المحور الثالث: اختبارات الفروق.

أولا: الاختبارات البارامترية

المحاضرة التاسعة: الاختبار البارامتري "T" لفحص دلالة الفروق بين المتوسطات:

3-لعينتين مستقلتين وغير متساويتين.

II-3 اختبار T لفحص دلالة الفروق لعينتين مستقلتين وغير متساويتين في العدد $n_1 \neq n_2$:

II-3-1 اختبار T لفحص دلالة الفروق لعينتين مستقلتين وغير متساويتين ومتجانستين:

يستخدم في حالة عدم تساوي عدد أفراد المجموعتين بمعنى $n_1 \neq n_2$ ، وفي هذه الحالة لابد أولا من التأكد من تجانس تباين العينين، أي الكشف عما إذا كانت العينتان تنتميان إلى المجتمع نفسه، وللتأكد من التجانس، نحسب النسبة الفائية (اختبار التجانسF) وذلك بقسمة التباين الأكبر على التباين الأصغر، أي أن : $F = \frac{\text{التباين الأكبر}}{\text{التباين الأصغر}}$ بمعنى:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad \text{أو:} \quad F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$$

الفرض الإحصائي يكون كالتالي:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ لا يوجد فرق دال إحصائيا بين تباين المجموعتين (تجانس).

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ يوجد فرق دال إحصائيا بين تباين المجموعتين (عدم تجانس).

نقوم بعدها بمقارنة F_C مع قيمة F_T باعتماد جدول القيم الحرجة لتوزيع F، تحت درجات الحرية n_1-1 بالنسبة للبسط، و n_2-1 بالنسبة للمقام*، فإذا كانت:

$F_C < F_T$ فإننا نقبل الفرض الصفري بمعنى أن الفرق غير دال إحصائيا وبالتالي يوجد تجانس بين العينتين:

ولحساب قيمة "t"نطبق المعادلة التالية:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2(n_1-1)+s_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \quad \text{..........(3)}$$

$\bar{x}_1$: متوسط درجات العينة الأولى. s_1^2 : تباين العينة الأولى.

$\bar{x}_2$: متوسط درجات العينة الثاانية. s_2^2: تباين العينة الثانية.

n_1: حجم العينة الأولى، n_2 : حجم العينة الثانية.

ملاحظة: درجات الحرية (n_1+n_2-2).

---

* هذا في حالة ما إذاكان التباين الأكبر يخص المجموعة الأولى، أما إذا التباين الأكبر يخص المجموعة الثانية ،فإن درجات الحرية تكون n_2-1 بالنسبة للبسط و n_1-1 بالنسبة للمقام.

II-3-2 اختبار T لفحص دلالة الفروق لعينتين مستقلتين وغير متساويتين وغير متجانستين:

إذا كانت: $F_C > F_T$ فإننا نرفض الفرض الصفري (عدم تحقق الفرض الصفري)، أي أن العينتين غير متجانستين $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$، وعدم تجانسهما يدل على عدم تساوي انحرافهما المعياري، وبالتالي للحصول على قيمة t ذات التطابق الفعلي ومستوى الدلالة المرغوب فيه يجب أن تحسب قيمة انحرافهما المعياري بصورة مستقلة وتعطى قيمة t في هذه الحالة وفق القانون التالي:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})}} \text{..........(4)}$$

$\bar{x}_1$: متوسط درجات العينة الأولى. s_1^2 : تباين العينة الأولى.

$\bar{x}_2$: متوسط درجات العينة الثانية. s_2^2: تباين العينة الثانة.

II-3-2-1 خطوات تطبيق اختبار T في حالة عينتين غير متساويتين وغير متجانستين:

1- حساب قيمة t_c بالمعادلة رقم (4).

2- نختار مستوى الدلالة المرغوب ، مثلا 0.05.

3- نحسب درجات الحرية للعينة الأولى n_1-1 والثانية n_2-1.

4- نحسب قيمة t_1 للعينة الأولى المقابلة لدرجة حرية n_1-1 ثم نحسب قيمة t_2 للعينة الثانية المقابلة لدرجة حرية n_2-1.

5- نحسب بعد ذلك $\acute{t}$ عن طريق t_1, t_2 لنحدد مستوى دلالة $\acute{t}$ وذلك وفق المعادلة التالية:

$$\acute{t} = \frac{t_1 \frac{s_1^2}{n_1} + t_2 \frac{s_2^2}{n_2}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \text{.................(5)}$$

6- نقارن بين قيمتي $\acute{t}$ و t المحسوبة بالمعادلة رقم 4، فإذا كانت قيمة t المحسوبة أكبر من قيمة $\acute{t}$ عند مستوى دلالة 0.05، نستنتج أن الفرق بين المتوسطين دال إحصائيا.

وفي مايلي مثالين عن حالة عدم تساوي حجم العينتين في اختبار t:

المثال الأول: حالة عينتين مستقلتين غير متساويتين ومتجانستين:

يفترض باحث في ميدان التربية وجود فروق دالة بين متوسطي درجات الذكور والإناث على مقياس الدافعية للإنجاز، حيث أن حجم العينتين على التوالي هو: $n_1=5$، $n_2=7$، وبعد جمع البيانات من العينتين محل الدراسة وجد أن:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 10.96 \ , s_1^2 = 3.23 \\ \bar{x}_2 = 10.76 \ , \ s_2^2 = 3.07 \end{cases}$$

-اختبر مدى صحة افتراض الباحث عند مستوى $\alpha=0.05$

الحل: صياغة الفرض الصفري والبديل:

$$\begin{cases} H_0 : \ \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \ \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

-بما أن العينتان غير متساويتان $(n_1 \neq n_2)$ نقوم بالخطوات التالية:

1- حساب قيمة التجانس :

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{3.23}{3.07} = 1.05$$

2-صياغة الفرض الصفري والبديل الخاص بالتجانس

$$\begin{cases} H_0 : \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

3-نحسب: درجة حرية التباين الكبير: $5 - 1 = 4$

درجة حرية التباين الصغير: $7 - 1 = 6$

4- نحسب قيمة F_t المجدولة تحت درجات حرية 4 بالنسبة للبسط و6 بالنسبة للمقام، ومستوى دلالة $\alpha=0.05$، نجدها تساوي 4.53.

