المحور الثالث: اختبارات الفروق.

المحاضرة الثامنة: الاختبار البارامتري "T" لفحص دلالة الفروق بين المتوسطات:

1-لعينتين مرتبطتين.

2-لعينتين مستقلتين ومتساويتين.

اختبار ت (T.Test) هو أحد الاختبارات الإحصائية البارامترية المهمة والتي تستخدم لاختبار دلالة الفروق بين المتوسطات، وهو من أكثر اختبارات الدلالة شيوعا في الأبحاث النفسية والتربوية والاجتماعية، ترجع نشأته إلى العالم البريطاني وليام غوست سنة 1908، ولم يشأ ذكر اسمه، فنشره باسم ستيودنت (Student) أي طالب، كبديل لاسمه، وأعط الحرف الأخير في الكلمة كاسم لهذا الاختبار، والهدف من الاختبار كما ذكرنا سابقا هو التأكد من أن الفروق بين متوسطي العينتين فرق ثابت أي له دلالة أم أنه فرق ناتج عن الصدفة وظروف اختبار العينة، بمعنى أنه إذا تكرر البحث عدة مرات فإننا نحصل على النتيجة نفسها.

I-شروط اختبار "ت": اختبار "ت" من الاختبارات البارامترية وبالتالي فإن استخدامه في اختبار الفرضيات يقتضي توفر الشروط التالية:

ش1- يجب أن يتبع توزيع المتغير المراد إجراء الاختبار على متوسطه التوزيع الطبيعي، ويستعاض عن هذا الشرط بزيادة حجم العينة (>30).

ش2- الاختيار العشوائي للعينة.

ش3- تجانس العينتين: ويقصد بذلك انتسابهما لمجتمع واحد أي لهم الخصائص نفسها، ويقاس مدى التجانس بالفرق بين تباين العينتين، ولايقصد بالفرق هنا الطرح، وإنما قسمة التباين الأكبر على التباين الأصغر (النسبة الفائية F).

ش4- الفرق بين حجم عينتي البحث من الأفضل أن يكون متقاربا، فلا يكون مثلا حجم العينة الأولى 400، والثانية 50، لأن الحجم له أثره على مستوى دلالة ت، فدرجات الحرية هي المدخل المباشر للكشف عن مستوى الدلالة، إذ تعتمد عدد أفراد كل عينة (الحجم يؤثر على المؤشرات الإحصائية التي تستخدم في حساب ت وهي المتوسط والتباين).

ش5-الاستقلالية: بمعنى أن مفردات العينة الأولى تم سحبها عشوائيا وبشكل مستقل عن مفردات العينة الثانية.

II- الحالات المختلفة لتطبيق اختبار"ت": مهما اختلفت طرق حساب ت فإنها جميعا ترجع إلى فكرة واحدة وهي نسبة مدى انحراف فرق أي متوسطين من متوسط التوزيع الإحصائي لفروق المتوسطات أي الخطأ المعياري لذلك الفرق وبذلك يصبح بسط هذه النسبة هو:

(متوسط العينة الأولى- متوسط العينة الثانية)- متوسط التوزيع الإحصائي لفروق المتوسطات، لكن متوسط التوزيع الإحصائي لفروق المتوسطات اعتدالي، وبذلك يصبح متوسطه =0، وهكذا لا يبقى في بسط النسبة إلا

فرق متوسط العينة الثانية عن متوسط العينة الأولى، أما مقام تلك النسبة فهو مجرد الخطأ المعياري لفرق المتوسطات المرتبطة وغير المرتبطة وفقا لخصائص كل حالة من الحالات التي تحسب دلالة فرق متوسطيهما.

وتتلخص أهم الحالات المختلفة لحساب دلالة فروق المتوسطات باختبار ت فيما يلي:

1/- دلالة فرق متوسطين مرتبطين وهذا يقتضي بالضرورة تساوي عدد أفراد العينتين.

2/- دلالة فرق متوسطين غير مرتبطين (عينتين مستقلتين) متساويتين في الحجم.

3/- دلالة فرق متوسطين غير مرتبطين (عينتين مستقلتين) غير متساويتين في الحجم، ونميز فيها حالتين هما:

3-1/- حالة تجانس العينتين.

3-2/- حالة عدم تجانس العينتين.

