المحاضرة الاولى

عناصر المحاضرة :

1 - تذكير بأساسيات العمليات الحسابية

2 - مبادئ ومفاهيم الإحصاء .

بعض العمليات الحسابية ذات العلاقة بالإحصاء ..

1- جمع الكسور الاعتيادية :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

ملاحظة : لا نستطيع جمع الكسور إلا بتوحيد المقامات

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} =$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} =$$

$$\frac{5}{6}$$

جمع الأعداد الصحيحة و الكسور:-

1-نجمع الكسور لوحدها والأعداد لوحدها

2-نضرب المقام في العدد الصحيح و نجمعه مع البسط (المقام X العدد الصحيح + البسط) و تنبطق هذه القاعدة تماما لعملية الطرح .

مثال :

$$1\frac{3}{4} + 2\frac{5}{9} =$$

$$7 = (3) + (4 = 1 \times 4) = 1\ \frac{3}{4}$$

$$23 = (5) + (18 = 2 \times 9) = 2\ \frac{5}{9}$$

$$\frac{119}{36} \qquad 4\ \frac{155}{36} = \frac{92}{36} = \frac{63}{36} + \frac{}{} = \frac{4 \times 23}{4 \times 9} + \frac{9 \times 7}{9 \times 4}$$

2 – طرح الكسور :-

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

ملاحظة : لا نستطيع طرح الكسور إلا بتوحيد المقامات

$$= \frac{2 \times 1}{2 \times 3} - \frac{3 \times 1}{3 \times 2}$$

$$= \frac{2}{6} - \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{6}$$

طرح الأعداد الصحيحة والكسور :-

$$5\frac{2}{7} - 3\frac{1}{4} =$$

$$5\frac{2}{7} = (35 = 5 \times 7) + (2) = 37$$

$$3\frac{1}{4} = (128 = 4 \times 3) + (1) = 13$$

$$\frac{4 \times 37}{4 \times 7} - \frac{7 \times 13}{7 \times 4} = \frac{148}{28} - \frac{91}{28} = \frac{57}{28} = 2\frac{1}{28}$$

3-ضرب الكسور :-

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{3 \times 4}{7 \times 9} = \frac{12}{63}$$

4-قسمة الكسور الاعتيادية :-

$$\frac{3}{4} / \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{4}$$

(في عملية القسمة نحول القسمة إلى ضرب مع قلب الكسر الثاني)

....

الكسور العشرية

1- جمع الكسور العشرية :-

15.87 = 0.30 + 12.07 + 3.50

(يتم الجمع بالطريقة المعتادة بدون تغيير الفاصلة " الفاصلة في الكسور العشرية وضعت بعد خانتين من الأرقام كذلك تكون بالنسبة للناتج وكذا الحال لعملية الطرح ")

2- طرح الكسور العشرية :-

5.32 = 7.05 – 12.37

3- ضرب الكسور العشرية :-

11.71742 = 2.21 X 5.302

(يتم الضرب بالطريقة المعتادة و توضع الفاصلة بعدد خانات العدد الصحيح مابعد الفاصلة)

4- قسمة الكسور العشرية:-

12.2 = 2.3 / 28.06

قبل البدء بعملية قسمة الكسور العشرية نحرك الفاصلة يمين العدد بمقدار خانة واحدة فتصبح :

12.2 = 23 / 280.6

مربع القيمة :- هو ضرب العدد بنفسه مثال

مربع القيمة للعدد 9 = 9 X 9 = 81

مربع القيمة للعدد 12 = 12 X 12 = 14

الجذر التربعي :-

نبحث عن رقم نضربه بنفسه ليساوي الرقم الموجود لدينا لاستخرج الجذر التربعي له مثال :

الجذر التربعي 169 = | 169 = +أو – 13

الجذر التربيعي 625= | 625 = +او– 25

النسب المئوية : المجموع الجزئي / المجموع الكلي X 100 = النسبة المئوية

- **إذا كان عدد طلاب كلية العلوم الاجتماعية هو 5000 طالب و طلاب الجذع المشترك 2000 طالب فأن نسبة عدد طلاب الجذع المشترك لمجموع الطلاب هي**
- **2000/ 5000 x 100 = 40%**

- إذا كان الموظف دخله 80000 دينار شهريا ويدفع إيجار 20000 دينار شهريا فما هي النسبة المئوية للايجار من دخل الموظف
- 2000 / 8000 x 100 = 25 %

الرموز التي نحتاجها للإحصاء هي :-

درجة شخص في اختبار ما يرمز له بالرمز س

مجموع درجات الأشخاص نرمز لها بالرمز مج س

مجموع مربعات درجات الأشخاص نرمز لها بالرمز مج س2

2

مربع مجموع درجات الأشخاص نرمز له بالرمز (مج س)

طول الفئة (ل)

المتوسط (م)

الوسيط (و)

الانحراف (ح)

التكرار (ك)

مجموع التكرارات مج ك ونرمز له (ن)

المنوال (مل)

المجتمع و العينة

في حالة عمل بحث عن طلاب جامعة سكيف 2 فإننا لا نستطيع أن نجمع جميع الطلاب و تطبيق البحث عليهم (المجتمع الأصل) لذلك نلجأ إلى أخذ عينة (مجموعة صغيرة) تكون أفضل ما يمكن لتمثيل هذا المجتمع الأصل و عادة تكون العينة العشوائية هي أفضل ما يمكن لتطبيق البحث عليها .

أنواع الإحصاء

1- الإحصاء الوصفي :

يختص بجمع و وصف البيانات الإحصائية و جدولتها و عرضها بطريقة تسهل على الباحث و إعطاؤه وصف شامل و دقيق عن هذه البيانات .

2- الإحصاء الاستدلالي :

يعتمد على نظرية الإحتمالات في استقراء النتائج و اتخاذ القرارات المناسبة بخصوص المجتمع من خلال العينة .

المتغير و الثابت

يشير المتغير بالعادة إلى أي صفة يتغير بالنسبة لها الأفراد و تختلف الصفات و الخصائص من فرد لآخر أو من شيء لآخر . و البيانات الإحصائية التي يقوم الباحث بجمعها تدل على مقدار ما يمتلكه الشخص أو الشيء من تلك الخاصية و بهذا يسمى المتغير مثل : أطوال الأشخاص أو أوزانهم أو درجات الطلاب في الاختبارات أما إذا كانت الخاصية ثابتة لا تتغير مثال عدد ساعات اليوم 24 ساعة أو عدد أيام الأسبوع 7 أيام فنقول عنها ثابتة أو هو ما يثبته الباحث في بحثه عن خاصية معينة .

أنواع المتغيرات

أ) المتغيرات النوعية : و هي تلك المتغيرات التي تدل على الصفة أو النوع مثال : مغير الجنس (ذكر – أنثى) ، (متعلم – أمي) ، (متزوج – اعزب)

ب) المتغيرات الكمية و تنقسم إلى قسمين :

1) المتغيرات الكمية المتصلة :-

و هي المتغيرات التي يمكن أن تأخذ أي قيمة و التي تليها عددا لا نهائي من القيم فمثلا بين 2.1 نجد 1.001 ، 1.002 ، 1.003 و هكذا أي أنها تحتوي على كسور و مثال على ذلك طول الشخص أو المسافة ما بين نقطتين .

2) المتغيرات الكمية المنفصلة :-

أو المتغيرات المتقطعة و هي التي تأخذ عدد صحيح مثل عدد الطلاب في الفصل الدراسي و عدد الجامعات و غيرها .

القياس و المقاييس

يعرف القياس بأنه الأحداث أو الأشياء أرقما وفق لقواعد معينة .

1) المقياس الاسمي : و هو أسهل و أبسط المقاييس و تستخدم الأرقام فيه للتصنيف فقط مثلا رقم اللاعب 22 و رقم فريق معين 37 و كذلك تنصيف في حالة الجنس مثلا الرجل نصنفه برقم (1) و المراة برقم (2) و هكذا الأرقام لا تعطي شيئا سوى التصنيف .

2) المقياس الرتبي : و هذا المقياس أفضل من المقياس السابق بخاصية الترتيب مع ميزة التصنيف فمثلا في سباق معين نحصل على الترتيب الأول و الثاني و الثالث و لكن المسافات بين الأول و الثاني ليست بنفس المسافات بين الثالث و الثاني .

3) المقياس الفئوي : و هذا المقياس أفضل من المقياس الرتبي حيث أن المسافات بين الترتيب تكون متساوية مثل ذكاء أحمد في اختبار الذكاء 115 و نسبة ذكاء طارق 110 و نسبة ذكاء محمد 105 و نسبة ذكاء خالد 110 و هكذا نلاحظ الفرق بين أحمد و طارق 5

علامات وبين طارق و محمد 5 علامات وبين محمد و خالد 5 علامات تعني أن الفروق بينهم متساوية و ممكن أن تحدد صفر نسبي لهذه العلامات قد تكون يساوي أي رقم نقرره و هو اعتباري .

4) المقياس النسبي : و هذا المقياس يحوي جميع المقاييس السابقة إضافة إلى أنه يحتوي على الصفر المطلق و هكذا نستطيع أن نقول أن هذا المقدار ضعف ذلك أو نصفه مثال : درجة الحرارة

فأن درجة الحرارة 40 % هي ضعف كمية الحرارة في 20% لأن الصفر في مقياس درجة الحرارة مطلقا و ليس اعتباريا .

م	المقياس	الخصائص
1	الاسمي	يشير إلى الفروق أو الاختلافات
2	الرتبي	يشير إلى الفروق و بين اتجاه الفرق أكبر من أو اصغر من
2	الفئوي	يشير إلى الفروق بين اتجاه الفرق بعدد مقدار هذا الفرق بفترات متساوية يحتوي على الصفر الاعتباري
4	النسبي	يشير إلى الفروق بين اتجاه الفرق بعدد مقدار هذا الفرق يحتوي على الصفر المطلق

المحاضرة الثانية

التوزيعات التكرارية

عناصر المحاضرة

- مقدمة
- التوزيعات التكرارية.
- عمليات تحويل جداول التوزيعات التكرارية إلى فئات .
- عمليات تحويل الجداول إلى التكرار النسبي والمئوي .
- التوزيع التكراري المتجمع أ- الصاعد ب – النازل .

مقدمة:

في هذه المحاضرة سوف يتمكن الطالب تحويل الأرقام الخام (بيانات) لاختبار ما من توزيعات تكرارية يتم تحويلها إلى جداول تكرارية في فئات حيث تسهل على الطالب العملية الإحصائية مهما كان عدد المشاهدات أو البيانات ومداها .

التوزيعات التكراريةFrequency Distribution

إن الهدف من التوزيع التكراري هو ترتيب القيم أو البيانات أو الدرجات وتنظيمها بغرض إدراك ما بينها من علاقات , بحيث لا تخسر هذه البيانات من أهميتها شيئاً يذكر , مختصرة بذلك الوقت والجهد .

