المحاضرة السادسة: الرياضيات المعاصرة وأزمة الأسس

تمهيد:

لقد عكس تعدد الأنساق في الرياضيات تلك الخصوبة التي يتميز بها هذا الفكر، وجعلت الرياضيات تنتقل من الوحدة إلى التعدد، وكلها صادقة وكلها مشروعة، رغم تناقضها في الكثير من المبادئ التي تنطلق منها، مما جعل هذه المبادئ تخلع طابع اليقين المطلق وتوصف بالنسبية، ومن الاعتماد على الواقع إلى التحليق في الصورية، ومن هنا نتساءل عن كيف استطاعت الرياضيات المعاصرة تحقيق هذه الأشياء؟ وما طبيعة الأزمة التي وقعت فيها؟

1- منطلق أزمة الأسس:

مع التقدم الكبير الذي شهدته الرِّياضيات في القرن 18م، أدى إلى وقوع أزمة في مبادئها، وهذا بفضل "لعبة جدلية"jeu dialectique كما يدعوها فرانسوا غيري أو نوع من البرهان بالخلف، الذي لم يستطع التوصل إلى اكتشاف التناقض المنطقي المرتقب منه[1]، والمصادرة التي أثارت هذه اللعبة الجدلية- التي طالما افتقدتها الرياضيات- هي تلك المتعلقة بالمتوازيات، فقد كانت هذه المصادرة أقل وضوحًا من مثيلاتها، ومؤداها و بأسلوب بسيط، أنه لو أخذنا نقطة خارج مستقيم ما، فإنه لا يمكن رسم إلاَّ موازٍ واحد لذلك المستقيم، وهي مصادرة يمكن التأكد من صدقها نظريًا، أمَّا أن يتلاقى الخطّان، فهذا أمر مستحيل، على الأقل في مستواها التطبيقي.

ولهذا جهد علماء الرِّياضيات أنفسهم، للبرهنة عليها، إلى غاية 1820م حين حاول عالمان اللّجوء إلى طريقة البرهان غير المباشر، وهي حيلة بارعة يمكن الإفادة منها في مختلف ضروب التفكير، بأن نفترض عكس ما نحاول البرهان على صحته، ثم نبين أن ذلك يؤدي إلى التناقض، فنكون بذلك قد دلَّلنا على صحة ما نحاول البرهان على صحته[2].

لكن هذه الطريقة كانت لتبقى ما يزيد عن ألفي سنة، لتعرف طريقها إلى التجسيد، على يد رجلين فذَّين، طالما انتظرتهما الهندسة، وهما العالم المجري جون بولياي J.Bolyai[3] ، والعالم الروسي ن.أ. لوباتشفكي N.L.Lobatchevski[4] ، اللَّذان سلخا أعوامًا عديدة في محاولةٍ للعثور على برهان لتلك المصادرة، والتي وصفت بالغموض، رغم المحاولات الفاشلة التي سبقتهم " والتي أرادت أن تكشف موقع الاضطراب في النسق الإقليدي، ولكن الفكر الرئيسي بقي هو هو"(A partir d’Euclide et

pendant deux mille ans , la géométrie reçoit sans doute des adjonctions nombreuses mais la pensée fondamentale reste la même)[5] ، فلجآ كما قلنا إلى طريقة البرهان بالخلف، بانطلاقهما من مصادرة مفادها أنه من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم عدد غير منتهي من المستقيمات الموازية، وإذْ هُما يُخفقان في البرهنة عليها، لأنهما توصلا إلى نتائج صحيحة أذهلت الرّياضيين، فقد توصلا إلى اكتشافٍ مدهش، أبدعا من خلاله نوع جديد من الهندسة، لا يقل أصالة عن هندسة إقليدس.

وبذلك استطاع لوباتشفسكي أن يغير جميع البديهيات الإقليدية، مستنبطًا من تلك الفرضيات أو المصادرات الجديدة سلسلة من المبرهنات، يستحيل العثور على أي تناقض بينها، ليبني هندسة لا يقل منطقها المثالي في شيء عن منطق هندسة إقليدس.

من الطبيعي أن تكون تلك المبرهنات مختلفة اختلافًا كبيرًا عن تلك التي ألفناها، وهي -إجمالاً- تحمل الحيرة في أول الأمر، ولكن سرعان ما نألفها عندما نجردها من حمولتها الحسية.

