$$=\frac{66.325}{49}=1.3536$$

حساب الانحراف المعياري:

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{1.3536}=1.163$$

المقطع الثاني : خصائص التباين والانحراف المعياري

الخصائص والمميزات :

1. يخضع التباين والانحراف المعياري لبعض العمليات الجبرية. فإذا كان s^2 و s هما على الترتيب التباين والانحراف المعياري للبيانات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وكان a و b مقدارين ثابتين، فإن:

أ- تباين البيانات $x_1 \pm b, x_2 \pm b, \ldots, x_n \pm b$ هو s^2 وأما انحرافها المعياري فهو s. لذلك فإن التباين والانحراف المعياري لا يتأثران بإضافة أو طرح مقدار ثابت من جميع المشاهدات.

ب- تباين البيانات $ax_1, ax_2, \ldots, ax_n$ هو a^2s^2 وأما انحرافها المعياري فهو $|a|s$. حيث $|a|$ هي القيمة المطلقة للقيمة a.

ج- تباين البيانات $ax_1 \pm b, ax_2 \pm b, \ldots, ax_n \pm b$ هو a^2s^2 وأما انحرافها المعياري فهو $|a|s$.

د- تباين المقدار الثابت يساوي الصفر.

نشاط :

لخص الخاصية السابقة لكل من الإنحراف المعياري والتباين في جدول :

التلخيص :

يمكن تلخيص هذه الخاصية في الجدول التالي:

المشاهدات	التباين	الانحراف المعياري
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	s^2	s
$x_1 \pm b, x_2 \pm b, \ldots, x_n \pm b$	s^2	s

المشاهدات	التباين	الانحراف المعياري
$ax_1, ax_2, \cdots, ax_n$	$a^2 s^2$	$\lvert a \rvert s$
$ax_1 \pm b, ax_2 \pm b, \cdots, ax_n \pm b$	$a^2 s^2$	$\lvert a \rvert s$

مثال تطبيقي :

	المشاهدات	الانحراف المعياري	التباين
x :	2, 6, 4, 3, 5	$s = 1.581$	$s^2 = 2.5$
$x+5$:	7, 11, 9, 8, 10	1.581	2.5
$3x$:	6, 18, 12, 9, 15	$\lvert 3 \rvert \times 1.581 = 4.743$	$9 \times 2.5 = 22.5$
$3x+5$:	11, 23, 17, 14, 20	$\lvert 3 \rvert \times 1.581 = 4.743$	$9 \times 2.5 = 22.5$

نشاط موضعي :

سؤال 1:

أجب بصحيح أو خاطئ :

1 – إذا كان التباين للمشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو 36

فإن التباين للمشاهدات $\frac{x_1 - 10}{2}, \frac{x_2 - 10}{2}, \cdots, \frac{x_n - 10}{2}$ هو $9 = \frac{36}{4} = 36 \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

وأما الانحراف المعياري فهو $\sqrt{9} = 3$.

سؤال 2 :

إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات بحيث أن عدد بيانات المجموعة الأولى n_1 ومتوسطها $\bar{x}_1$ وتباينها s_1^2 وكان عدد بيانات المجموعة الثانية n_2 ومتوسطها $\bar{x}_2$ وتباينها s_2^2 وإذا كان $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ (أي أن متوسطي المجموعتين متساويان) فإن تباين المجموعة الكلية المكونة من دمج هاتين المجموعتين يمكن حسابه بالصيغة التالية:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 1}$$

سؤال 3 :

أوجد تباين المجموعة الكلية المكونة من دمج المجموعتين التاليتين:

	المجموعة الأولى	المجموعة الثانية
حجم العينة	$n_1 = 4$	$n_2 = 6$
المتوسط	$\bar{x}_1 = 5$	$\bar{x}_2 = 5$
التباين	$s_1^2 = 3$	$s_2^2 = 3.5$

الحل:

أولاً نلاحظ أن متوسطي المجموعتين متساويان.

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 1}$$
$$= \frac{(4-1)(3) + (6-1)(3.5)}{4+6-1} = 2.944$$

السؤال 4 :

يقترح مدير شركة على العمال طريقتين لزيادة الأجور

* الطريقة الأولى : رفع الأجور كلها بنسبة% 5

* الطريقة الثانية : زيادة مبلغ 750 DA للجميع

يُفضّل العمال الطريقة التي تتقارب بها الأجور أكثر بعد الزيادة . فإذا علمت أن معدل أجور العمال قبل الزيادة هو 15000 DA و الانحراف المعياري هو 5400 DA . فأي الطريقتين تقترحها على العمال لتحقق لهم الزيادة في الأجور مع تقاربها .

على ماذا تعتمد في اختيارك للطريقة .

<u>الحل:</u>

نعتمد على حساب الإنحراف المعياري في كل من الطريقتين ونختار الطريقة التي يكون فيها الإنحراف المعياري أقل .

طريقة 1 : إذا كان X الأجر قبل الزيادة ، يكون عندئذ الأجر الجديد $Y = 1,05.X$

و منه معدل أجور العمال بعد الزيادة هو **15000 × 1,05 = 15750 DA**

و الإنحراف المعياري الجديد هو **5400 × 1,05 = 5670 DA**

طريقة 2 : معدل أجور العمال بعد الزيادة هو **15000 + 750 = 15750 DA**

و الإنحراف المعياري الجديد يبقى هو نفسه **5400 DA**

واجب 10 :

يراقب بستاني أزهارا و يسجل في نهاية كل شهر أطوال سيقانها .

في نهاية الشهر الأول سجل النتائج التالية :

طول السيقان **cm**	[3 , 5 [	[5 ، 7 [	[7 , 9 [
المراكز x_i	4	6	8
التكرار n_i	30	20	50

1. أحسب $\bar{x}$ الوسط الحسابي لهذه الأطوال
2. لتكن العبارة $s(x)=\frac{1}{10}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} n_i(x_i-x)^2}$
   - بيّن أن أصغر قيمة تأخذها العبارة $s(x)$ هي $s(\bar{X})$
3. في نهاية الشهر الثاني لاحظ البستاني أن أطوال السيقان تضاعفت ($y_i = 2.x_i$) ، أحسب $s(\bar{Y})$ حيث $\bar{Y}$ هو الوسط الحسابي الجديد
   ثم أوجد علاقة بين $s(\bar{X})$ و $s(\bar{Y})$
4. بعد الشهر الثالث إزداد طول السيقان بسنتمتر واحد ($z_i = y_i + 1$)
   أحسب الوسط الحسابي الجديد $\bar{Z}$ ثم استنتج علاقة بين $s(\bar{X})$ و $s(\bar{Z})$