إن بناء التوزيع التكراري يعتمد على تقسيم مدى قيم هذه البيانات إلى فئات , ومن ثم حصر عدد البيانات التابعة لكل فئة من هذه الفئات , وعلى سبيل المثال فالجدول أدناه يبين درجات 50 طالباً في اختبار تحصيلي , وتدعى هذه الدرجات بـ ((الدرجات الخام)) أو ((البيانات الخام)) وهي بيانات لم توضع في جدول ولم تصنف . لاحظ مدى صعوبة معرفة مستويات الطلاب من هذه الدرجات وهي على صورتها الحالية

69	70	72	68	67
71	85	93	90	92
71	61	64	87	80
82	97	84	76	80
66	75	86	76	75
89	81	86	86	83
81	79	82	79	90
68	94	74	82	82
95	88	85	73	91
88	81	72	62	78

وأبسط توزيع تكراري يمكن عمله كما هو مبين في الجدول التالي :

الدرجة	التكرار	الدرجة	التكرار	الدرجة	التكرار
61	1	74	1	87	1
62	1	75	2	88	2
63	0	76	2	89	1
64	1	77	0	90	2
65	0	78	1	91	1
66	1	79	2	92	1
67	1	80	2	93	1
68	2	81	3	94	1
69	1	82	4	95	1
70	1	83	**1**	96	0
71	2	84	1	97	1
72	2	85	2		
73	1	86	3		

عمليات تحويل جداول التوزيعات التكرارية إلى جداول التوزيعات التكرارية لفئات .

اصغر درجة) 61= 9736 - (أ- المدى: إن مدى البيانات والمشاهدات هو عبارة الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة في البيانات أو المشاهدات (اكبر درجة)

ب- عدد الفئات المقترحة المناسبة :عدد الفئات يخضع لتقدير الباحث نفسه إذ لا ينبغي أن يزيد عدد الفئات لدرجة تفقد هدف اختصار الوقت والجهد عند النظر إلى البيانات لأخذ انطباع عنها من الجداول التكرارية كما يجب أن لا تقل لدرجة نفقد معها أهمية البيانات والمقترح المناسب لعدد الفئات هو مابين خمس فئات وعشرين فئة وذلك اجتهاداً وبالنسبة للبيانات الموجودة قد نقترح عدد الفئات 10 أو 8 فئات أو أي عدد يختاره الباحث يكون مناسباً لهذه البيانات .

في هذا المثال نأخذ عدد الفئات 8.

ج – طول الفئة : ونستطيع أن نستخرجه عن طريق المعادلة التالية

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات المقترح}} = \frac{36}{8} = 4,5$$

ويجب تقريب الكسر 4,5 إلى عدد صحيح وهو 5

ونرمز لطول الفئة (ل) :- ل = 5

د- نبدأ بكتابة الفئات مبتدئين بالحد الأدنى لأصغر فئة والذي يجب أن يكون مساوياً لأصغر قيمة في البيانات أو أقل وحسب المثال أقل قيمة هي 61 ونختار

60 وذلك لسهولة الحساب وهو الحد الأدنى الحقيقي للفئة الأولى مطروحاً منه نصف وحدة 60 – 0,5 = 59,5 الحد الأدنى الحقيقي للفئة الأولى ثم نعين الحد الأعلى الحقيقي للفئة وهو عبارة عن إضافة طول الفئة إلى الحد الأدنى الحقيقي 59.5 + 5 = 64,5 وبذلك يكون الحد الأعلى للفئة نفسها هو الحد الأعلى الحقيقي مطروحاً منه نصف وحدة أي 64,5 – 0,5 = 64 وبذلك نكون قد حصلنا على الفئة الأولى والتي حديها

هما 60 إلى 64 لاحظ أن طول الفئة نفسه 5 وهو عدد البيانات أو القيم التي تحتويها تلك الفئة أي 60 , 61 , 62 , 63 , 64

هـ - نعين الحدود الدنيا والحدود العليا للفئات اللاحقة وذلك بإضافة طول الفئة لكل حد حتى نصل إلى آخر فئة (أكبر فئة) والتي يساوي حدها الأعلى

(أكبر رقم في البيانات) أو يزيد أكبر قيمة في البيانات , مثال : الفئة الثانية تبدأ من 60 + 5 = 65 الحد الأعلى = 64 + 5 = 69 وهكذا .

و- نفرغ البيانات (الدرجات) على الفئات التي انشأناها وذلك بعمل ما يسمى بـ (الحساب أو العلامات التكرارية), ثم نجمع هذه العلامات التكرارية تحت عمود التكرار الذي نرمز له بالرمز (ك) ومجموع التكرارات (مج ك) نرمز له بالرمز (ن) .

ز- مركز الفئة : مركز الفئة عبارة عن متوسط حديها ويمكن حسابه بقسمة مجموع حدي الفئة على 2 وهو القيمة التي تمثل الفئة وليس القيمة السابقة الموجودة

في داخل الفئة فمركز الفئة الأولى هو :

$$\frac{60 + 64}{2} = \frac{124}{2} = 62$$

ومركز الفئة الثانية

هو : 62 + 5 = 67 ومركز الفئة الثالثة هو : 67 + 5 = 72 وهكذا

الجدول التكراري لدرجات 50 طالباً في اختبار تحصيلي

(جدول الفئات)

الفئة (ف)	الحساب العلامات التكرارية	التكرار (ك)
64 – 60	///	3
69 – 65	~~////~~	5
74 – 70	~~////~~ //	7
79 – 75	~~////~~ //	7
84 – 80	~~////~~ //// //	12
89 – 85	~~////~~ ///	8
94 – 90	~~////~~ /	6
99 – 95	//	2
	المجموع	50

التكرار النسبي والتكرار النسبي المئوي

ف ف	ك	التكرار النسبي	التكرار المئوي
64 – 60	3	0,06	%6
69 – 65	5	0,10	%10
74 – 70	7	0.14	% 14
79 – 75	7	0,14	% 14
84 – 80	12	0,24	% 24
89 – 85	8	0,16	%16
94 – 90	6	0,12	%12
99 – 95	2	0,04	% 4
	50	1,00	% 100

(أ) التكرار المتجمع الصاعد

ف	ك	التكرار المتجمع الصاعد
الفئة الأولى 5 – 9	2	2
14 – 10	4	6 =4 + 2
19 – 15	5	11 = 5 + 6
24 – 20	8	19 = 8 + 11
الفئة الأخيرة 25 – 29	3	22 = 3 + 19
	22	

وسوف نلاحظ هنا أن التكرار المتجمع الصاعد للفئة الأخيرة هو نفس مجموع التكرارات 22

ويعني التكرار المتجمع الصاعد أن هناك بعض البيانات لعدد من الأفراد لهم درجات تساوي أو تقل عن قيمة معينة ففي الجدول نلاحظ أن هناك 11 حالة

تساوي قيمتها أو تقل عن 19 وهناك 6 حالات تساوي قيمتها أو تقل عن 14..... وهكذا .

(ب) التكرار المتجمع النازل :

وهو مشابه تماماً لسابقه غير أننا نبدأ بآخر فئة في الجدول أي أكبر فئة وليس فئة الدرجات الأصغر ثم نضيف تكرارات

الفئات السابقة لها كما يبينه الجدول .

ف	ك	التكرار المتجمع النازل
الفئة الأولى 5- 9	2	22 = 2 + 20
14 – 10	4	20 = 4 + 16
19 – 15	5	16 = 5 + 11
24 – 20	8	11 = 8 + 3
الفئة الأخير 25 – 29	3	3
	22	

المحاضرة الثالثة

العرض البياني (التمثيلات البيانية)

عناصر المحاضرة

- مقدمة .

- تمرين عملي للمحاضرة السابقة.

- تعريفات ومصطلحات .

-تمثيل البيانات بالرسم . أ- المدرج التكراري ب- المضلع التكراري

جـ- المنحنى التكراري د- المنحنى التكراري المتجمع .

- أنواع المنحنيات .

مقدمة:

في هذه المحاضرة سوف نسترجع المعلومات الخاصة بالمحاضرة السابقة وتتمثل بتمرين عملي يستعرض المعلومات السابقة . وفي هذه المحاضرة سوف احاول تمثيل البيانات بالرسم إلى المدرج وكيفية رسمه من البيانات المتوفرة في جدول الفئات وكذلك المضلع التكراري والمنحنى التكراري والمنحنى التكراري المتجمع الصاعد والنازل وكذلك أنواع المنحنيات المختلفة .

تمثيل الرسم بالبيانات Graphic Presentations

بالرغم من أن التوزيع التكراري أساسي وفعال في إظهار طبيعة البيانات وعلاقاتها إلا أن الرسم البياني يبين طبيعة البيانات وأهميتها بصورة أسرع للقارئ , وسنعتبر في هذا الموضوع الأشكال التالية :

المدرج التكراري .

المضلع التكراري .

المنحنى التكراري .

المنحنى التكراري المتجمع :

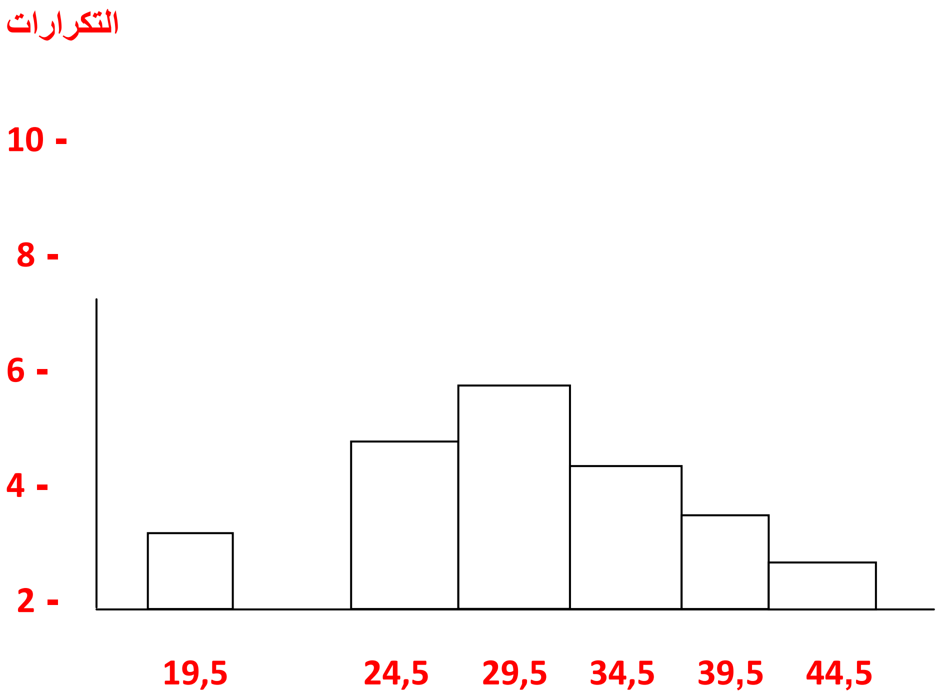
المدرج التكراري :Frequency Histogram.

لأجل تمثيل البيانات بالمدرج التكراري ينبغي أولاً رسم محورين متعامدين الأفقي منها يمثل الفئات والرأسي يمثل التكرارات , وعلينا أن نجزئ المحور الأفقي إلى وحدات متساوية ونعين عليه الحدود الحقيقية للفئات , ونجزئ المحور الرأسي بناء على عدد التكرارات الواردة في الجدول .

والمدرج التكراري عبارة عن تمثيل كل فئة من الفئات بمستطيل تمثل قاعدته الحدود الحقيقية لتلك الفئات وارتفاعه يساوي التكرار المقابل لها , ومن الملاحظ أن الحد الأعلى الحقيقي للفئة الأولى هو نفس الحد الأدنى الحقيقي للفئة الثانية , وبذا ترى جميع المستطيلات متلاصقة, ويبين الشكل المدرج التكراري .

