أولاً: اختبار تحليل التباين الأحادي الاتجاه:

تحليل التباين هو اختبار احصائي بارامتري لدلالة الفروق بين أكثر من عينتين، وقد طوّره Fisher نظرا لضعف استخدام اختبار t student في حالة وجود أكثر من مجموعتين بهدف المقارنة. يسمح تحليل التباين بعقد مقارنات متعدد في آن واحد، وهناك أشكال لتحليل التباين تتوقف على عدد المتغيرات المستقلة والتابعة، وأبسط أنواعها **تحليل التباين الأحادي** الذي يهتم بالكشف عن الفروق أو الاختلافات بين عدد من المجموعات في متغير تابع واحد.

تعبر قيمة تحليل التباين الأحادي الاتجاه **F** عن نسبة التباين بين المجموعات إلى التباين داخل المجموعات:

$$\boldsymbol{F = \frac{MS\ between}{MS\ within}}$$

بحيث يقدَر التباين بين المجموعات كما يلي:

$$\boldsymbol{MS\ bet = \frac{SS\ bet}{df\ bet}}$$

$$\boldsymbol{SS\ bet = \underbrace{\frac{(\sum x_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum x_2)^2}{n_2} + \cdots + \frac{(\sum x_K)^2}{n_K}}_{\text{❶}} - \underbrace{\frac{(\sum x)^2}{N}}_{\text{❷}}}$$

$$\boldsymbol{df\ bet = k - 1}$$

أما التباين داخل المجموعات فيقدَر كما يلي:

$$\boldsymbol{MS\ with = \frac{SS\ with}{df\ with}}$$

$$\boldsymbol{SS\ with = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \cdots (x_K)^2 - \text{❶}}$$

$$\boldsymbol{df\ with = n - k}$$

مثال1: نقوم ببحث لمعرفة أثر عدد ساعات الدراسة بواسطة الكمبيوتر على القدرة على حل مشكلات واقعية لدى ثلاثة مجموعات من طلاب الجامعة.

- اختبر صحة الفرض الصفري عند $\alpha = 0.05$ ؟

N	04 h	02 h	01 h
1	10	7	6
2	8	8	7
3	7	9	8
4	6	10	6
5	4	6	6
6	6	5	4

1- طرح المشكلة: هل تختلف نتائج المجموعات الثلاثة في القدرة على حل مشكلات واقعية باختلاف عدد ساعات الدراسة بواسطة الكمبيوتر؟

2- صياغة الفرضيات:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_0 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$$

3- تطبيق القانون الاحصائي:

حساب التجانس بتطبيق قانون *Cochran*:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$$
$$H_0 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2$$

$$s_1^2 = \frac{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}{n\,(n-1)} = \frac{6 \times (226) - (36)^2}{6\,(6-1)} = \frac{1356 - 1296}{30} = 2$$
$$s_2^2 = \frac{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}{n\,(n-1)} = \frac{6 \times (355) - (45)^2}{6\,(6-1)} = \frac{2130 - 2025}{30} = 3.5$$
$$s_3^2 = \frac{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}{n\,(n-1)} = \frac{6 \times (301) - (41)^2}{6\,(6-1)} = \frac{1806 - 1681}{30} = 4.16$$
$$C = \frac{\text{التباين الأكبر}}{\text{مجموع التباينات}} = \frac{4.16}{4.16 + 3.5 + 2} = 0.43$$

قيمة C المحسوبة 0.43 أقل من C المجدولة 0.707 عند $d_1 = 3$ (عدد المجموعات) و $df_2 = 6$ (عدد أفراد العينة) ومنه نقبل الفرض الصفري ونرفض الفرض البديل عند مستوى الدلالة 0.05. ومنه لا توجد اختلافات بين المجموعات، وبذلك فان العينات متجانسة.