II-1 اختبار ت لفحص دلالة الفروق لعينتين مرتبطتين: يستخدم هذا النوع من الاختبارات، حينما يراد تقييم مجموعة واحدة من خلال قياسين مختلفين، بمعنى أن العينة التي يجرى عليها الاختبار أو القياس الأول هي نفسها العينة التي يجرى عليها الاختبار الثاني، والمعادلة المستخدمة في ذلك تعطى بالصيغة التالية:

$$t = \frac{\bar{d}}{sd/\sqrt{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$\bar{d}$ متوسط الفرق الملاحظ بين القياسين/ S_d: الانحراف المعياري للفرق الملاحظ بين القياسين/ n: عدد أفراد العينة/ d : تعني الفرق بين الدرجات.

II-1-1 خطوات تطبيق اختبار ت لعينتين مرتبطتين:

أولا: صياغة الفرض الصفري والفرض البديل:

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1:\ \mu_1 \neq \mu_2$$

وهذا في حالة ما إذا كانت الفرضية غير موجهة، أما إذا قمنا بتوجيهها فتكون صيغة الفرض البديل بإحدى الصورتين:

$H_1:\ \mu_1 > \mu_2$ الفرضية متجهة بذيل واحد أيمن.

$H_1:\ \mu_1 < \mu_2$ الفرضية متجهة بذيل واحد أيسر.

ثانيا: اختيار مستوى الدلالة الإحصائية المناسب (α)، إذ يتم في ضوء ذلك تحديد مناطق الرفض والمناطق الحرجة وحدودها وتسمى القيم الحرجة.

ثالثا: حساب قيمة "ت" للعينات المرتبطة، وتسمى القيمة المحسوبة للإحصائي المستخدم.

رابعا: تحديد القيمة الحرجة لإحصائي الاختبار المستخدم والتي تفصل بين مناطق الرفض وعدم الرفض، وذلك باستخدام الجدول الخاص بالتوزيع الإحصائي لاختبار "ت". (تسمى القيم الحرجة أو المجدولة) حيث (درجات الحرية n-1).

خامسا: اتخاذ القرار المناسب برفض أو عدم رفض H_0 .

مثال: رغب باحث في دراسة أثر برنامج تدريبي لتخفيض درجة التوتر والقلق، فاختار عينة من 5 أطفال، وقام بقساس درجة القلق لديهم باستخدام مقياس خاص للقلق، قبل تطبيق البرنامج وبعد تطبيقه، وحصل على النتائج التالية:

الأطفال	1	2	3	4	5
قبل البرنامج	72	68	60	71	55
بعد البرنامج	64	60	50	66	56

المطلوب:

هل تدل النتائج على وجود أثر إيجابي للبرنامج في خفض درجة القلق والتوتر لدى الأطفال عند مستوى دلالة $\alpha_{0.05}$؟ علما أن العينة سحبت من مجتمع يتوزع توزيعا اعتداليا.

الحل:

أولا: صياغة الفرض الصفري والفرض البديل:

لايوجد أثر للبرنامج التدريبي: $H_0:\ \mu_1 = \mu_2$

يوجد أثر إيجابي للبرنامج التدريبي في خفض درجة القلق: $H_1:\ \mu_1 < \mu_2$

ثانيا: حساب قيمة ت لعينتين مرتبطتين: لدينا المعادلة: $\boldsymbol{t = \frac{\bar{}}{sd/\sqrt{}}}$

الأطفال	1	2	3	4	5	المجموع
قبل البرنامج	72	68	60	71	55	
بعد البرنامج	64	60	50	66	56	
الفرق بين القياسين $\boldsymbol{d}$	-8	-8	-10	-5	1	-30
مربع الفرق ^{2}	64	64	100	25	1	254

المتوسط $\boldsymbol{\bar{d}} = \frac{\sum d}{n} = \frac{-30}{5} = -6$

الانحراف المعياري $\boldsymbol{S_d} = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{254 - \frac{900}{5}}{4}} = \sqrt{\frac{254-180}{4}} = \sqrt{\frac{74}{4}} = \sqrt{18.5} = \boldsymbol{4.3}$