ارسم المدرج التكراري للتوزيع التالي :

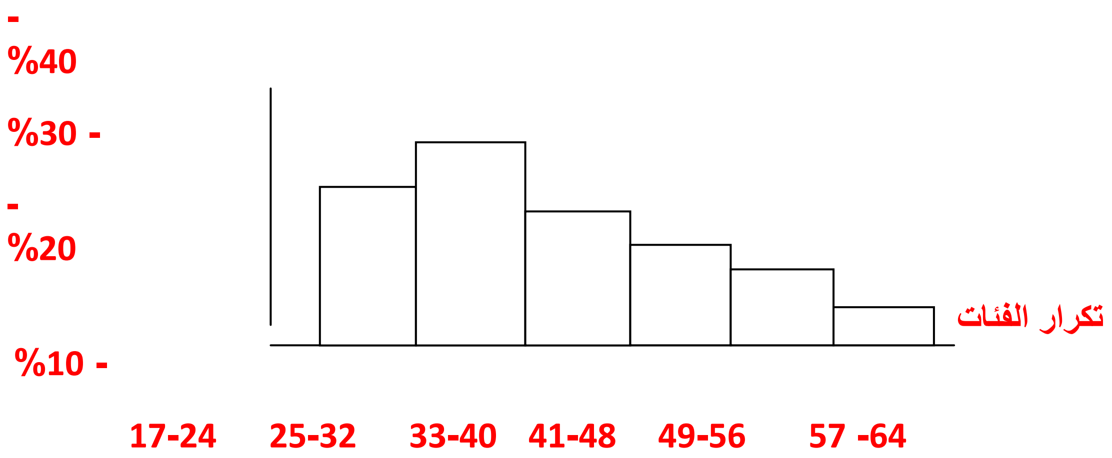
ف	ك	مركز الفئة	ك ص	ك ن
9 – 5	3	7	3	25
14 – 10	صفر	12	3	22
19 – 15	5	17	8	22
24 – 20	8	22	16	17
29 – 25	4	27	20	9
34 – 30	3	32	23	5
39 – 35	2	37	25	2
	25			



وإذا افترضنا الفئات التالية تمثل الأعمار وتكراراتها وذلك لعدد 125 موظف وأردنا أن نتوصل من خلال برنامج يستخدم على الحاسب الآلي أن نصل إلى المدرج التكراري فإن الخطوات التالية توصلنا للمطلوب :

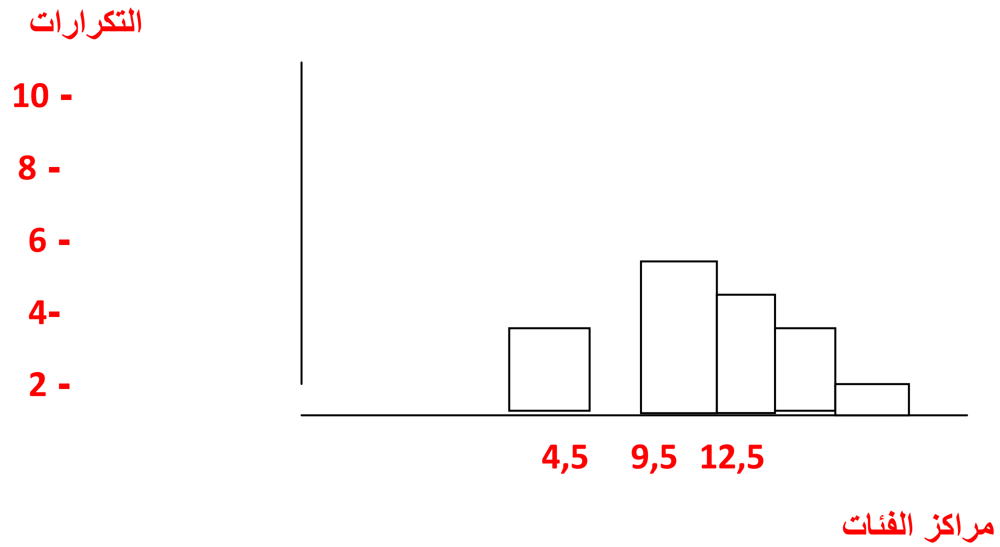
الفئات	التكرار	النسبة المئوية
24 – 17	32	% 25,60
32 – 25	38	% 30,40
40 – 33	25	% 20.00
48 – 41	18	% 14,40
56 – 49	10	% 08,00
64 – 57	2	% 1,60
المجموع	125	

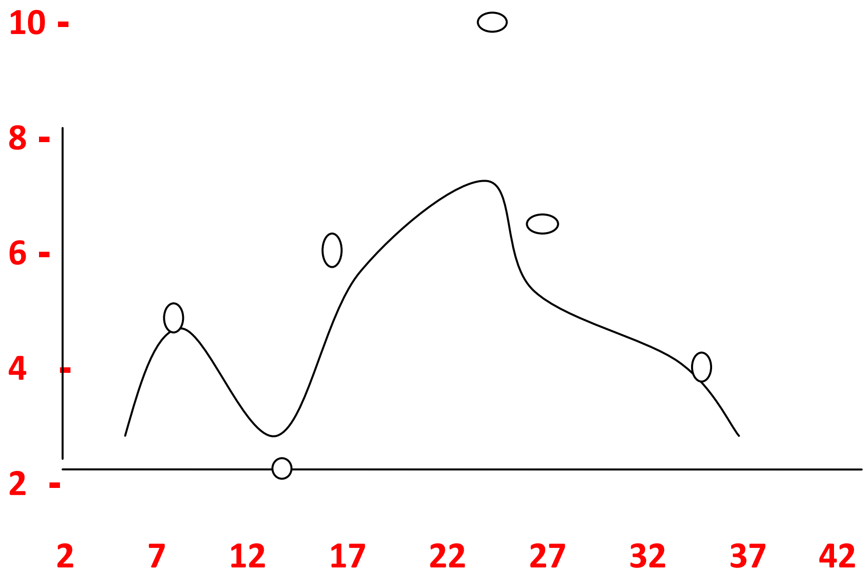
المدرج التكراري والنسبة المئوية



المضلع التكراري Frequency Polygon

عادة يلجأ إلى المضلع التكراري عند مقارنة توزيعين مختلفين لظاهرة معينة حيث إن استخدام المدرج قد يكون معقداً بعض الشيء بسبب كثرة المستطيلات وتدخلها مع بعضها البعض , مع ملاحظة أنه يفضل أن تكون الفئات متساوية لكلا التوزيعين ولهما نفس بدايات ونهايات الفئات , والمضلع التكراري يرسم بنفس الطريقة السابقة تقريباً غير أننا نعين مراكز الفئات على محور الفئات ونمثل كل فئة بنقطة هي مركزها وبارتفاع يساوي تكرار تلك الفئة , كما ينبغي أن نغلق المضلع وذلك بإضافة فئتين الأولى قبل أول فئة والثانية بعد آخر فئة في التوزيع وتكرار كل منهما صفراً , كما هو مبين في الشكل .

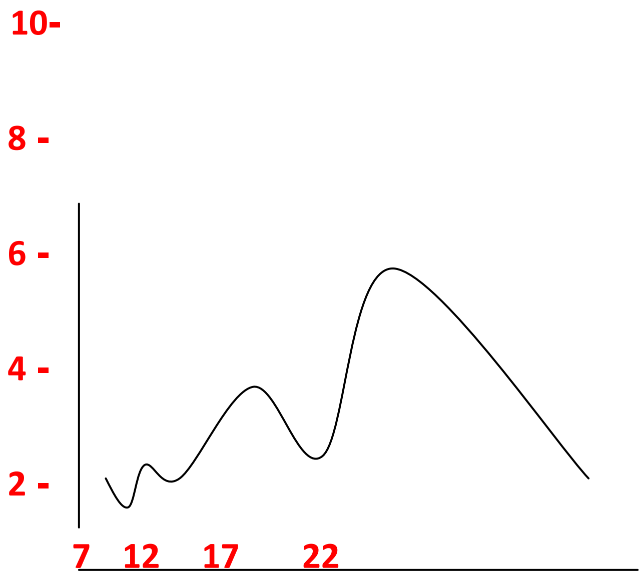




المنحنى التكراري Frequency Curve :

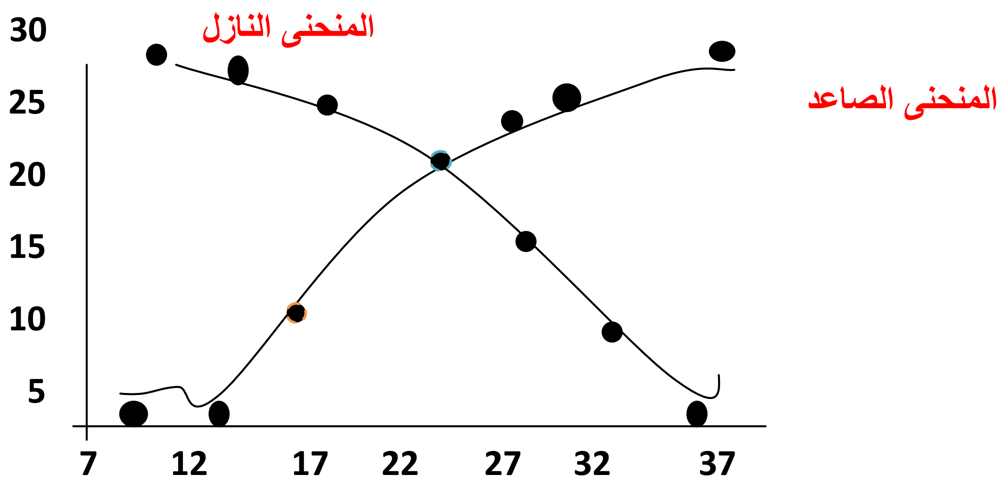
ولرسم المنحنى التكراري نتخذ نفس خطوات رسم المضلع التكراري باستثناء أننا نصل بين النقط بخط منحنى بدلاً من خطوط مستقيمة , أي لو أننا مهدنا (هذبنا) المضلع التكراري بخط منحنى لحصلنا على ما يسمى بالمنحنى التكراري . وللمنحنى التكراري أهمية كبيرة في علم الإحصاء لتمثيل التوزيعات التكرارية بيانياً خصوصاً عندما تكون البيانات كثيرة ومن النوع المتصل .

المنحنى لنفس البيانات في المثال السابق



المنحني التكراري المتجمع

وكما مر معنا في التوزيع التكراري المتجمع الصاعد والنازل فإن هناك رسما لكل منهما, الأول المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والثاني المنحى التكراري المتجمع النازل, ولرسم أي منهما نتخذ نفس الخطوات لرسم المضلع أو المنحنى التكراري غير أننا نستبدل التكرار العادي بالتكرار المتجمع إذ نقسم المحور الرأسي إلى أقسام تتناسب مع أكبر تكرار(مج ك) كما يبين ذلك الشكل



رسم كل من منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى المتجمع النازل

أنواع المنحنيات:

يكتسب نوع المنحنى أهميته لكونه أحد الأركان أو الخصائص الأساسية لمعرفة ووصف البيانات, (الشكل الذي تأخذه البيانات) أنواع عديدة من المنحنيات وتختلف طبيعتها باختلاف

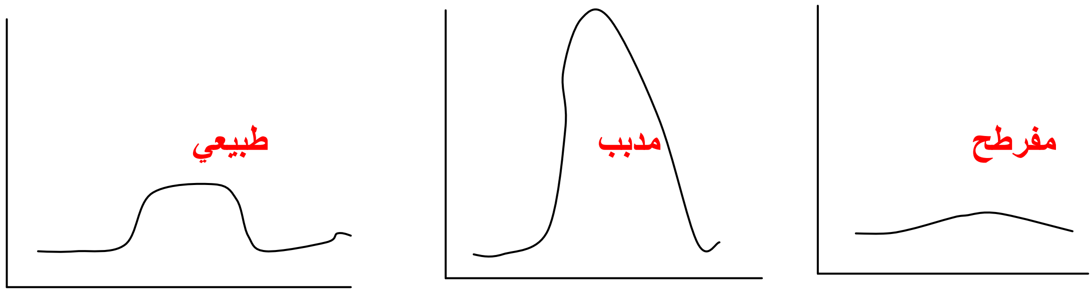
طبيعة البيانات التي تمثلها , فمنها ما هو متماثل أي له محور تناظر (شكل ينقسم إلى قسمين متماثلين بخط رأسي) ومنها ما هو متماثل

وقد تتخذ أشكالا مختلفة, وسنعرض هنا بعضا من هذه المنحنيات:

(أ) المنحنى الطبيعي

وهو منحنى متماثل يشبه في شكله الجرس ويعتبر أحد أهم المنحنيات في الحياة العملية لكونه يمثل كثيرا من الظواهر الطبيعية كالذكاء والطول والوزن....الخ.