وهكذا أصبحت لدينا مصادرات جديدة، تقدّم لنا بناءات جديدة، ومن بين هذه المصادرات التي وضعها لوباتشفسكي: أن مجموع زوايا المثلث أصغر دائمًا من زاويتين قائمتين، ويتناسب الفرق بين ذلك المجموع، وزاويتين قائمتين مع مساحة المثلث، وإذا قسَّمنا محيط دائرة إلى أجزاء متساوية عددها n ورسمنا مماسات من نقاط التقسيم، شكلت تلك المماسات وعددها n مضلعًا، إذا كان شعاع الدائرة على درجةٍ كافية من الصغر، أمَّا إذا كان ذلك الشعاع كبيرًا نوعًا ما، فإن المماسات لا تلتقي...[6] وبذلك أضيفت حلقة جديدة في الفكر الرِّياضي، والذي يرجع الفضل في إيجادها إلى الجدل.

وتلك أمثلة غيرتها هندسة لوباتشفسكي، حيث أصبحت لا قرابة لها البتة مع الواقع الذي استند إليه إقليدس في وضع هندسته، غير أن هذه الهندسة الجديدة لا تقل عنها تماسكًا.

وقد وجدت أفكار لوباتشفسكي، امتدادًا بعد عشرين سنة لدى عالمين ألمانيين، وهما ك.ف. جاوس G.F.Gauss[7] ، و ج.ف.ب.ريمان G.F.B.Reiman[8] ،اللَّذان برهنا وبالطريقة نفسها- أي بطريقة البرهان بالخلف أو غير المباشر- على وجود نوعٍ ثالث من الهندسات، بانطلاقهما من مصادرة أخرى وملخصها، أنه من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم أي موازٍ لهذا المستقيم، ليصلا بدورهما إلى نتائج

صحيحة، خالفت توقعهما، وذلك بإبداعهما لنوعٍ ثالث من الهندسات، أثبتت حضورها المنطقي أمام الهندسات السابقة.

وقد كانت لهذه الهندسة مصادراتها الخاصة، أهمها أن المكان كروي الشكل، كالكرة الأرضية المجسمة التي يستعملها الجغرافيون لتحديد الأمكنة، أما المستقيمات، فهي عبارة عن خطوط طول أو خطوط عرض، لأن المستقيم عبارة عن دائرة كبرى على هذا السطح المحدب، فلا يمكن بذلك رسم أي موازٍ لهذا المستقيم من نقطةٍ خارجة عنه، كما أن المثلث المرسوم على سطحٍ بهذا الشكل، ستكون زواياه أكبر من 180 درجة[9]، وإذا سلمنا مع "ريمان" بهذه المصادرات، فإنه لا يمكننا أن نقع في تناقض منطقي.

وبهذا يبدو واضحًا، أنه أصبح لدى الرِّياضيين ثلاثة هندسات متساوية في درجة السّلامة المنطقية، والتساؤل حسب بوانكاريه H.Poincaré، عن أي الهندسات أكثر صحة، تساؤل لا معنى له أصلاً، فكأنما نحن نتساءل، عمَّا إذا كان النِّظام المتري صحيحًا والقياسات القديمة خاطئة، أو عمَّا إذا كانت الإحداثيات الديكارتية صحيحة، و الإحداثيات القطبية خاطئة، فهندسة ما لا تكون أصح من هندسة أخرى، بل كل ما في الأمر هو أنها أكثر ملائمة من سواها[10].

2- الهندسات المعاصرة ومفهوم المواءمة:

يميل الكثير من دارسي الفكر الرياضي ومن بينهم بوانكاريه إلى اعتبار الهندسة الإقليدية أنسب الهندسات لأنها أيسرها، وعند حدوث خصومة بينها وبين النظرية الفيزيائية، يجب العمل على تبديل النظرية الفيزيائية عوضًا عن تبديل الهندسة الأولية أي الإقليدية، ولم يكن يبدو لـ "باشلار"أنَّ هذه الفكرة صائبة " وبهذا نفهم الإهمال التام لرأي "بوانكاريه"، المتصل باليسر الأقصى، الذي تتمتع به الهندسة الإقليدية، فهذا الرأي يبدو لنا أكثر من خطأ جزئي، حتى أننا إذا أمعنا النَّظر، ألفيناه أكثر من نصيحة تنصح بالتأني والحيطة في التنبؤ بمصير العقل الإنساني، وعندما نُقوِّم اعوجاج هذا الرأي، ننتهي إلى قلب القيم قلبًا حقيقيًا في المجال العقلي"[11]، فالتقدم الكبير الذي عرفته الفيزياء خاصة مع مطلع القرن الماضي، كشف عن قصور الهندسة الإقليدية في احتواء الكثير من النظريات الجديدة.