نوجد قيمة t المحسوبة:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{\bar{d}}}{\boldsymbol{sd/\sqrt{n}}} = \frac{\boldsymbol{-6}}{\boldsymbol{4.3/\sqrt{5}}} = -3.11$$

نلاحظ من خلال جدول القيم الحرجة لتوزيع ت أن قيمة ت المجدولة عند درجات حرية $n-1=4$ ومستوى دلالة 0.05 لاختبار ذي طرف واحد(الفرضية موجهة بذيل واحد أيسر) هي -2.13 وهي أكبر من المحسوبة -3.11 فإننا نرفض الفرض الصفري لأن t المحسوبة تقع في منطقة الرفض، وبالتالي نقول بأن للبرنامج التدريبي أثر في تخفيض درجة التوتر والقلق.

II-2 اختبار ت لفحص دلالة الفروق لعينتين مستقلتين ومتساويتين في العدد $n_1=n_2$:

يستخدم اختبار ت لعينتين مستقلتين لقياس دلالة الفروق بين مجموعتين من الأفراد، حيث حجم المجموعة الأولى يكون مساويا لحجم المجموعة الثانية، ويستخدم لذلك القانون التالي:

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{n-1}}} \quad ....(2)$$

$\bar{x}_1$: متوسط درجات العينة الأولى. s_1^2 : تباين العينة الأولى.

$\bar{x}_2$: متوسط درجات العينة االثانية. s_2^2: تباين العينة الثانية.

n: $n_1=n_2$.

ملاحظة: درجات الحرية $(2n-1)$

مثال: يوضح المثال التالي درجات مجموعتين من الإناث والذكور في اختبار مادة الرياضيات، والمطلوب هو:

هل توجد فروق دالة إحصائيا بين درجات مجموعتي الذكور والإناث في مادة الرياضيات؟

ذكور	7	4	5	3	8	6	7	$\sum=35$
إناث	3	5	15	2	10	13	1	$\sum=49$

الحل: لدينا:

$$H_0:\ \mu_1=\mu_2$$
$$H_1:\ \mu_1\neq\mu_2$$

$n_1=n_2=7$ إذن: نطبق القانون (2) الخاص بعينتين مستقلتين متساويتين في العدد:

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{n-1}}}$$

لدينا: $\bar{x}_1=\frac{35}{7}=5$ متوسط (الذكور) / $\bar{x}_2=\frac{49}{7}=7$ متوسط (الإناث).

حساب تباين درجات المجموعة الأولى والثانية:

$$s_1^2 = \frac{\sum x_1^{\,2} - \frac{(\sum x_1)^2}{n}}{n} = \frac{248 - \frac{1225}{7}}{7} = \frac{248 - 175}{7} = \frac{73}{7} = 10.42$$

$$s_2^2 = \frac{\sum x_2^{\,2} - \frac{(\sum x_2)^2}{n}}{n} = \frac{533 - \frac{2401}{7}}{7} = \frac{533 - 343}{7} = \frac{190}{7} = 27.14$$

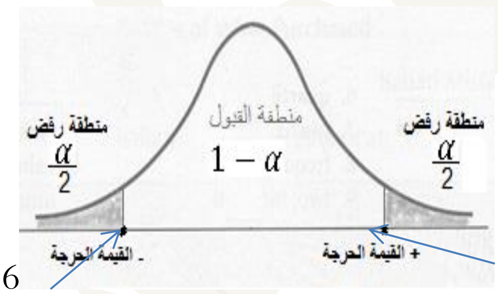
بالتعويض في المعادلة الخاصة بعينتين مستقلتين ومتساويتين في العدد نجد:

$$t = \frac{5-7}{\sqrt{\frac{10.42+27.14}{7-1}}} = \frac{-2}{\sqrt{6.26}} = -0.8$$

إذن : t المحسوبة = -0.8، وبما أن الفرصية البديلة غير موجهة(بذيلين)، فإن هناك منطقتين لرفض H_0.

نلاحظ أن قيمة t المجدولة عند درجات حرية $(2n-1)$ تساوي 13 ومستوى دلالة 0.05 هي 2.16

وبما أن : $t_t < t_c$ ، فإننا نقبل الفرض الصفري، أي أنه لا توجد فروق دالة إحصائيا بين درجات مجموعتي الذكور والإناث في مادة الرياضيات.



-2.16 +2.16