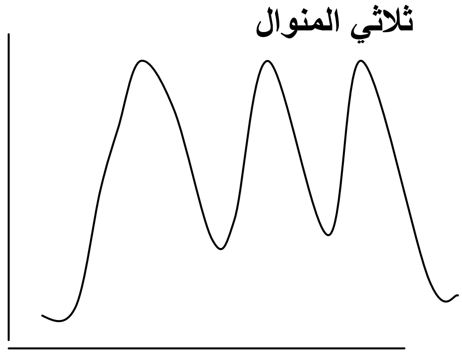
وهناك عدة أشكال مبينة في الشكل حيث يمثل هذا الشكل (أ) المنحنى الطبيعي الاعتيادي, يمثل الشكل (ب) المنحنى الطبيعي المدبب الذي يكون انتشار البيانات فيهما أقل تغايرا, أما الشكل (ج) فيمثل المنحنى الطبيعي المفرطح (مسطح) ويبدو فيه تغايرا أكبر.



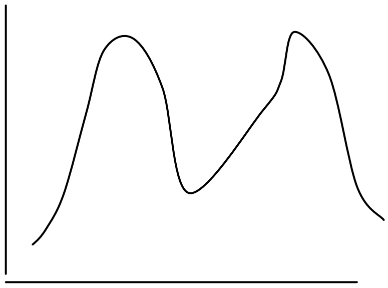
(ب) المنحنى الملتوي Skewed Curve :

وفيه يكون تجمع البيانات عند أحد طرفيه دون الآخر , وهناك ما يسمى المنحنى موجب الالتواء والمنحنى سالب الالتواء . وفي الملتوي الموجب تتجمع البيانات التي لها تكرار أكثر عند القيم الصغرى (الدرجات الصغيرة) للتوزيع وفي الملتوي السالب تتجمع البيانات التي لها تكرار أكثر عند القيم الكبرى (الدرجات الكبيرة)

ثلاثي المنوال



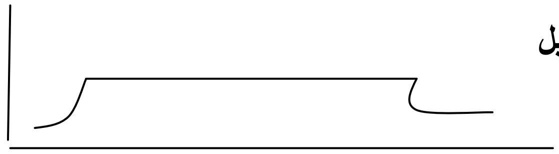
ثنائي المنوال



(د) المنحنى المستطيل Rectangular Curve :

وفي هذا المنحنى تتساوى التكرارات في التوزيع وهو توزيع متجانس كما يظهره الشكل .

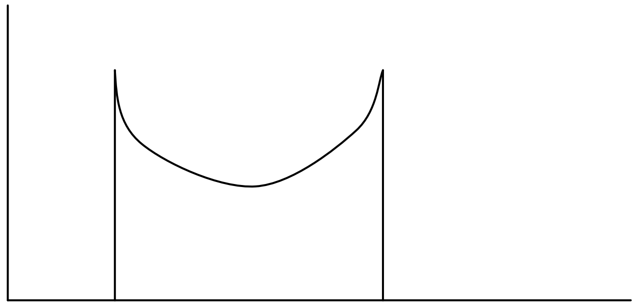
المنحنى المستطيل



منحنى على شكل U :

ويسمى أحياناً بالمنحنى النوني ويكون هذا المنحنى ثنائي المنوال باتجاه الطرفين أي أن معظم البيانات تتجمع عند أكبر القيم وأصغرها كما يظهر ذلك في الشكل :

المنحنى النوني



المحاضرة الرابعة

مقاييس النزعة المركزية

المتوسط الحسابي وطرق حسابه

حساب المتوسط من القيم الخام مباشرة

حساب المتوسط للقيم باستخدام وسط فرضي

حساب المتوسط للقيم من قيم متكررة

المقدمة:

في هذه المحاضرة سوف يكون التركيز على طرق حساب المتوسط وهو أهم مقاييس النزعة المركزية واختيار الطرق الأسهل لحسابه من القيم الخام أو المكررة وباستخدام الوسط الفرضي مع الإمثلة

إن تصنيف البيانات في جدول تكراري يفيد في تقليص الوقت والجهد للحكم على البيانات أما إذا كان لدينا ثلاث مجموعات من الطلاب في كل مجموعة 50 طالبا وقمنا بعمل الجدول التكراري للمجموعات الثلاث, وأردنا الآن مقارنة أداء المجموعة الأولى مع الثالثة والثانية مع الثالثة من حيث التحصيل بغية أن نرى أي المجموعات الثلاث أفضل, نرى أننا نحتاج أن ندرس كل مجموعة على حدة مما يستهلك وقتا وجهدا كبيرين, ولكن لو مثلت كل مجموعة من هذه المجموعات الثلاث برقم واحد وأردنا مقارنة الأرقام الثلاثة لاستطعنا أن نحكم على أداء أية مجموعة منها وان نفاضل بينها. وبما أننا سنصدر أحكاما على هذه المجموعات من خلال رقم واحد إذن يجب أن يمثل هذا الرقم المجموعة الخاصة به خير تمثيل وبكل دقة. وأول هذه الأرقام التي تمثل تلك المجموعات التي نحن بصددها هي ما تسمى بمقاييس النزعة المركزية ومقاييس النزعة المركزية والتي يطلق عليها البعض المتوسطات المركزية المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

ولكي يكون الوسيط المركزي نافعا وفعلا ويمثل البيانات خير تمثيل يجب ان تتوافر الشروط التالية:

1- يجب ان تحدد قيمته بالضبط.

2- يجب ان يأخذ في الاعتبار جميع البيانات (المشاهدات) في الظاهرة.

3- يجب أن يكون سهلا من الناحية الإجرائية الحسابية أي يمكن حسابه بيسر وسهولة.

4- يجب ان يكون سهلا في فهمه وتفسيره.

5- يجب أن لا يتأثر كثيرا عند اختلاف العينات من مجتمع واحد.

و لنتاول كلا من هذه المتوسطات على حدة:

المتوسط الحسابي وطرق حسابه:

ويعرف المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم بأنه عبارة عن مجموع جميع القيم مقسوما على عددها.

حيث إن:

م : ترمز الى المتوسط.

س: ترمز الى القيم.

ن : ترمز إلى عدد القيم.

ويمكن كتابة الوضع السابق بطرقة مختصرة وذلك باستخدام إشارة (المجموع) مج (أي تكون قيمة المتوسط إذا رمزنا للمجموع بالرمز مج) كما يلي:

$$\text{م} = \frac{\text{مج س}}{\text{ن}}$$

مثال:

احسب متوسط الأعمار التالية: 28, 25, 24, 13, 18 , 12.

الحل:

$$\text{م} = \frac{\text{مج س}}{\text{ن}}$$

$$\frac{12+18+13+24+25+28}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

طرق حساب المتوسط:

هناك طرق عديدة لحساب المتوسط تعتمد على طبيعة البيانات وعددها وسنعرض فيما يلي بعضا من هذه الطرق:

اولا:حساب المتوسط من القيم الخام مباشرة:

ويمكن حساب المتوسط من القيم الخام (البيانات التي لم تصنف في فئات) بإحدى الطرق الاتية:

(1)حساب المتوسط للقيم باستخدام وسط فرضي:

وتستخدم هذه الطريقة عندما تكون قيم البيانات كبيرة مما تسبب صعوبة في حسابها, بالطريقة السابقة كما ورد في المثال ولتسهيل عملية حسب المتوسط في هذه الحالة نلجأ إلى استخدام طريقة الوسط الفرضي

نرمز للوسط الفرضي (أ)

نرمز للانحراف (ح)

أي أن المتوسط = $\frac{\text{مجموع الانحرافات}}{\text{عدد البيانات}}$ +أ

إذن: م= $\frac{\text{مج ح}}{\text{ن}}$ + أ

احسب المتوسط للبيانات التالية:

2544, 2548, 2546, 2542،2545.

الحل بالطريقة العادية: مج س = 21725

عدد البيانات (ن) = 5

إذن م = 2545

أم بطريقة الوسط الفرضي فأننا نحتاج إلى وسطا فرضيا من هذه الأرقام وليكن 2540 فيكون:

ح1 = 2544 – 2540 = 4

ح2 = 2548 – 2540 = 8

ح3 = 2546 – 2540 = 6

ح4 = 2542 – 2540 = 2

ح5 = 2545 – 2540 = 5

مج ح = 25

وبتطبيق المعادلة م = أ + $\frac{\text{مج ح}}{\text{ن}}$ م= $\frac{25}{5}$ + 2540 =

2545 = 2540 +5

احسب المتوسط للقيم التالية الخاصة بمفهوم الذات لدى مجموعة من الأطفال:

78, 75, 79, 69, 74.

الحل:

نفرض الوسط الفرضي (أ=69) فيكون:

القيمة (س)	(س – أ) = ح
78	9
75	6
79	10
69	0
74	5
	30

م = 69 + $\frac{30}{5}$ = 75

يمكن حساب المتوسط للقيم المتكررة بنفس الطريقة السابقة , ولكن إذا كانت هذه القيم كثيرة فيفضل استخدام الطريقة التالية لتسهيل العمليات الحسابية وهي تتلخص بالخطوات التالية:

ا- نضرب كل قيمة من القيم في تكرارها.

ب- نجد حاصل جمع ضرب القيم في تكراراتها.

ج- نطبق المعادلة التالية:

$$\text{م} = \frac{\text{مج} \; (\text{س} \times \text{ك})}{\text{ن}}$$

حيث س : تمثل القيمة.

ك : التكرار المقابل لها

ن : عدد القيم.

كما يمكن ان نستخدم فكرة الوسط الفرضي في هذه الحالة أيضا وتتلخص فيما يلي:

(أ) نختار وسطا فرضيا معينا

(ب) نجد انحرافات القيم عن الوسط الفرضي.

(ج) نضرب انحراف كل قيمة في التكرار المقابل لها.

(د) نجد المجموع الجبري الحاصل ضرب التكرار × الانحراف

(هـ) نطبق العلاقة:

$$\text{م} = \text{ا} + \frac{\text{مج} \; (\text{س} \times \text{ك})}{\text{ن}}$$

حيث ح هي الانحراف عن الوسط الفرضي. والمثال التالي يوضح كلتا الحالتين.