وما يهمنا من خلال هذا التطور الذي عرفته الهندسة، هو التّساؤل عن الدَّور الذي لعبه الجدل في تطويرها، لأن الهندسة عند "باشلار"تعتبر من أعظم ضروب الفكر العلمي تقبلاً للجدل والتركيب[12]، فهي تجمع بين النّظرية والتّطبيق.

فما حقيقة هذه التحولات التي حملها الفكر الجدلي داخل النّظرية الهندسية؟ وما هي أهم النتائج التي أفرزتها هذه التحولات؟

وقد طرح "باشلار"معنا نفس هذا التساؤل، من خلال تتبعه لتطور الفكر الهندسي، حيث يرى بأنَّ الفكر الرِّياضي، ينطلق بظهور أفكار التحول والتقابل والتطبيق المتنوع، ولكن ألا تبلغ زيادة الشمول حدّها الأقصى بممارسة الجدل، إذ يؤلف التحوّل بين الأشكال المتنافرة غاية التنافر؟[13]، فعلى ضوء هذا التحول الذي عرفته الهندسة، يمكن أن نفسر السِّمة الجدلية المهيمنة على تطورها.

يشدد باشلار على ضرورة المقارنة بين أبنية الهندسات الثلاثة، ليبرز لنا العمل الجدلي الذي كشفت عنه هذه الهندسات، سواء داخل النظرية، أو ضمن تشكل المفاهيم الرِّياضية "فمن الطبيعي أن تبدو المشكلات المتصلة بتصميم المفاهيم الرَّياضية، على صورة مغايرة كل المغايرة عندما يحيا المرء الجدل الهندسي الأساسي"[14]، فالرِّياضي يعيش هذا الجدل عندما تعجز مفاهيمه السابقة عن استيعاب ما هو حاصل من تغيرات.

ومن بين المفاهيم التي غيرتها الهندسة اللاَّإقليدية، مفهوم المكان الذي كانت تأخذ به الهندسة الإقليدية، فقد كان يبدو حينئذٍ أنه لا يمكن تقديم تصور آخر للمكان، حيث لا يُقبل أكثر من موازٍ واحد لخط مستقيم يمر على نقطة محددة خارجه، لكن قيام الهندسات اللاَّإقليدية، بيَّن إمكانية قيام تصورات أخرى للمكان، يمكن ألاَّ يقبل بوجود فكرة التوازي، أو يمكن على العكس من ذلك، أن يقبل عددًا من الخطوط الموازية لخطٍ مستقيم لا نهاية له، فقد أصبح "المكان الهندسي" – ويَنسب بوانكاري لنفسه هذه التسمية– مختلفًا تمامًا عن سابقيه، فبعدما كان يوصف بالاتصال، اللاَّتناهي، وأنَّ له ثلاثة أبعاد، كما أنه متجانس[15]، أصبحت هذه المفاهيم مفقودة كخصائص للمكان الهندسي المعاصر.ولو أننا سنتكلم عن تجديل مفهوم المكان في الفصل الثالث.

دعونا الآن نركز جهودنا على أهم المتغيرات التي جاءت بها الهندسة اللاَّإقليدية، فقد تتبع "باشلار"تمشي مفهوم الجدل ضمن النَّظرية الرِّياضية، فهو يعتبره الفاعل في أي عملية تغيير و إبداع،

لأن ممارسة النَّظرية الرِّياضية تستند إلى تركيب المفاهيم المتناقضة، وهذا لا يمكن بلوغه إلاَّ إذا تمتع الرِّياضي بحس جدلي يوجه استدلالاته، بل يجب عليه أن يطلب ما هو مشترك بين الهندسات المتناقضة، وعليه أن يدرس تقابل هذه الهندسات، وهذه الدراسة تمكّنه من الوقوف على تحولات الفكر الرِّياضي في جدليته.

فكل هندسةٍ أنشأت ضمن أطرٍ جدلية، وتلك الأبعاد لا تبرز إلاَّ بإجلاء المسلمات الثابتة التي جعلت النسق الرِّياضي يتحجر على ذاته، ويرتبط بما ترسمُه له التجربة، ولذا كان لابد من التجريد لإنجاح عملية الجدل، وتلك هي خصائص العقل الهندسي اليوم، فلا تهمنا طبيعة ومحتوى مسلمات أي هندسة، بل تكمن أهميتها في الطبيعة الحوارية التي تتميز بها، وذلك بإبقاء الرِّياضيين على صفة المرونة داخلها، لتتغير كلما اقتضت الحاجة.

