المحاضرة 11

التوزيعات النظرية الإحتمالية

الموضوع :   توزيع ذو الحدين

عناصر المحاضرة

- مقدمة
- نشاط
- توزيع ذو الحدين
- مثال توضيحي
- التمثيل البياني لتوزيع ذو الحدين
- تطبيق .

أهداف المحاضرة

خاص : في نهاية المحاضرة

- يعرف الطالب مفهوم توزيع ذي الحدين كتوزيع إحتمالي محددا شروط استخدامه .

إجرائي :

- يحسب إحتمالات المتغير العشوائي المنفصل باستخدام قاعدة التوزيع الثنائي مستعينا بجدول القيم الحرجة للتوزيع .
- يمثل المتغير العشوائي المنفصل بيانيا ، إعتمادا على دالة احتمالات وقوعه و باستخدام التمثيل البياني المناسب (الأعمدة) .

ملخص المحاضرة

تتضمن المحاضرة المفاهيم والقواعد الحسابية لتوزيع ثنائي الحد كأحد التوزيعات النظرية الإحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة ، وطرق حساب إحتمالات وقوع الأحداث وطرق تمثيل دالة الإحتمال ، وكيفية استخدام جدول القيم الحرجة للإحتمالات المرافقة .

مقدمة

تعتمد التوزيعات الاحتمالية والتي منها توزيع ذو الحدين والتوزيع الطبيعي والطبيعي المعياري وغيرها على مفهوم المتغير العشوائي

المتغير العشوائي :

يعرف المتغير العشوائي بكونه :" متغير ترتبط قيمه باحتمال تحقق تلك القيم .

المتغير العشوائي المنفصل :

المتغير المنفصل في مقابل المتصل هو المتغير الذي يمكن أن يأخذ قيما محدودة ومتميزة ، وتسمى مجموعة كل القيم الممكنة للمتغير العشوائي واحتمالاتها المناظرة بالتوزيع الاحتمالي ويكون مجموع الاحتمالات مساويا الواحد الصحيح " (سالقاتور دومينيك :1982) .

المقطع الأول : توزيع ذى الحدين .: The Binomial Distribution.

توزيع ذو الحدين هو أحد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة ، ويستخدم لإيجاد احتمال وقوع حدث معين (نجاح) عددا من المرات مقداره X بين من n من المحاولات لنفس التجربة .

نرمز لهذا الاحتمال بالرمز $p(x)$ حيث : $\sum p(x) = 1$

مثال :

عند رمي عملة متوازنة مرتين فإن النواتج الممكنة هي : HH– TH– HT– TT إذن يكون :

$P(2H)=1\div 2$ $P(1H)= 1\div 2$ $P(0H)=1\div 4$

فيكون المجموع مساويا للواحد صحيح .

نلاحظ أن عدد الصور متغير عشوائي منفصل ، لذلك تمثل مجموعة كل النواتج مع احتمالاتها المناظرة توزيعا احتماليا منفصلا

احتمال عدد الصور	النواتج الممكنة	عدد الصور
0.25	TT	0
0.50	TH–HT	1
0.25	HH	2
1.00		

مثال :

بالإستعانة بجدول توزيع ذو الحدين أوجد احتمال الحصول على 4 صور في 6 رميات لعملة متوازنة

المقطع الثاني : شروط توزيع ذو الحدين :

يستعمل التوزيع تحت تتحقق الشروط التالية :

1 –يوجد فقط ناتجان ممكنان ومتنافيان، أي إذا قمنا بتجربة عشوائية فسيكون لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين (نجاح) او عدم ظهوره ونسميه (فشل) .

نجاح الطالب او فشلة، المصباح الكهربائى جيد او تالف، وصول طائرة فى موعدها او عدم وصولها، ظهور الصورة عند القاء قطعة نقود او عدم ظهورها.

ـ و إذا أجريت هذة التجربة n من المرات ،

و اذا افترضنا أيضا أن احتمال نجاح هذة التجربة هو p .

و احتمال فشلها هو $q = 1 - p$ حيث : $p + q = 1$

2 –المحاولات وعددها n مستقلة عن بعضها البعض .

3 – احتمال وقوع الحدث المقصود في كل محاولة النجاح p ثابت ولايتغير من محاولة لأخرى فيكون :

ـ نفرض أن x هو التغير العشوائى المعرف على هذة التجربة و يرمز الى عدد مرات النجاح لهذة التجربة حيث عدد المرات n واحتمال النجاح هو p والفشل q حيث $q = 1 - p$:

تعطى دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى X و التى نرمز لها بالرمز f (x) بالمعادلة :

$$p(X = x) = f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & else\ where. \end{cases}$$

أي :
$$p(^{x}) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x (1-p)^{\quad 1-x}$$

حيث n عدد صحيح موجب، $0 \langle p \langle 1$

و ! n مضروب حيث : $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots 3.2.1 = n$

$0\,! = 1$

ـ أذا كانت f(x) دالة كثافة احتمال للتغير العشوائى x يجب أن تحقق

$$1)\ f(x) \geq o$$

$$2) \sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$$

$$1) \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \rangle\ o$$

نستنتج أن : $f(x) \geq 0 \qquad x = 0,1,2,\ldots.. n$

وايضا $p^x\ ,\ q^{n-x} = (1-p)^{n-x}$ موجبتان لجميع قيم x حيث $x = 0,1,2,\ldots., n$ و منها

ومنه f(x) موجبة.