مثال: احسب المتوسط الحسابي لدرجات سمة التسلط التي قيست لدى عينة مكونة من 20 طالبا جامعيا وكانت كما يلي:

الحل بتطبيق المعادلة: $\frac{\text{مج} \; (\text{س} \times \text{ك})}{\text{ن}}$

$$\text{م} = \frac{603}{20}$$

القيم (س)	التكرار (ك)	ك × س
25	3	75
27	4	108
30	7	210
33	4	132
39	2	78
	20	603

س	ك	الانحراف عن الوسط (ح)	ك×ح
25	3	25 – 30 = –5	–15
27	4	27 – 30 = –3	–12
30	7	30 – 30 = 0	0
33	4	33 – 30 = 3	+12
39	2	39 – 30 = 9	+18
المجموع	20		+3

وبتطبيق المعادلة:

$$م = \frac{مج\ (ح \times ك)}{ن}$$

$$= 30 + \frac{2}{20}$$

= 30 + 15ر0

= 15ر30 وهو نفس الجواب

مثال

احسب المتوسط لعلامات الطلاب التالية والتي قيست بأحد الاختبارات لدى مجموعة مكونة من 15 طالبا في الصف الثاني متوسط وذلك باستخدام وسط فرضي ومرة اخرى بدونه.

س	ك	ك×س
45	2	90
48	3	144
49	3	147
52	2	104
55	3	165
60	2	120
المجموع	15	770

م= مج (س x ك) / ن = 770 / 15 = 51ر32

بطريقة الوسط الفرضي

ليكن الوسط الفرضي = 50

س	ك	ح	ك×ح
45	2	– 5	– 10
48	3	– 2	– 6
49	3	– 1	– 3
52	2	+ 2	+ 4
55	3	+ 5	+ 15
60	2	+ 10	+ 20
المجموع	15		+ 20

وتطبيق المعادلة

م= ا + مج (ح x ك) / ن

م= 05 + 20 / 15 = 50 + 1ر33 = 51ر33

المحاضرة الخامسة

الموضوع : حساب المتوسط من قيم (مصنفة في جدول تكراري)

عناصر المحاضرة

- **مقدمة**
- **حساب المتوسط بطريقة مراكز الفئات (الطريقة المطولة).**
- **حساب المتوسط بالطريقة المختصرة .**
- **خصائص المتوسط .**
- **مميزات وعيوب المتوسط .**

اهداف المحاضرة :

الخاص : يتمكن الطالب في نهاية المحاضرة من حساب المتوسط الحسابي لبيانات جدول تكراري فئوي .

الاجرائية :

- في نهاية الدرس يكون الطالب قادرا على حساب المتوسط الحسابي لبيانات جدول تكراري اعتماد على مراكز الفئات من دون ارتكاب اخطاء .

- في نهاية الدرس يكون الطالب قادرا على حساب المتوسط الحسابي لبيانات مبوبة باستخدام الطريقة المختصرة من دون ارتكاب أخطاء .

- في نهاية الدرس يصبح الطالب قادرا على تحديد خصائص المتوسط بدقة بالتفريق بينه وبين بيانات السلسلة الإحصائية الخرى .

مقدمة:

في هذه المحاضرة سوف نستعرض إمكانية حساب المتوسط من الجداول التكرارية المبوبة إلى فئات وبطريقة الحساب العادية (المطولة) وأيضاً تعلم استخراج المتوسط بطريقة مختصرة والأمثلة على الطريقتين , ومعرفة خصائص المتوسط وكذلك مميزاته وعيوبه .

المقطع الأول : حساب المتوسط من قيم مبوبة (مصنفة في جدول تكراري) :

يمكن حساب المتوسط بإحدى الطريقتين التاليتين :

(1) طريقة مراكز الفئات (الطريقة المطولة) :

قبل أن نبدأ بشرح هذه الطريقة نذكر أننا عند جدولة البيانات ووضعها في فئات اعتبرنا مركز الفئة ممثلاً للفئة أي أن التكرارات المقابلة لفئة ما تعتبر جميعها لها نفس قيمة مركز الفئة . وبهذه الطريقة يجب حساب مراكز الفئات في أولى خطواتها , ومن ثم نعامل هذه المراكز كما كنا نحسب المتوسط من القيم المتكررة , وإليك خطوات هذه الطريقة :

أ- نحسب مراكز الفئات ويمكن أن نرمز لها بالرمز س .

ب- نضرب مركز كل فئة في التكرار المقابل له .

جـ- نجد مجموع حواصل الضرب التي تمت في الخطوة ب .

د- نقسم المجموع في الخطوة ج على مجموع التكرارات (ن) فنحصل على المتوسط المطلوب كما يبين المثال التالي :

مثال : احسب المتوسط في الجدول التكراري التالي :

ف	ك	س	ك×س
9 – 5	2	7	14
14 – 10	4	12	48
19 – 15	8	17	136
24 – 20	4	22	88
29 – 25	2	27	54
المجموع	20		340

$$م = \frac{مج (ك \times س)}{ن} = \frac{340}{20} = 17$$

احسب المتوسط من الجدول التكراري التالي الخاص بالفئات وتكراراتها لسمة الثقة بالنفس التي قيست على عينة من طالبات الجامعة :

$$م = \frac{2460}{40} = 61,5$$

ف	ك	س	ك×س
34 – 25	3	29,5	88,5
44 – 35	4	39,5	158
54 – 45	6	49,5	297
64 – 55	7	59,5	416,5
74 – 65	11	69,5	764,5
84 – 75	7	79,5	556,5
94 – 85	2	89,5	179
المجموع	40		2460

لاحظ فرق الحل بين المثالين السابقين نشاهد أن الحسابات في مثال (2) أكثر تعقيداً منها في مثال (1) وذلك لأن مراكز الفئات كسرية , وكذلك لزيادة عدد التكرار , لذا فالطريقة التالية , وتسمى بالطريقة المختصرة , هي الأفضل في مثل حالة المثال السابق .

(2) الطريقة المختصرة :

وبالطريقة المختصرة يمكن حساب المتوسط بإحدى حالتين :

الحالة الأولى هي استخدام الوسط الفرضي مع مراكز الفئات وتلخص بالخطوات التالية :

أ- نحسب مراكز الفئات .

ب- نختار أحد هذه المراكز ليكون وسطاً فرضياً ويفضل أن يكون في منتصف القيم مع ملاحظة أن ليس من الضروري أن يكون مطابقاً لمركز الفئة .

جـ- نحسب انحراف بقية المراكز عن الوسط الفرضي ح .

د- نحسب المجموع الجبري لانحرافات القيم ثم نطبق المعادلة التالية:

$$م = ا + \frac{مج\ ك\ \times\ ح}{ن}$$

كما يبين المثال التالي :

احسب المتوسط الحسابي بطريقة الانحراف الفرضي من المثال رقم (1) :

الحل : لنختار وسطاً فرضياً وليكن مركز الفئة الثالثة (17) :

ف	ك	س	حَ
9 – 5	2	7	10 -

14 – 10	4	12	5 -
19 – 15	8	17	صفر
24 – 20	4	22	5+
29 – 25	2	27	10+
المجموع	20		صفر

م= 17 + $\frac{\text{صفر}}{20}$ = 17 نفس الجواب السابق .

وهذه الطريقة لا تزال مطولة نوعاً ما خصوصاً في حالة وجود كسور في مراكز الفئات أو في حالة التكرارات الكبيرة .

أما الحالة الثانية في الطريقة المختصرة فتسمى بطريقة الانحراف الفرضي والتي تتلخص خطواتها فيما يلي :

أ- نختار فئة من الفئات ونعتبرها نقطة البداية ونعطيها قيمة صفر وتدعى بالفئة الصفرية , ويفضل أن تكون هذه الفئة وسط الجدول أو الفئة التي بها أكبر تكرار وذلك لتسهيل العمليات الحسابية مع ملاحظة أنه يمكن اختيار أي فئة من الفئات

ب- نعين أرقاماً تسلسلية فوق الصفر -1 , -2 , -3 , 00 أمام الفئات التي تصغر الفئة الصفرية , ونعين أرقاماً +1 , +2,+3 , 00 أسفل الصفر أمام الفئات التي تكبر الفئة الصفرية حتى آخر الجداول وتسمى هذه الأرقام بالانحراف الفرضي , والذي نرمز له بالرمز حَ .

جـ - نضرب كل انحراف فرضي في التكرار المقابل له لنحصل على ك × حَ .

د- نجد المجموع الجبري لحواصل الضرب في الخطوة ج لنحصل على مج ك حَ

هـ - نطبق المعادلة التالية للحصول على المتوسط :

م= س + $\frac{\text{مج ك x ح}}{\text{ن}}$ x ل

حيث س = مركز الفئة الصفرية .

ل = طول الفئة .

ن = عدد الحالات (مجموع التكرارات) .

احسب المتوسط بالطريقة المختصرة من الجدول التكراري التالي :

ف	ك	حَ	ك × حَ
9 – 5	2	2-	4-
14 – 10	4	1-	4-

19 – 15	8	صفر	صفر
24 – 20	4	1+	4+
29 – 25	2	2+	4+
المجموع	20		صفر

وبتطبيق المعادلة

الفئة الصفرية هي 15 – 19 ومركزها هو :

$$\text{س} = \frac{19 + 15}{2} = 17$$

وطول الفئة = 5

إذن

$$\text{م} = 17 + \frac{\text{صفر}}{20} \times 15 = 17 + \text{صفر} = 17$$

احسب المتوسط بالطريقة المختصرة من المثال السابق

ف	ك	حَ	ك × حَ
34 – 25	3	3-	9-
44 – 35	4	2-	8-
54 – 45	6	1-	6-
64 – 55	7	صفر	صفر
74 – 65	11	1+	11+
84 – 75	7	2+	14+
94 – 85	2	3+	6+
المجموع	40		8+

$$\text{م} = 59,5 + \frac{8}{40} \times 10 = 59,5 + 2 = 61,5$$

وهو نفس الجواب السابق

اختر فئة صفرية أخرى في المثال السابق ثم احسب المتوسط .

الحل :
لنختار الفئة الثانية :

ف	ك	ح َ	ك × ح َ
34 – 25	3	1-	3-
44 – 35	4	صفر	صفر
54 – 45	6	1+	6+
64 – 55	7	2+	14+
74 – 65	11	3+	33+
84 – 75	7	4+	28+
94 – 85	2	5+	10+
المجموع	40		88+

م = $39,5 + \frac{88}{40} \times 10 = 39,5 + \frac{88}{4\,0} = 39,5 + 22$

= 61,5 كسابقة .

المقطع الثاني : خصائص المتوسط

هناك بعض الخصائص التي يجدر بالطالب معرفتها حول الوسط الحسابي (المتوسط) ومنها:

1- إذا أضفنا أو طرحنا مقدارا ثابتا (ث) من البيانات الأصلية فإن المتوسط الجديد يساوي المتوسط الأصلي للبيانات مضافاً إليه أو مطروحاً منه المقدار الثابت .

مثال رقم (3)

احسب المتوسط للدرجات التالية :

254 , 258 , 251 , 257 , 255.