- حساب تحليل التباين:

$$F = \frac{MS\ bet}{MS\ with}$$
$$MS\ bet = \frac{SS\ bet}{df\ bet}$$
$$SS\ bet = \underbrace{\frac{(\sum x_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum x_2)^2}{n_2} + \cdots + \frac{(\sum x_K)^2}{n_K}}_{1} - \underbrace{\frac{(\sum x)^2}{N}}_{2}$$

$$= \frac{(36)^2}{5} + \frac{(45)^2}{5} + \frac{(41)^2}{5} - \frac{(122)^2}{5}$$

= 216 + 337.5 + 280.16 – 826.88

= 833.66 – 826.88

SS bet = 6.78

df bet = k – 1 = 3 – 1 = 2

MS bet = $\frac{SS\ bet}{df\ bet} = \frac{6.78}{2}$ = 3.39

$$MS\ with = \frac{SS\ with}{df\ with}$$

$$\text{SS with} = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \cdots (x_K)^2 - ❶$$

$$= (6)^2 + (7)^2 + (8)^2 + (6)^2 + (5)^2 + (4)^2 + (7)^2 + (8)^2 + (9)^2 + (10)^2 + (6)^2 + (5)^2 + (10)^2 + (8)^2 + (7)^2 + (6)^2 + (4)^2 + (6)^2 - 833.66$$

= 888 – 833.66 = 48.34

SS with = 48.34

df with = n – k = 18 – 3 = 15

$$MS\ with = \frac{SS\ with}{df\ with} = \frac{48.34}{15} = 3.22$$

$$F = \frac{MS\ bet}{MS\ with} = \frac{3.39}{3.22} = 1.05$$

للتحقيق:

$$\text{SS total} = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \cdots (x_K)^2 - ❷$$

= 882 – 826.88 = 55.12

$$df\ tot = df\ bet + df\ with = 2 + 15 = 17$$

أو $df\ tot = n - 1 = 18 - 1 = 17$

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	F
ما بين المجموعات	**6.78**	**2**	**3.39**	
داخل المجموعات	**48.34**	**15**	**3.22**	**1.05**
الكلي	**55.12**	**17**		

بما أن F المحسوبة (1.05) أقل من المجدولة F (3.68) عند مستوى الدلالة 0.05 ودرجات حرية ما بين المجموعات (2) وداخل المجموعات (15)، فإننا نقبل الفرض الصفري نرفض الفرض البديل. لذلك لا تختلف نتائج المجموعات الثلاثة في القدرة على حل مشكلات واقعية باختلاف عدد ساعات الدراسة بواسطة الكمبيوتر.

مثال2:

لمعرفة تأثير ثلاث طرق للتدريس مادة الفيزياء على اكتساب المفاهيم العلمية لدى طلاب الثانوية، تحصلنا على النتائج التالية:

N	1	2	3	4	5
ط 1	6	7	2	4	2
ط 2	5	10	4	6	4
ط 3	6	10	9	10	12

طرح المشكل: هل يوجد فرق (اختلاف) بين المجموعات الثلاثة في اكتساب المفاهيم العلمية في الفيزياء؟

الفرضيات:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$$

التحقق من تجانس المجموعات الثلاثة:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$$
$$H_0 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2$$

N	ط 1	ط 2	ط 3	X^2	Y^2	Z^2
1	6	5	6	36	25	36
2	7	10	10	49	100	100
3	2	4	9	4	16	81
4	4	6	10	16	36	100
5	2	4	12	4	4	144
$\sum$	21	29	47	109	193	461

$$s_1^2 = \frac{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}{n\ (n-1)} = \frac{5 \times (193) - (21)^2}{5\ (5-1)} = 5.2$$
$$s_2^2 = \frac{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}{n\ (n-1)} = \frac{5 \times (193) - (29)^2}{5\ (5-1)} = 6.2$$
$$s_3^2 = \frac{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}{n\ (n-1)} = \frac{5 \times (461) - (47)^2}{5\ (5-1)} = 4.8$$
$$C = \frac{\text{التباين الأكبر}}{\text{مجموع التباينات}} = \frac{6.2}{6.2 + 5.2 + 4.8} = \frac{6.2}{16.2} = 0.38$$

C المحسوبة 0.38 أقل من C المجدولة 0.74 عند $dl_1 = K = 3$ (عدد المجموعات -1) و $df_2 = 6$ (عدد أفراد العينة) ومنه نقبل الفرض الصفري ونرفض الفرض البديل عند مستوى الدلالة 0.05. ومنه لا توجد اختلافات بين المجموعات، وبذلك فان العينات متجانسة.