كما أنَّ هذا الموقف الذي أفرزته الهندسات الجديدة، إزاء مبادئ الرّياضيات، يشكل تحولاً جذريًا في الآفاق الرِّياضية كلها، ذلك لأنه إذا كان الدور الذي تلعبه القضايا الأولية التي يقوم عليها البرهان الرِّياضي هو وحده المهم، لا طبيعة هذه القضايا نفسها فسيصبح من الممكن تنويع النّظريات الرِّياضية بتنويع اختيارنا للمبادئ التي نعتمد عليها في بناء استدلالاتنا، وهذا فيه فتحٌ لآفاقٍ جديدة أمام الفكر الرِّياضي، يجعلها لا تغفل عن تَجْديل مبادئها، والبحث عمَّا يضمن لها استمرارها، فالنسق الواحد بالمعنى المعاصر، ليس أبدي التشييد، أو نهائي البنيان، بل إنَّه يمكن تغيير أصل من الأصول الموضوعة في نسقٍ ما وباستمرار، حينما تقتضي الحاجة، وحينئذٍ يتغير بناء النسق كله، لأن القضايا المشتقة لا بدّ وأن تتغير تغيرًا مصاحبًا لهذا التغير الذي أصاب مجموعة الأصول الموضوعة أو واحدًا منها، كما لا بدّ وأن يتغير البناء النسقي كله إذا تغير حد من الحدود الأولية[16]، فلا يمكن النّزول عند أي إحداثيات ثابتة، تحددها أي هندسة، بل يجب البحث عمَّا يبررها داخل الهيكلة الجدلية التي أنشأتها.

والتطور الذي عرفته الرِّياضيات كان متوقعًا، بل لازم الحدوث، لأن طريق الجدل يُنبئ بذلك، فاكتشاف الهندسة اللاَّإقليدية سنة 1830م كان أمرًا محتومًا(La découverte de la géométrie non euclidienne 1830, était inévitable)[17] ، فهي ضرب من مصير الجدل في المعرفة الإنسانية وفي مجال الهندسة بالتحديد.

فبإمكاننا القول بأنَّ الرِّياضيات تشهد هذه الجدلية باستمرار، وهي التي تدفع بهـا إلـى اكتشـافاتٍ جديدة، إذ أنَّ مباشرة الرِّياضيات لعملٍ تنتظم فيه الاستدلالات في سلسلة متواصلة الحلقات لا مجال فيه للثبات، بل هناك توقعات وقفزات في كل حين، وهناك مراجعة وإعادة نظر، لتنتهي إلى نتائج يسوقها إليها الجدل، فتصبح هذه النتائج بدورها منطلقات لحركةٍ جدلية جديدة وهكذا، حتى يحدونا اعتقادٌ بأننا سوف لا ننتهي من خلال هذه الاستدلالات إلى نتائج محددة، فالرِّياضي يتعامل مع "كائنـات" مسـتقلة بوجودها لا سلطان له عليها، بل إنَّ قُصارى ما يستطيعه إزائها هو تتبع استدلالاتها، وتأمـل طريقـة تطورها الجدلي، لأنَّ صفة الواقعية قد ارتفعت عنها، والتعدد الذي عرفته الرِّياضيات أسهم بشكلٍ كبير في سلخ صفة المشخص عن كل نظرياتها[18] مما جعل الرَّياضيين يؤكدون على أهمية النسـق الـذي أصبح فيه التمييز بين مبادئ البرهان من " بديهيات" و " مسلمات" أمرًا ثانويًا، لأنها تؤخـذ جميعهـا كفروض، أو منطلقات افتراضية، دون سابق تأكيد لصدقها أو اهتمام بالبرهنة عليهـا لأنهـا مجـرد مواضعات.

3- عدم التناقض كضامن للنسق:

بخصوص إمكانية تناقض الأوليات، فإنَّ المسألة أكثر صعوبة، رغم أنها واردة الحدوث، ولتجنّب هذا يتخذ الرِّياضيون معيارًا لعدم التناقض، وهي طريقة مستوحاة من الطريقة التي تستعمل للتأكد من استقلال الأوليات، وتتلخص في البرهنة على نظرية مـا وعلـى عكسـها داخـل بنـاء أكسـيومي (Axiomatique)[19] معين، فإنَّ لم نقع في التناقض، جاز لنا الاعتماد عليها، والـتخلص هنـا مـن التناقض ليس معناه التخلص من الجدل بما أن هذا الأخير، هو لب العملية الجدلية ، فهذا سوء تقـدير لأن الجدل يكمن في الروح الرِّياضية في حدّ ذاتها، وهو المحرك الأساسي لكل اكتشاف، وما الهندسات اللاَّإقليدية إلاَّ نتيجة من نتائجه.