لاحظ بدلا من جمع الأرقام الفعلية مباشرة انك تستطيع أن تطرح مقداراً ثابتاً وليكن 250 من كل رقم من الأرقام ينتج 254 - 250 = 4

258 - 250 = 8

251 - 250 = 1

257 - 250 = 7

255 - 250 = 5

4+8+1+7+5 25

إذن القيم الجديدة = $\frac{\qquad}{5}$ = $\frac{\qquad}{5}$ = 5

أي أن المتوسط الأصلي للبيانات هو :

م = 250 + 5 = 255

احسب متوسط القيم الفعلية ؟ كم يساوي ؟

2- ضرب أو قسمة البيانات (الدرجات) الأصلية في أو على مقدارا ثابت , فإن متوسط القيم الفعلية يساوي متوسط القيم الجديدة مقسوماً على أو مضروباً في المقدار الثابت مع مراعاة أنه في حالة ضرب البيانات بمقدار ثابت نقسم المتوسط الجديد على نفس المقدار , أما في حالة القسمة على مقدار ثابت فنضرب المتوسط الجديد في المقدار نفسه لنحصل على المتوسط الفعلي للبيانات كما في المثالين التاليين :

مثال :

احسب متوسط البيانات التالية لأزمنة رد الفعل بالثواني في أحد الاختبارات : 0,2 ، 0,4 ، 0,6 ، 0,8، 0,1.

الحل :

نضرب كل قيمة في 10 فيكون لدينا : 10,8,6,4,2

ومتوسطها = $\frac{30}{5}$ = 6 وهو متوسط القيم الجديدة .

والمتوسط الفعلي للبيانات هو : $\frac{6}{10}$ = 0,6

مثال :

احسب المتوسط الحسابي للقيم التالية :

125 , 90 , 75 , 25 , 5 .

الحل :

لنقسم البيانات على 5 ينتج :

25 , 18 , 15 , 5 , 1 .

متوسط القيم الجديدة = $\frac{64}{5}$ = 12,8

إذن متوسط القيم الفعلية = 12,8 × 5 = 64 .

لاحظ أن فائدة كلا الخاصيتين الأولى والثانية هي لتسهيل العمليات الحسابية في حالة البيانات التي تعطى على هيئة كسور, وفي حالة الأرقام الكبيرة .

- أما الخاصية الثالثة فتدعى خاصية قاعدة الفروق , والمقصود بها أن حاصل جمع انحرافات القيم عن متوسطها يساوي صفراً .

عند مثال رقم (3) كانت القيم : 254 , 258 , 251, 257 , 255

وكان متوسطها = 255 .

س	س – م = ح
254	254 – 255 = -1
258	258 - 255 = +3

251	4- = 255 – 251
257	2+ = 255 - 257
255	صفر = 255 - 255
	صفر

فإذا رمزنا للانحراف عن المتوسط بالرمز ح فإن مج ح = صفر .

مميزات وعيوب المتوسط :

المميزات :

1- المتوسط هو أهم مقاييس النزعة المركزية إذ يأخذ بالاعتبار جميع القيم في البيانات . وبذا يكون ممثلاً جيداً للبيانات .

2- يمكن حسابه بعدة طرق .

3- سهولة حسابه إذ يمكن حسابه بيسر وسهولة .

4- لا يتأثر المتوسط كثيراً عند إعادة إجراء التوزيع للفئات أي إذا غيرنا أطوال الفئات لمجموعة البيانات ووضعناها في توزيع جديد .

عيوب المتوسط :

1- يتأثر المتوسط كثيراً بالقيم المتطرفة فإذا كان لدينا مجموعة من البيانات تحوي رقماً متطرفاً أكبر بكثير أو أقل بكثير عن القيم الأصلية فإن المتوسط لا يمثل هذه المجموعة تمثيلاً سليماً , مثلاً إذا كان لدينا الدرجات 20 , 25 , 15 , 95 فمتوسطها هو 34 وهو أكبر من أغلب درجات المجموعة , أو الأربعة الأولى منها هو 18,75 وهذا ما يجعل المتوسط هنا مقياساً مضللاً .

2- يصعب حساب المتوسط في حالة الجداول التي تحتوي على فئات مفتوحة لا تعرف بدايتها أو نهايتها لصعوبة تحديد مراكزها .

3- لا يصلح المتوسط لتمثيل البيانات التي تتمركز في أحد طرفي التوزيع .

المحاضرة السادسة

الوسيـــــــط

عناصر المحاضرة

- مقدمة
- الوسيط وطرق حسابه .
- طريقة إيجاد الوسيط بالرسم .
- مزايا وعيوب الوسيط .

مقدمة:

في هذه المحاضرة سوف يكون التركيز على ثاني مقاييس النزعة المركزية وهو الوسيط وهو أقل دقة من المتوسط ولكنه يعتبر جيد في تمثيل الفئات المفتوحة والتي لا يستطيع المتوسط أن يعبر عنها بدقة . وكذلك سوف نتناول مزايا وعيوب الوسيط .

الوسيط (و) Median:

لقد أشرنا في بداية هذا الفصل إلى أن الوسط المركزي الذي يمثل المجموعة يجب أن يكون دقيقاً وموثوقاً به , وعلمنا أيضاً أن من عيوب المتوسط عدم صلاحيته لتمثيل البيانات في حالة الجداول التكرارية المفتوحة أي الجداول التي لاتعرف بدايتها أو نهايتها مما يصعب معه تحديد مركز الفئة فنضطر إذا كان لنا خياراً أن نعتبر الجدول التكراري مقفلاً وأن فئته الأولى مساوية في الطول لبقية الفئات المفتوحة إن كانت تكراراتها قليلة لدرجة يمكن إهمالها إذ نحسب المتوسط في هذه الحالة على أساس الفئات المتبقية . ولكن في كلتا الحالتين يكون المتوسط المحسوب ذا قيمة تقريبية وليست دقيقة لذا نبحث عن مقياس آخر يعالج هذا العيب أو القصور في المتوسط , والمقياس البديل في هذه الحالة هو الوسيط .

والوسيط يعرف على أنه القيمة التي يصغرها 50% من البيانات ويكبرها 50% من البيانات . أي أنه القيمة التي تتوسط البيانات بعد ترتيبها . أو القيمة التي يسبقها عدد من الدرجات مساوياً لعدد الدرجات التي تليها بشرط أن ترتب هذه البيانات (الدرجات) ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً , فإذا عرفنا قيمة الوسيط لمجموعة من الدرجات مثلاً استطعنا أن نحكم بأن هناك 50% أفضل من درجة الوسيط و50% أقل مستوى من درجة الوسيط .

طرق حساب الوسيط :

يمكن أن نحسب الوسيط في الحالتين :

أولاً : من البيانات الخام (غير المبوبة) :

لحساب الوسيط من القيم غير المصنفة في جدول تكراري هناك حالتان :

إما أن يكون عد القيم فردياً أو زوجياً ولنأخذ كل حالة على حدة :

(أ) إذا كان عدد القيم فردياً :

تتلخص الخطوات فيما يلي :

1- ترتب القيم تصاعدياً أو تنازلياً أي من الصغير إلى الكبير أو بالعكس .

2- نجد رتبة الوسيط (و) من العلاقة .

رتبة و $= \frac{ن + 1}{2}$ حيث ن = عدد البيانات (عدد أفراد المجموعة) .

فيكون الرقم أو الدرجة المقابلة لهذه الرتبة هو الوسيط المطلوب .

مثال :

احسب الوسيط للبيانات التالية :

12, 17 , 8 , 29 , 25 , 15 , 19 .

الحل :

نرتب البيانات : 8 , 12 , 15 , 17 , 19 , 25 , 29 .

رتبة و =

$= \frac{7 + 1}{2} = 4$

إذن القيمة التي ترتيبها الرابعة هي الوسيط = 17

(ب) إذا كان عدد القيم زوجياً :

في هذه الحالة سيكون لدينا وسيطين (قيمتين وسطيتين) و1 , و2 , والوسيط المطلوب هو متوسط هذين الوسيطين وإليك خطوات حسابها :

1- ترتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً .

2- نجد رتبة الوسيط الأول و1 من العلاقة

رتبة و1 $= \frac{ن}{2}$ والرقم المقابل لهذه الرتبة هو الوسيط الأول و1

3- نجد رتبة الوسيط الثاني و2 من العلاقة

رتبة و2 $= \frac{ن}{2} + 1$ والرقم المقابل هذه الرتبة هو الوسيط الثاني و2

4- نجد الوسيط المطلوب من العلاقة :

$$و = \frac{و_1 + و_2}{2}$$

مثال :

احسب الوسيط للقيم التالية :

12 , 17 , 15 , 8 , 19, 25 , 29 , 22 .

الترتيب :

8 , 12 , 15 , 17 , 19 , 22 , 25 , 29 .

رتبة $و_1$ = $\frac{8}{2}$ = 4 قيمة $و_1$ = 17 .

إذن قيمة $و_1$ = 17

رتبة $و_2$ = $\frac{8}{2}$ +1 = 4+1 = 5

إذن قيمة $و_2$ = 19

إذن و = $\frac{17 + 19}{2}$ = 18

ثانياً : حساب الوسيط من البيانات المصنفة في جدول تكراري

ولحساب الوسيط من جدول تكراري نتبع الخطوات التالية :

1- نجد التكرار المتجمع الصاعد .

2- نجد ما يسمى برتبة الوسيط عموماً من العلاقة :

رتبة الوسيط = $\frac{\text{مج ك}}{2}$

لاحظ أنها منتصف التكرارات .

ومنها نحدد فئة الوسيط وهي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الذي يساوي أو يزيد عن رتبة الوسيط عموماً

3- نجد رتبة الوسيط من فئته من العلاقة .

رتبة الوسيط في فئته = رتبة الوسيط عموماً – التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط

4- نطبق القانون التالي لحساب الوسيط :

الحد الأدنى الحقيقي لفئة و + $\frac{\text{رتبة و في فئته}}{\text{تكرار فئة و}}$ ×

طول الفئة

والمثال التالي تطبيق على هذه الخطوات .

مثال رقم (21) :

ف	ك	ك ص
25 – 34	3	3
35 – 44	4	7
45 – 54	6	13
55 – 64	7	20
65 – 74	11	31
75 – 84	7	38
85 – 94	2	40
المجموع	40	

التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة و

1- وجدنا ك ص (التكرار المتجمع الصاعد)

2- رتبة و عموماً $\frac{\text{مج ك}}{2}$ أو $\frac{\text{ن}}{2}$ = $\frac{40}{2}$ = 20

إذن نجد أن فئة الوسيط هي 55 - 64

3- رتبة و في فئة الوسيط = 20 - 3 = 17

بما أن الوسيط = الحد الأدنى الحقيقي لفئة و + $\frac{\text{رتبة و في فئته}}{\text{تكرار فئة و}}$ × طول الفئة

4- و = 54و5 + $\frac{7}{7}$ × 10 = 64,5

كما يمكن كتابة العلاقة بالصورة التالية :

و = أ + $\frac{\text{ك و السابق و}}{\text{ك و}}$ × ل

حيث أ = الحد الأدنى الحقيقي لفئة الوسيط .

وبتطبيقها نرى :

$$\text{و} = 54,5 + \frac{\qquad}{\qquad} \times 10$$

$$= 54,5 + \frac{7}{7} \times 10 = 64,5$$

كما يمكن إيجاد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع النازل بنفس الخطوات تقريباً مع تعديل صيغة العلاقة

إلى :

$$\text{و} = \text{الحد الأعلى الحقيقي لفئة و} - \frac{\text{رتبة و في فئته}}{\text{تكرار فئة و}} \times \text{ل}$$

أي نجد رتبة الوسيط عموماً $= \frac{\text{ن}}{2}$

ومنها نحدد فئة الوسيط وهي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الذي يساوي أو يقل عن رتبة الوسيط عموماً .