تطبيق الاختبار الاحصائي:

$$F = \frac{MS\ bet}{MS\ with}$$
$$MS\ bet = \frac{SS\ bet}{df\ bet}$$

$$SS\ bet = \underbrace{\frac{(\sum x_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum x_2)^2}{n_2} + \cdots + \frac{(\sum x_K)^2}{n_K}}_{1} - \underbrace{\frac{(\sum x)^2}{N}}_{2}$$

$$= \frac{(21)^2}{5} + \frac{(29)^2}{5} + \frac{(47)^2}{5} - \frac{(97)^2}{5}$$

= 88.2 + 168.2 + 441.8 – 627.26

= 698.2 – 627.26 = 70.94

$$SS\ bet = 70.94$$

$$df\ bet = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$MS\ bet = \frac{SS\ bet}{df\ bet} = \frac{70.94}{2} = 35.47$$

$$MS\ with = \Sigma X^2 - 1$$

= (109 + 193 + 416) – 698.2

= 763 – 698.2 = 64.8

$$SS\ with = 64.8$$

$$df\ with = n - k = 15 - 3 = 12$$

$$MS\ with = \frac{SS\ with}{df\ with} = \frac{64.8}{12} = 5.4$$

$$\text{SS total} = \Sigma X^2 - 2$$

= 763 – 627.26 = 135.74

أو $SS\ bet + SS\ with = 70.94 + 64.8 = 135.74$

$$df\ tot = N - 1 = 15 - 1 = 14$$

$$F = \frac{MS\ bet}{MS\ with} = \frac{35.47}{5.4} = 6.56$$

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	F
ما بين المجموعات	**70 .94**	**2**	**35.47**	**6.56**
داخل المجموعات	**64.8**	**12**	**5.4**	
الكلي	**135.74**	**14**		

بما أن F المحسوبة (6.56) أقل من المجدولة F (3.88) عند مستوى الدلالة 0.05 ودرجات حرية ما بين المجموعات (2) وداخل المجموعات (14)، فإننا نرفض الفرض الصفري ونقبل الفرض البديل. لذلك يوجد فرق (اختلاف) بين المجموعات الثلاثة في اكتساب المفاهيم العلمية في الفيزياء.

ملاحظة هامة: عندما تكون قيمة F دالة إحصائيا بمعنى وجود فرق أو اختلاف بين المجموعات فان يجب معرفة الفروق الدالة وغير الدالة بين كل مجموعتين على حدة، وذلك باستخدام المقارنات البعدية أو المتعددة.

ثانيا: اختبار المقارنات المتعددة:

تستخدم طرق المقارنات البعدية لإجراء المقارنات الثنائية الممكنة بين العينات لتحديد أي من الفروق بين المتوسطات دال احصائيا أيا منها غير دال احصائيا. ولقد طور علماء الاحصاء العديد من الطرق منها على سبيل المثال:

- طريقة Sheffee
- طريقة Tuckey
- طريقة Newman-Keuls

انطلاقا من المثال السابق يمكن التأكد من الفروق الدالة وغير الدالة بين متوسطات المجموعات باستخدام:

- **طريقة Sheffee** الذي يعد أكثر اختبارات المقارنات المتعددة البعدية استخداما في البحوث النفسية والتربوية. وذلك لأنه يعمل على تقليل الوقوع في الخطأ من النوع الأول في إجراء أكثر من مقارنة واحدة. يتم تقدير القيمة الحرجة لاختبار شيفيه بالاعتماد على الصيغة التالية:

$$F = \frac{(\bar{\chi}_l - \bar{\chi}_s)^2}{MS\ with\ \left(\frac{1}{N_l} + \frac{1}{Ns}\right)(k-1)}$$

حيث: F ترمز إلى النسبة الفائية بدرجة حرية $(N-K, K-1)$

$MS\ with$: متوسط مجموع الربعات داخل المجموعات، ونحصل عليه من جدول تحليل التباين أحادي الاتجاه

$\bar{\chi}_s$ و $\bar{\chi}_l$: ترمزان إلى المتوسطين المراد المقارنة بينهما.

N_l و Ns : حجم كل من العينتين.