أما عدم التناقض بين المبادئ التي ينطلق منها الرِّياضي، فهو الذي يسمح له بتشييد أكسـيوماتيك متكامل، ينتقل من خلاله من مقدمات معلومة إلى نتائج مجهولة دون أن يؤدي به ذلك إلى الوقوع في التناقض، ومن هذا لا يمكن للهندسات الثلاثة أن تتناقض فيما بينها، فالتناقض الهندسي يجب تجـاوزه، ويخضع التجسيد للخيال، إن التجسيد يصبح مجموعة من وسائل التعبير ننقل من خلالها صورنا إلـى الآخرين[20]، فلم يبقى بأي حال من الأحوال، بعد إثبات التقابل الموجود بين هذه الهندسات، القول بـأنَّ هناك خوف من تناقض منظومة "لوباتشفسكي" أو منظومة "إقليدس" على حدٍ سواء، مـا دام للتنـاقض

الهندسي مهما اختلف مصدره صدى في الشكل الجبري، ومن ثمة في سائر الهندســات المتقابلــة[21]، فالعلاقة التي تقوم بين الهندسات هي تكاملية، وانتفاء اليقين على هندسة محددة لا يعني خطئها، بل فقط عدم ملائمتها، ولهذا يجب العمل على توسيع الفكر الهندسي، في إطار ما يسمى بجدل التكامل.

هوامش المحاضرة:

[1] أندري كوزان، فرانسوا غيري وآخرون، مداخل الفلسفة المعاصرة، ترجمة، خليل أحمد خليل، دار الطليعة، لبنان،طبعة1، 1988، ص 70 .
[2] علي عبد المعطي محمد، مقدمات في الفلسفة، دار النهضة العربية، بيروت، لبنان، دون طبعة، 1985، ص 209.

[3] جون بولياي (J.Bolyai)(1802-1860): رياضي مجري، اهتم بالهندسة وقد طور مفهوم الأعداد المركبة، ولم يترك عدا أوراق ضمنها أفكاره..
[4] ن.أ.لوباتشفسكي (N.L.Lobacheveski)(1792-1856): رياضي روسي، صاحب الهندسة المقعرة(La géométrie hyperbolique).
[5] G.Bachelard:le nouvel esprit scientifique, op- cit, p24.
[6] هنري بوانكاريه، العلم والفرضية، ترجمة وتقديم، حمادي بن جاء الله، المنظمة العربية للترجمة، بيروت ، ط1 ، 2002، ص 117.

[7] ك.ف.جاوس (G.F.Gauss)(1777-1855)، رياضي وفلكي ألماني، كانت له اهتمامات بالفيزياء، اشترك مع ريمان في اكتشاف الهندسة المحدبة.
[8] و"ج.ف.ب.ريمان"(G.F.B.Reiman)(1826-1866): رياضي ألماني، رغم قصر حياته إلاَّ أن أعماله في الرِّياضيات مهمة، ويعتبر مؤسس علم الدلالة، والهندسة الرِّيمانية المحدبة التي مهدت الطريق لإنشتاين ليضع النَّظرية النسبية.

[9] محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، لبنان، ط 5، 2002، ص 76.
[10] هنري بوانكاريه: المرجع السابق، ص ص 129-130.
[11] غاستون باشلار، الفكر العلمي الجديد، مصدر سابق، ص 39-40.

[12] G.Bachelard,Le nouvel esprit scientifique, op-cit,p 23.
[13] غاستون باشلار، الفكر العلمي الجديد، مصدر سابق، ص 27.
[14] المصدر السابق، ص 29
[15] هنري بوانكاريه، المرجع السابق، ص 132.
[16] علي عبد المعطي محمد، المرجع السابق، ص 214.
[17] **G**.Bachelard,Le nouvel esprit scientifique**,** op-cit, pp24-25.
[18] Ibid, p32**.**
[19] الأكسيوماتيك (Axiomatique):ويعرب في بعض المؤلفات بـ" المنهاج الاستدلالي" أو " منظومة الأوليات" أو "نسق البديهيات"...وهو يعني منظومة من الأوليات التي يقوم عليها بناء رياضي معين، تراعي عدم التناقض الدَّاخلي، فالهندسة الإقليدية وهندسة لوباتشفسكي وهندسة ريمان...يشكل كل منها اكسيوماتيكًا خاصًا.(يُنظر: محمد عابد الجابري، المرجع السابق، ص 81.)

[20] غاستون باشلار، جماليات المكان، ترجمة غالب هلسا، مجد المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع،لبنان، طبعة6، سنة 2006، ص 145.
[21] G.Bachelard:Le nouvel esprit scientifique, op-cit, p29.