ثم نجد رتبة الوسيط في فئته وهي : رتبة الوسيط عموماً – التكرار المتجمع اللاحق لفئة الوسيط .

ثم تطبيق العلاقة أعلاه كما في المثال التالي :

مثال :

احسب الوسيط بطريقة التكرار المتجمع النازل لنفس المثال السابق :

ف	ك	ك ن	
34 – 25	3	40	
44 – 35	4	37	
54 – 45	6	33	التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة و
64 – 55	7	27	
74 – 65	11	20	
84 – 75	7	9	

94 – 85	2	2
المجموع	40	

رتبة و عموماً = $\frac{40}{2}$ = 20

ومنها فئة و = 65-74

رتبة و عموماً = 20 - 9 = 11

إذن و = 74,5 - $\frac{11}{11}$ × 10

= 74,5 - 10

= 64,5 وهو نفس الجواب السابق .

رتبة و = $\frac{45}{2}$ = 22,5

لاحظ الرقم المقال لرتبة و هو 70

إذن رتبة و في فئته = 22,5 -21 =1,5

و = 69,5 + $\frac{1,5}{13}$ ×1

= 69,5+0,12

= 69,62 تقريبا

لاحظ طول الفئة هنا = 1 كيف تجده ؟

ثالثاً : طريقة إيجاد الوسيط بالرسم :

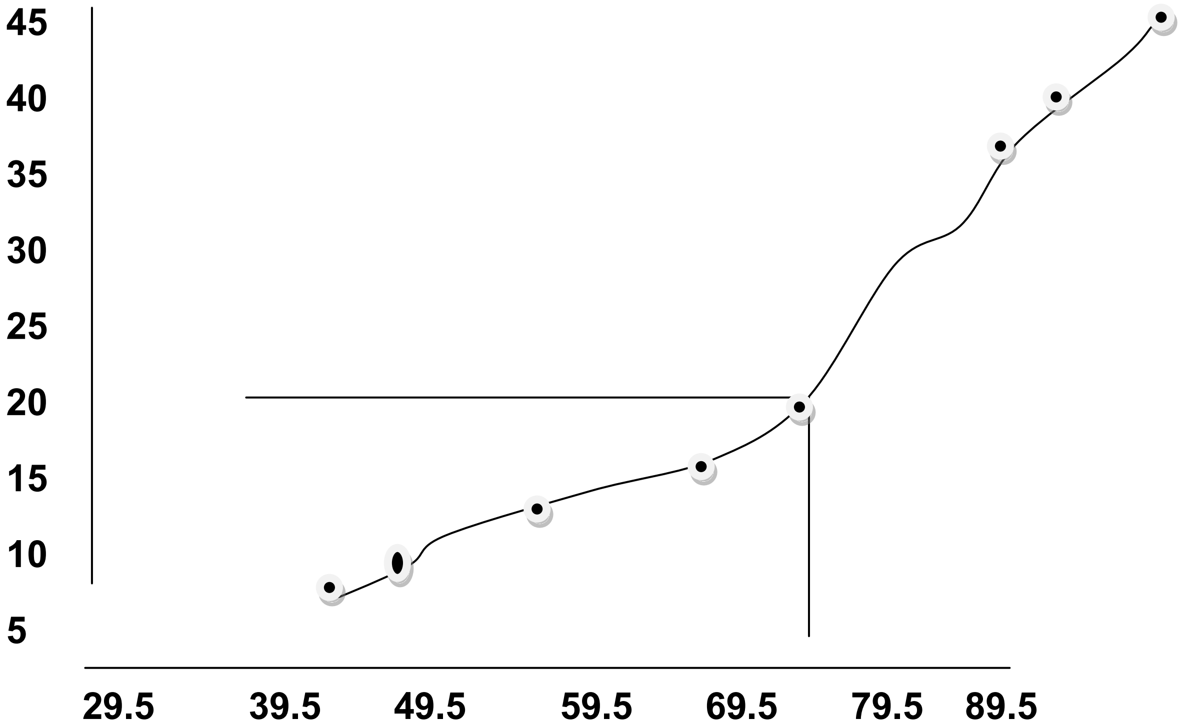
يمكن إيجاد الوسيط عن طريق رسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو التكرار المتجمع النازل أو من كليهما . فإذا اعتمدنا على التكرار المتجمع الصاعد لتعيين الوسيط فإن علينا أن نرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد كما مر معنا في رسم المنحنى , ثم نعين منتصف البيانات وذلك بقسمة مجموع التكرارات (ن) على 2 , ثم نحدد هذه القيمة على المحور العمودي (محور التكرارات) ونرسم منها مستقيماً موازياً لمحور الفئات وعند تلاقي هذا المستقيم مع المنحنى نسقط من نقطة التلاقي عموداً على محور الفئات فتكون نقطة التقائه هي الوسيط . كما في الشكل التالي :

مثال :

عين المتوسط للبيانات الواردة في المثال التالي

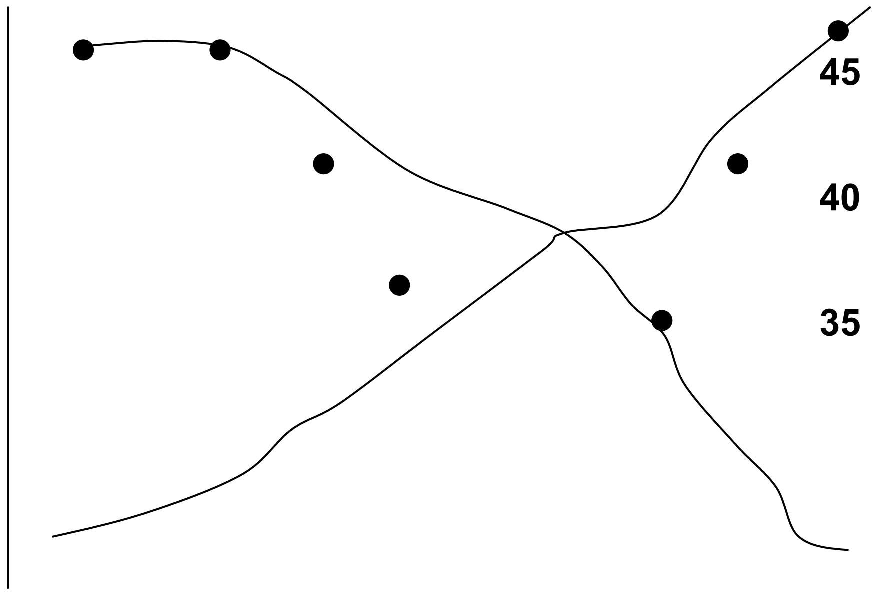
الحل :

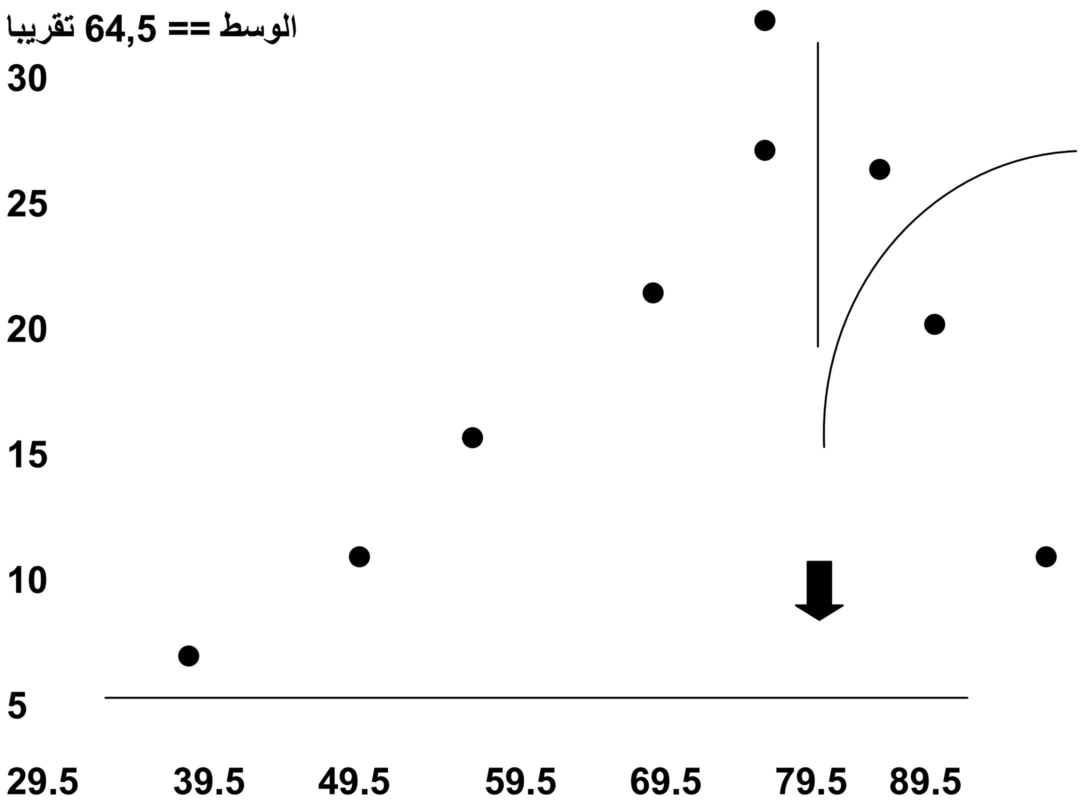
نرسم المنحنى للتكرار المتجمع الصاعد ..



أما تعيين الوسيط عن طريق كلا المنحنين الصاعد والنازل فيتم برسم كلا المنحنيين ومن نقطة تقاطعهما ننزل عمودا على محور الفئات فتكون نقطة التلاقي هي الوسيط المطلوب كما هو مبين في المثال التالي .

منحنى التكرار المتجمع الصاعد **منحنى التكرار المتجمع النازل**





مزايا وعيوب الوسيط :

مزايا الوسيط :

1- لا يتأثر الوسيط بالقيم المتطرفة من البيانات لذا يستخدم بدل المتوسط في مثل هذه الحالات .

2- لا تتأثر قيمة الوسيط كثيراً عند إعادة التوزيع التكراري .

3- يمكن استخدامه في حالة الجداول ذات الفئات المفتوحة لأنه لا يعتمد على مراكز الفئات .

عيوب الوسيط :

1- لا يأخذ في الاعتبار جميع البيانات بل يعتمد على جزء منها كما رأينا في طريقة حسابه .

2- تختلف قيم الوسيط من عينة إلى أخرى لنفس المجتمع بعكس المتوسط .

المحاضرة السابعه

المنــوال

عناصر المحاضرة

- مقدمة
- الطريقة الحسابية لاستخراج المنوال .
- طريقة إيجاد المنوال بالرسم .
- مزايا وعيوب المنوال .
- العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية .

مقدمة:

في هذه المحاضرة سوف نركز على معرفة استخراج قيمة المنوال حسابياً وبالرسم مع معرفة مزايا المنوال وعيوبه وكذلك المقارنة بين مقاييس النزعة المركزية وهم المتوسط والوسيط والمنوال .

المنوال (مل) Mode :

هو أقل مقاييس النزعة المركزية دقة لذا يستعمل هذا المقياس في حالة المقارنات السريعة التي لا تتطلب دقة , بل أن بعض الحالات لا يوجد لها منوال .