ويمكن توضيح خطوات إجراء الاختبار بالاستعانة بالبيانات التي حصلنا عليها من المثال السابق، حيث سنجري المقارنات الثنائية الثلاثة:

أولا مقارنة **متوسطي المجموعتين الأولى A والثانية B :**

$$F = \frac{(5.8-4.2)^2}{5.4\ \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)(3-1)} = 0.59$$

ثانيا مقارنة **متوسطي المجموعتين الأولى A والثالثة C :**

$$F = \frac{(9.4-4.2)^2}{5.4\ \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)(3-1)} = 6.25$$

ثالثا مقارنة **متوسطي المجموعتين الثانية B والثالثة C :**

$$F = \frac{(9.4-5.2)^2}{5.4\ \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)(3-1)} = \ 4.08$$

بالرجوع إلى جدول النسبة الفائية F بدرجتي حرية ما بين المجموعات (2 =1 – k) ودرجات حرية داخل المجموعات (N – k = 12) ومستوى الدلالة 0.05 فان قيمها تساوي 3.89 وبذلك فان:

الفرق بين المجموعة الأولى **A** والمجموعة الثانية **B** غير دال إحصائيا لأن 0.59 > 3.89

الفرق بين المجموعة الأولى **A** والمجموعة الثالثة **C** دال إحصائيا لأن 6.25 < 3.89

الفرق بين المجموعة الثانية **B** والمجموعة الثالثة **C** دال إحصائيا لأن 4.08 < 3.89

- **طريقة Tuckey:** يستخدم ا=أيضا اختبار توكي لمعرفة الفروق الدالة وغير الدالة بين متوسطات المجموعات مثنى مثنى، ويعد أيضا من الاختبارات التي تستخدم كثيرا في البحوث النفسية والتربوية لأنَه يعطي مساحة أقل للوقوع في الخطأ من النوع الأول مقارنة باختبار شيفيه. ويمكن تقدير قيمة اختبار توكي وفقا للصيغة التالية:

في حالة عينات غير متساوية:

$$q = \frac{(\bar{\chi}_l - \bar{\chi}_s)^2}{\sqrt{\frac{MS\ with}{2}\left(\frac{1}{N_l}+\frac{1}{Ns}\right)}}$$

حيث تمثل: $\bar{\chi}_s$ المتوسط الأكبر، وتمثل $\bar{\chi}_l$ المتوسط الأصغر

$MS\ with$: متوسط مجموع الربعات داخل المجموعات

N_l : حجم العينة ذات المتوسط الأكبر و Ns : حجم العينة ذات المتوسط الأصغر

في حالة عينات متساوية:

$$q = \frac{(\bar{\chi}_l - \bar{\chi}_s)^2}{\sqrt{\frac{MS\ with}{N_G}}}$$

حيث تمثل: $\bar{\chi}_s$ المتوسط الأكبر، وتمثل $\bar{\chi}_l$ المتوسط الأصغر

$MS\ with$: متوسط مجموع الربعات داخل المجموعات

N_G : حجم أي عينة من العينات المتساوية

يمكن توضيح إجراءات تقدير قيمة **q** من بيانات المثال السابق، وذلك بإجراء المقارنات الثنائية الثلاثة:

ثالثا مقارنة **متوسطي المجموعتين الثانية B والثالثة C :**

$$q = \frac{(5.8-4.2)^2}{\sqrt{\frac{5.4}{2}}} = 1.55$$

ثانيا مقارنة **متوسطي المجموعتين الأولى A والثالثة C :**

$$q = \frac{(9.4 - 4.2)^2}{\sqrt{\frac{5.4}{2}}} = 5.04$$

أولا مقارنة **متوسطي المجموعتين الأولى A والثانية B :**

$$q = \frac{(9.4 - 5.2)^2}{\sqrt{\frac{5.4}{2}}} = 4.07$$

بالرجوع إلى جدول النسبة **q** بدرجتي حرية عدد المجموعات (k = 3) ودرجات حرية ما بين المجموعات

(N – K= 12) ومستوى الدلالة 0.05 فان قيمها تساوي 3.49 وبذلك فان:

الفرق بين المجموعة الأولى **A** والمجموعة الثانية **B** غير دال إحصائيا لأن 1.55 > 3.49

الفرق بين المجموعة الأولى **A** والمجموعة الثالثة **C** دال إحصائيا لأن 5.04 < 3.49

الفرق بين المجموعة الثانية **B** والمجموعة الثالثة **C** دال إحصائيا لأن 4.07 < 3.49

ملاحظة: يتضح من استخدام كل من طريقتي توكي وشيفيه لم تغير من القرار الاحصائي المتعلق بدلالة الفروق بين كل مجموعتين، ولكن رغم ذلك فان استخدام طريقة توكي تعطي للباحث فرصة أفضل في عدم الوقوع في الخطأ من النوع الأول اي رفض الفرض الصفري وهو صحيح.