2. ثانيا

$$\sum_{x=o}^{n}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}=[(1-p)+p]^{n}=1$$

اى أن f (x) نحقق شروط دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى X المنفصل و يطلق عليها دالة كثافة احتمال

ثالثا :. الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للتوزيع

متوسط توزيع ذو الحدين :

وانحرافه المعياري : $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

طبيعة التوزيع :

إذا كانت : $p = 1 - p = 0.5$ يكون التوزيع متماثلا (معتدلا)

$p< 0.5$ يكون التوزيع ملتويا إلى اليمين (غير معتدل)

$p> 0.5$ يكون التوزيع ملتويا إلى اليسار (غير معتدل)

مثال توضيحي :

عند رمي عملة متوازنة مرتين فإن النواتج الممكنة هي : HH–HT–TH–TT

أي : $p(2H)=1/4$ $p(1H)=1/2$ $p(0H)=1/4$

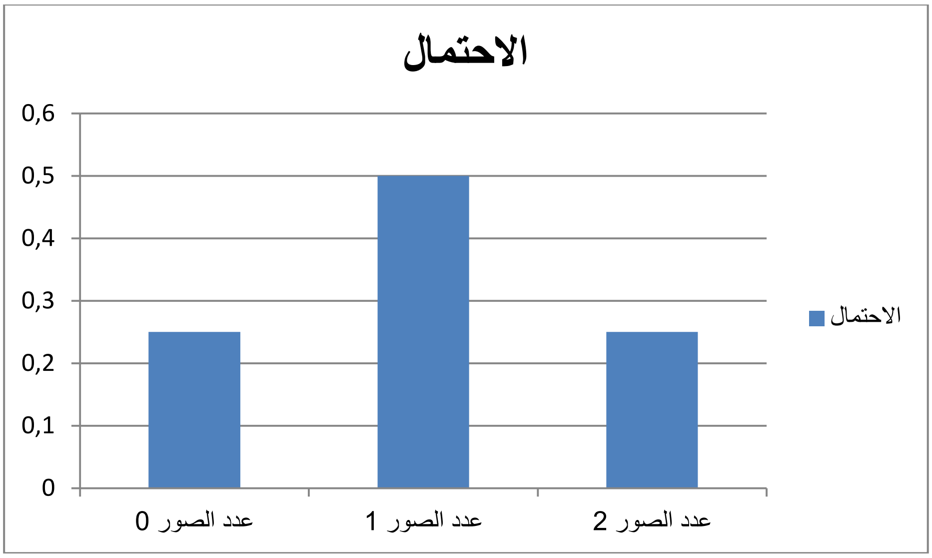
عدد الصور يمثل متغيرا عشوائيا منفضلا ، وتمثل مجموعة كل النوتج الممكنة مع احتمالاتها المناظرة توزيعا احتماليا منفصلا .

ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي :

احتمال عدد الصور	النواتج الممكنة	عدد الصور
0.25	TT	0
0.5	TH HT	1
0.25	HH	2

التمثيل البياني لتوزيع ذو الحدين :

في المثال السابق يمثل التوزيع بيانيا بالأعمدة كالتالي :



التوزيع الاحتمالي لعدد الصور في رميتين لعملة متوازنة

تطبيق :

– باستخدام قواعد توزيع ذو الحدين أوجد احتمال الحصول على 4 صور في 6 رميات لعملة متوازنة .

– أحسب المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري للتوزيع

– مثل التوزيع بيانيا واستنتج طبيعته .

الحل :

لدينا : $p(^x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p) \quad ^{1-x}$

P(4)=6! /4!(6 – 4) ! × $(1/2)^4(1/2)^2$

P(4)= 15/64

P(4)= 0.23 أو %23

ويمكن استخدام جدول قيم توزيع ذو الحدين لإستخراج القيمة مباشرة دون اللجوء للحسابات

حيث : n=4 ; p = 1/ 2

كما أن عدد الصور المتوقع (المتوسط) في ستة رميات هو : $\mu = np$=3

والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لست رميات هو : $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

$\sigma = \sqrt{6 \times 0.5(1-0.5)}$ =1.22

التوزيع متماثل لأن p=0.5