ويعرف المنوال لمجموعة من البيانات بأنه القيمة التي لها أكبر تكرار أو الخاصية الأكثر انتشاراً أو شيوعاً . فلو كان لدينا القيم التالية :

7 , 9 , 8 , 4 , 8 , 5 , 7 , 8

نجد أن المنوال هو 8 لأن القيمة 8 تكررت أكثر من أية قيمة أخرى . كما يمكن أن يكون لمجموعة من القيم أكثر من منوال واحد , فلو افترضنا أن لدينا مجموعة القيم التالية :

. 12 , 7 , 12 , 9 , 5 , 9 , 12 , 8 , 9

نرى أن كل من الرقم 9 والرقم 12 تكرر ثلاث مرات إذن في هذه الحالة لدينا منوالين هما 12,9 .. وهكذا ..

طرق حسابه :

يحسب من الدرجات الخام (غير المبوبة) كما مر معنا ويعبر عنه بأنه القيمة التي لها أكبر تكرار أو الأكثر شيوعاً , أما في حالة البيانات المصنفة في جدول تكرار فيمكن حسابه كما يلي :

1- الطريقة الحسابية :

وبها يمكن اعتبار مركز الفئة المقابلة لأكبر تكرار في التوزيع هو المنوال كما في المثال التالي :

مثال : احسب المنوال من الجدول التكراري التالي :

ف	ك	مركز الفئة (س)
9-5	2	7
14-10	5	12
19-15	8	17
24—20	12	22
29-25	9	27
34-30	7	32
39-35	2	37

نرى أن الفئة 20 – 24 مقابلة للتكرار 12 وهو أكبر تكرار ومركزها هو 22 .

إذن المنوال = 22

ويمكن إيجاد المنوال حسابياً وفقاً للخطوات التالية :

أ- نعين الفئة لأكبر تكرار (الفئة المنوالية) وليكن تكرارها (ك)

ب- نحدد التكرار السابق لهذه الفئة وليكن ك1 .

ج – نحدد التكرار اللاحق لهذه الفئة وليكن ك2.

د- نعين الحد الأدنى الحقيقي للفئة المنوالية وليكن أ .

ثم نطبق القانون التالي :

$$\text{مل} = \text{أ} + \frac{\text{د}_1}{\text{د}_1 + \text{د}_2} \times \text{ل}$$

حيث د1 = ك – ك 1

د2 = ك – ك2

ل = طول الفئة .

مثال :

أوجد المنوال حسابياً للجدول في المثال السابق

الحل :

الفئة المنوالية هي 20 – 24

الحد الأدنى الحقيقي لها = 19,5   وتكرارها (ك) = 12

التكرار السابق لها (ك 1) = 8

التكرار اللاحق لها (ك 2) = 9

طول الفئة (ل) = 5

إذن مل = 19,5 $\frac{4}{3+4}$ **×5**

= 19,5 + $\frac{20}{7}$

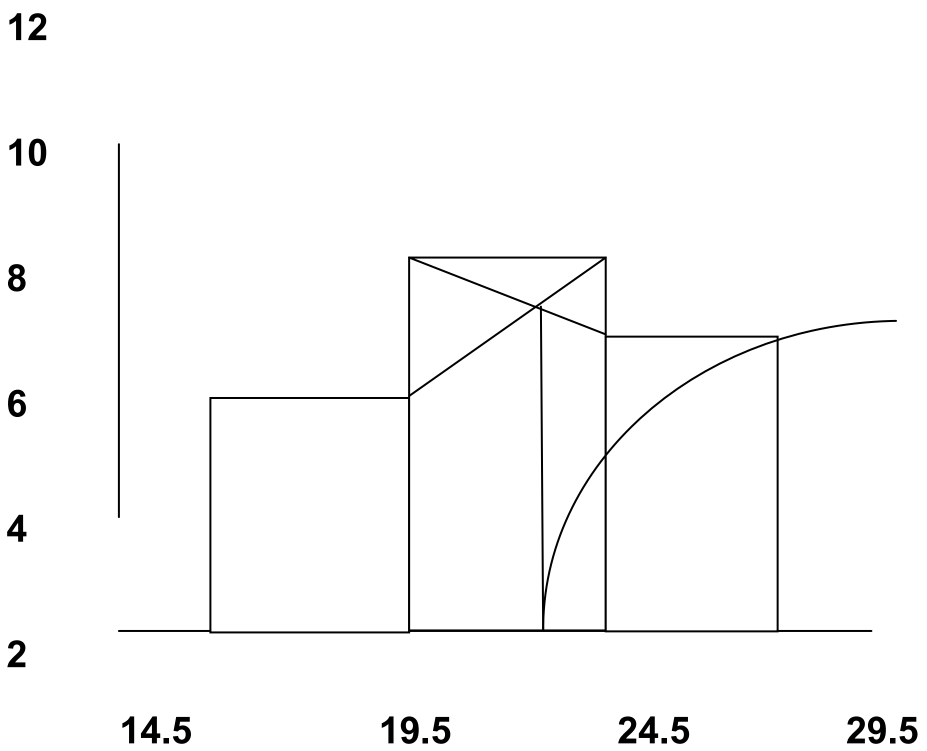
= 19,5 + 2,86 = 22,36

وهذه الطريقة أفضل من سابقتها , كما توجد طرق أخرى لإيجاد المنوال حسابياً ولكن سنكتفي بهذه لأنها تعتبر الأدق , وأن كان حسابها تقريبياً .

طريقة إيجاد المنوال بالرسم :

يمكن إيجاد المنوال بطريقة الرسم المدرج التكراري للفئات المنوالية , والسابقة لها واللاحقة لها , ثم نصل رؤوس المستطيلات كما في الشكل ومن نقطة التقاطع ننزل عمودا فيلاقي محور الفئات عند نقطة قيمتها هي المنوال .

المنوال = 22,6 تقريبا



مزايا وعيوب المنوال :

مزايا المنوال :

1- يتميز المنوال بسهولة حسابه .

2- لا يتأثر بالقيم المتطرفة في البيانات .

عيوب المنوال :

1- لا يأخذ في الإعتبار جميع البيانات .

2- تتأثر قيمته عند إعادة التوزيع واستخدام فئات جديدة .

3- أقل مقاييس النزعة المركزية دقة .

4- قد لا نجد منوالاً لبعض التوزيعات .

العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية :

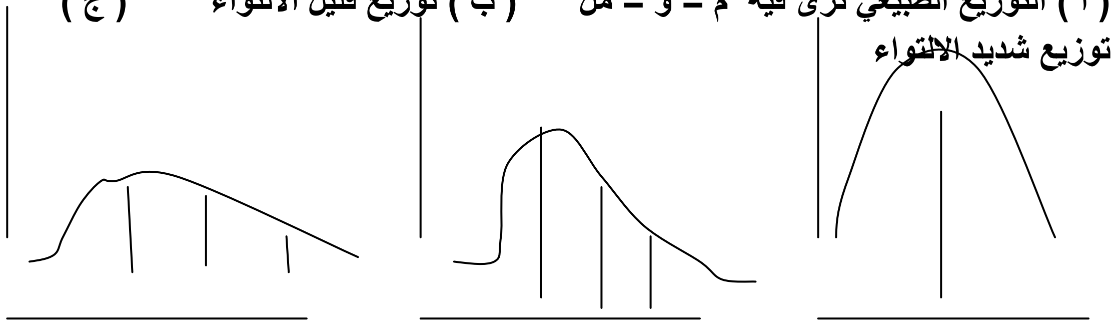
هناك علاقة تجريبية تربط مقاييس النزعة المركزية في حالة التوزيعات التكرارية أحادية المنوال والبسيطة الالتواء والتوزيعات القريبة من التوزيع الطبيعي وهذه العلاقة هي :

المتوسط – المنوال = 3× (المتوسط – الوسيط) .

أي م – مل = 3 × (م – و)

وهذه العلاقة تعتبر تقريبية , ولا يعتد بها في حالة التوزيعات التكرارية شديدة الالتواء , أما في التوزيع الطبيعي فنرى أن جميع هذه المقاييس تأخذ قيمة واحد كما يظهرها الشكل التالي :

(أ) التوزيع الطبيعي نرى فيه م = و = مل (ب) توزيع قليل الالتواء (ج) توزيع شديد الالتواء



مثال :

إذا علمت أن قيمة وسيط اختبار ما 75 منواله 70 فيما متوسطه ؟

الحل :

م – مل = 3 (م – و)

م – 70 = 3م – 3 × 75

225 – 70 = 3م – م

155 = 2م .

م = $\frac{185}{2}$ = 77,5

مثال :

فيما يلي جدولاً تكرارياً يمثل توزيع درجات 100 طالب في مادة الرياضيات . احسب المتوسط والوسيط والمنوال

ف	ك	ك ص	س	كxس	ح	ك ح
63-61	1	1	62	62	6-	6-
66-64	2	3	65	130	5-	10-
69-67	3	6	68	204	4-	12-
72-70	5	11	71	355	3-	15-
75-73	8	19	74	592	2-	16-
78-76	12	31	77	924	1-	12-
81-79	18	49	80	1440	صفر	صفر
84-82	25	74	83	2075	1	25
87-85	19	93	86	1634	2	38
90-88	7	100	89	623	3	21
المجموع	100			8039		13

الحل :

(1) م بطريقة مراكز الفئات :

$$م = \frac{مج\ ك \times س}{ن} = \frac{8039}{100} = 80,39$$

(2) بطريقة الانحراف الفرضي :

$$م = 80 + \frac{13}{100} \times 3$$

$$= 80 + \frac{39}{100}$$

$$= 80 + 0,39 = 80,39$$

الوسيط :

رتبة و عموماً $= \frac{مج\ ك}{2} = \frac{100}{2} = 50$

إن فئة و هي = (82 – 84)

رتبة و في فئته = 50 – 49 = 1

و = 81,5 + $\frac{1}{25}$ × 3

= 81,5 + 0,12

= 81,62 .

المنوال :

(1) يمكن اعتباره 83 لأنه مركز الفئة القابلة لأكبر تكرار .

إذن مل = 83

أو إذا أردنا حسابه من القانون .

(2) د1 = 25 – 18 = 7 د2 = 25 – 19 = 6

مل = 81,5 + $\frac{7}{6+7}$ × 3

= 81,5 + $\frac{21}{13}$

= 81,5 + 1,6

= 83,1

الوسط الحسابي المرجح Weighted Mean:

ويسمى متوسط المتوسطات ونحتاج لحسابه في حالات معينة مثلاً إذا كان لدينا ثلاثة شعب من الفصل الأول الثانوي وعرفنا متوسط أداء كل شعبة في مادة معينة , وأردنا معرفة المتوسط العام لهذه الشعب فإن :

$$\text{م} = \frac{\text{م}1 \times \text{ن}1 + \text{م}2 \times \text{ن}2 + \text{م}3 \times \text{ن}3}{\text{ن}1 + \text{ن}2 + \text{ن}3}$$

حيث م = المتوسط العام (المتوسط المرجح)

ن1 , ن2 , ن3 عدد الأفراد في كل شعبة .

م1 , م2 , م3 .. متوسطات الشعب (المجموعات) .

مثال :

أعطي اختبار لثلاثة شعب في مادة التقويم التربوي وكانت نتائجه في الجدول أدناه , احسب المتوسط المرجح لهذه الشعب.

المجموعة	متوسط المجموعة	عدد أفراد المجموعة
1	25	30
2	20	35
3	28	25

$$م = \frac{25 \times 28 + 35 \times 20 + 30 \times 25}{25 + 35 + 30}$$

$$= \frac{2150}{90} = 23,89$$