5--نقارن قيمة F_c مع قيمة F_t نجد أن $4.53>1.05$ (المحسوبة أقل من المجدولة) ، بمعنى قبول الفرض الصفري الذي يقول بعدم وجود فروق بين تباين المجموعتين، ومن ثمة فالعينتين متجانستين. ولحساب قيمة t نطبق المعادلة رقم (3) كمايلي:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2(n_1-1) + s_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{10.96 - 10.76}{\sqrt{\frac{3.23(5-1) + 3.07(7-1)}{5+7-2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}}$$

$$= \frac{0.2}{\sqrt{3.13 \times (0.2 + 0.14)}} = 0.19$$

6-نعين قيمة t_t عند مستوى دلالة $\alpha=0.05$ ودرجة حرية $(n_1+n_2-2)=10$ لاختبار الطرفين والتي تساوي 2.22.

نلاحظ أن قيمة $t_c<t_t$، بمعنى قبول الفرض الصفري الذي يقول بعدم وجود فروق دالة إحصائيا بين متوسطي درجات الذكور والإناث على مقياس الدافعية للإنجاز، أي أن متغير النوع لا يؤثر في مستوى الدافعية للإنجاز .

المثال الثاني: حالة عينتين مستقلتين غير متساويتين وغير متجانستين: لدينا البيانات التالية لمجموعتين من الأفراد بعد تعريض n_2 للمعالجة التجريبية:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 20.6 & , s_1^2 = 28.42, n1 = 10 \\ \bar{x}_2 = 16 & , s_2^2 = 6.72, \ n2 = 20 \end{cases}$$

اختبر صحة الفرض الصفري عند مستوى دلالة 0.05 والذي مفاده أنه لا توجد فروق دالة إحصائيا بين نتائج المجموعة التجريبية والضابطة، أي لا يوجد أثر للمعالجة؟

الحل: أولا علينا صياغة الفرض الصفري والبديل:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

1-بما أن العينتان مستقلتان وغير متساويتان ($n_1 \neq n_2$) فإنه علينا اختبار تجانسهما عن طريق اختبار F بقسمة التباين الأكبر على التباين الأصغر أي:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{28.42}{6.72} = 4.23$$

2- صياغة الفرض الصفري والبديل الخاص بالتجانس:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ لا يوجد فرق دال إحصائيا بين تباين المجموعتين (تجانس).

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ يوجد فرق دال إحصائيا بين تباين المجموعتين (عدم تجانس).

3-نحسب: درجة حرية التباين الكبير: $10 - 1 = 9$

درجة حرية التباين الصغير: $20 - 1 = 19$

4- نحسب قيمة F_t المجدولة تحت درجات حرية 9 بالنسبة للبسط و19 بالنسبة للمقام، ومستوى دلالة α=0.05، نجدها تساوي 2.42.

5--نقارن قيمة F_c مع قيمة F_t نجد أن 2.42<4.23 (المحسوبة أكبر من المجدولة) ، بمعنى رفض الفرض الصفري وبالتالي فالعينتان غير متجانستان، ولتعيين قيمة t نطبق المعادلة رقم (4):

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})}} = \frac{20.6 - 16}{\sqrt{\frac{28.42}{10} + \frac{6.72}{20})}} = \mathbf{2.58}$$

6-نحسب $n_1 - 1$ بالنسبة للعينة الأولى=9

و $n_2 - 1$ بالنسبة للعينة الثانية=19

الخطوة الموالية هي حساب قيمة t_1 و t_2 (للعينتين الأولى والثانية) من خلال جدول القيم الحرجة لتوزيع t* عند مستوى الدلالة المطلوب ودرجة الحرية المحسوبة نجد:

$t_{1(0.05\,;\,9)} = 2.26$

$t_{2(0.05\,;\,19)} = 2.09$

7-نحسب قيمة $\acute{t}$ بدلالة t_1 و t_2 وذلك بتطبيق المعادلة رقم (5) فنجد:

$$\acute{t} = \frac{t_1 \frac{s_1^{\acute{2}}}{n_1} + t_2 \frac{s_2^2}{n_2}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \frac{2.26 \frac{(28.4\acute{2})}{10} + 2.09 \frac{(6.72)}{20}}{\frac{28.42}{10} + \frac{6.72}{20}}$$

$$\acute{t} = \frac{6.4\acute{2} + 0.71}{2.84 + 0.34} = \frac{7.\acute{1}3}{3.18} = \mathbf{2.24}$$

8-نقارن t_c مع $\acute{t}$ نجد أن:

2.24<2.58 مما يجعلنا نرفض الفرض الصفري، وبالتالي نقول بوجود فروق دالة إحصائيا بين نتائج المجموعة التجريبية والضابطة.

* جدول القيم الحرجة لتوزيع t موجود على مستوى المحاضرة رقم 6