الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

سلسلة تمارين خاصة بمحور : نظرية المجموعات وحساب الاحتمال

التمرين 01 : لتكن المجموعة التالية: $\Omega = \{1/2, 0, 3, 5, -2, -4\}$، ولتكن A، B و C ثلاث مجموعات جزئية من Ω حيث:

$A = \{0,3,-2\}$ ، $B = \{1/2,5,-2,-4\}$ ، $C = \{1/2,-4\}$

المطلوب: إيجاد المجموعات التالية: $A \cup B, A \cap B, \overline{A}, \overline{B}, \overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}, A - B, \overline{B \cap C},$

الحل:

$A \cup B = \{0,3,-2,1/2,5,-4\}$ و $A \cap B = \{-2\}$ و $\overline{A} = \Omega - A = \{1/2,5,-4\}$ و $\overline{B} = \Omega - B = \{0,3\}$

و $\overline{A \cup B} = \Omega - (A \cup B) = \{\ \} = \phi$ و $\overline{A \cap B} = \Omega - (A \cap B) = \Omega - \{-2\} = \{1/2,0,3,5,-4\}$

و $A - B = A \cap \overline{B} = \{0,3\}$ و $\overline{B \cap C} = \Omega - (B \cap C) = \Omega - \{1/2,-4\} = \{1/2,0,3,5,-4\}$

التمرين 02 : نقوم برمي حجر نرد متجانس ونركز على النتيجة التي تظهر على السطح:

1- أكتب فراغ العينة (مجموعة إمكانات التجربة).

2- عين الأحداث التالية: A: نتيجة الرمية عدد زوجي. B: نتيجة الرمية عدد فردي.

C: نتيجة الرمية عدد أقل تماما من 3 D: نتيجة الرمية عدد أقل تماما من 7.

E : نتيجة الرمية عدد أكبر من 6. F: نتيجة الرمية عدد من قوى 2.

الحل:

إن تجربة رمي حجر نرد تؤدي إلى ظهور ستة نتائج ممكنة، وهي: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

الحدث A: نتيجة الرمية عدد زوجي $A = \{2,4,6\}$

الحدث B: نتيجة الرمية عدد فردي $B = \{1,3,5\} \Rightarrow A \cup B = \Omega$

$A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,3,5\} \Rightarrow A \cup B = \Omega$ وعليه فإن الحدثان A و B حدثان مكملان لبعضهما البعض.

الحدث C: نتيجة الرمية عدد أقل تماما من 3 $C = \{1,2\}$

الحدث D: نتيجة الرمية عدد أقل تماما من 7 أي $D = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$ ومنه نقول أن الحدث D هو حدث أكيد.

الحدث E: نتيجة الرمية عدد أكبر من 6 أي $E = \{\ \} = \phi$ ومنه نقول أن الحدث E هو حدث مستحيل.

الحدث F: نتيجة الرمية عدد من قوى 2 أي $F = \{1,2,4\}$

التمرين 03 : نلقي حجري نرد متمايزين في آن واحد ، فما هو عدد الحالات الممكنة من هذه التجربة ؟

الحل:

هناك 6 نتائج ممكنة لكل حجر، إذن عدد الحالات الممكنة من التجربتين معا هو:

$$n(\Omega) = n \times m = 6 \times 6 = 36$$

وهذه الحالات الممكنة هي : $\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3)........(6;6)\}$

التمرين 04 : نقوم بإلقاء قطعة نقود أو حجر نرد والمطلوب تحديد فراغ العينة Ω ؟

الحل:

هناك نتيجتين ممكنتين لرمي قطعة نقود و 6 نتائج ممكنة لرمي حجر النرد، إذن عدد الحالات الممكنة من رمي قطعة نقد أو رمي حجر نرد هو: $n(\Omega) = n + m = 2 + 6 = 8$

وهذه الحالات الممكنة هي : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;P;F\}$

التمرين 05 : تحمل حقيبة قفل رقمي يتكون من ثلاث خانات متماثلة، كل خانة يمكن أن تحمل الأرقام : 0، 1، ....،9.

- كم طريقة يمكن بها تكوين رقم سري (3 أعداد) إذا كان تكرار الرقم غير ممكن.

الحل:

- عدد الطرق التي يمكن بها تكوين رقم سري (3 أعداد) إذا كان تكرار الرقم غير ممكن.(الترتيب مهم وعليه نستخدم طريقة الترتيبة $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$).

يمكن تكوين: $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ رقم سري.

التمرين 06 : اتفق 7 أصدقاء على الذهاب إلى الملعب لمشاهدة مباراة في كرة القدم.

المطلوب:

- بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف واحد به 7 مقاعد ؟
- نفرض أنهم لم يجدوا إلا 5 مقاعد، فبكم طريقة يمكنهم الجلوس ؟

الحل:

- اتفق 7 أصدقاء على الذهاب إلى الملعب لمشاهدة مباراة في كرة القدم، وعليه عدد الطرق التي يمكنهم الجلوس بها في صف واحد به 7 مقاعد يمثل تبديلة لأننا نهتم باختيار الكل من الكل (k=n)(7 أشخاص و 7 مقاعد) والسحب على التوالي أي أن الترتيب مهم وبالتالي نستخدم طريقة التبديلة و هي: $P_n = n!$

$$P_n = n! = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times ......\times 1 = 5040$$ طريقة

- نفرض أنهم لم يجدوا إلا 5 مقاعد، فهنا نهتم باختيار الجزء من الكل (n>k) (5 مقاعد من بين 7 أشخاص)، وبما أن السحب على التوالي ، أي أن الترتيب مهم وبالتالي نستخدم طريقة الترتيبية: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2!}{2!} = 7\times 6\times 5\times 4\times 3 = 2520$$

التمرين 07 : يتكون مجلس إدارة من 12 عضوا، من بينهم 9 رجال و 3 نساء، نريد تشكيل لجنة من 3 أشخاص.

- ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها ؟
- ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها والتي تحتوي على امرأة واحدة فقط ؟
- إذا افترضنا أن الأشخاص الثلاثة المنتخبون يتم تعيينهم حسب ترتيب القرعة: رئيس، نائب و أمين المال، فما عدد اللجان التي يكون فيها على الأقل رجلين ؟

الحل:

- الملاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار الجزء من الكل (3 أشخاص من بين 12 شخص) الاختيار أو السحب يتم في هذه الحالة مرة واحدة أي أن الاهتمام يكون في تكوين لجنة من 3 أفراد ولا يهم من تم اختياره أولا وبالتالي نستخدم طريقة التوفيقة: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ، ومنه عدد اللجان الممكن تشكيلها هو :

$$Card(\Omega) = C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9!}{(3\times 2\times 1)9!} = 220$$ لجنة ممكنة

- نسمي الحادث A إذا كانت في اللجنة امرأة واحدة فقط وعليه عدد اللجان التي تحتوي على امرأة واحدة فقط هو:

$$Card(A) = C_3^1 \times C_9^2 = \frac{3!}{1!2!}\times\frac{9!}{2!7!} = 3\times 9\times 4 = 108$$

- إذا افترضنا أن الأشخاص الثلاثة المنتخبون يتم تعيينهم حسب ترتيب القرعة: رئيس، نائب و أمين المال، فعدد اللجان التي يكون فيها على الأقل رجلين هو :

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار الجزء من الكل (3 أشخاص من بين 12 شخص)، الاختيار أو التعيين في هذه الحالة يتم حسب ترتيب القرعة أي أن الترتيب مهم وبالتالي نستخدم طريقة الترتيبية: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

نسمي الحادث B حادث احتواء اللجنة على رجلين على الأقل (معناه يوجد رجلين أو ثلاثة رجال في اللجنة) وعليه عدد اللجان هو:

$$Card(B) = A_9^2 \times A_3^1 + A_9^3 \times A_3^0 = \frac{9!}{7!}\times\frac{3!}{2!} + \frac{9!}{6!}\times\frac{3!}{3!} = 9\times 8\times 3 + 9\times 8\times 7 = 720$$

التمرين 08 : ليكن A و B حدثان كيفيان، فإذا كان: $P(A)=3/8$ ، $P(B)=1/2$ و $P(A\cup B)=5/8$

- أحسب ما يلي: $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{B})$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ ، $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ ، $P(A/B)$ ، $P(B/A)$ ، $P(\overline{A}/\overline{B})$ ؟

الحل:

- $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{3}{8}=5/8$

- $P(\overline{B})=1-P(B)=1-\dfrac{1}{2}=1/2=0,5$

- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
  $=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{8}=2/8=0,75$

- $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{5}{8}=3/8$

- $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\dfrac{1}{4}=3/4$

- $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/4}{1/2}=1/2$

- $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1/4}{3/8}=2/3$

- $P(\overline{A}/\overline{B})=\dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{3/8}{1/2}=3/4$

التمرين 09 : يحتوي صندوق على 12 تفاحة، 8 منها فاسدة . إذا سحبنا تفاحتين في آن واحد من هذا الصندوق عشوائياً .

المطلوب : – ها هو إحتمال أن تكونان فاسدتان ؟

– ها هو إحتمال أن تكونان غير فاسدتان ؟

– ها هو إحتمال أن تكون إحداهما على الأقل فاسدة ؟

الحل :

طريقة السحب : سحب تفاحتين في آن واحد معناه نستخدم طريقة حساب توفيقة $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

1- حساب إحتمال أن تكون التفاحتين فاسدتين: نسمي هذا الحدث بـ (A)

$$P(A)=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}=\frac{\frac{8!}{2!\,6!}}{\frac{12!}{10!\,2!}}=\frac{\frac{8x7}{2}}{\frac{12x11}{2}}=\frac{8x7}{12x11}=\frac{56}{132}$$

2- حساب إحتمال أن تكون التفاحتين غير فاسدتين: نسمي هذا الحدث بـ (B)

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{12!}{10!\,2!}}=\frac{\frac{4x3}{2}}{\frac{12x11}{2}}=\frac{4x3}{12x11}=\frac{12}{132}=\frac{1}{11}$$

3- حساب إحتمال أن تكون إحدى التفاحتين على الأقل فاسدة : نسمي هذا الحدث بـ (C)

$$P(C)=\frac{C_8^1\text{ x }C_4^1+C_8^2\text{x}C_4^0}{C_{12}^2}=\frac{\frac{8!}{1!\,7!}\text{x}\frac{4!}{1!\,3!}+\frac{8!}{2!\,6!}\text{x}\frac{4!}{0!\,4!}}{\frac{12!}{10!\,2!}}=\frac{8x4+\frac{8x7}{2}}{\frac{12x11}{2}}=\frac{8x4+4x7}{6x11}=\frac{60}{66}=\frac{10}{11}$$

<u>التمرين 10</u> : صندوق به 10 مصابيح كهربائية من بينها 04 فاسدة، فإذا تم سحب مصباحان الواحد تلو الآخر من هذا الصندوق.

المطلوب : أحسب احتمال حدوث الأحداث التالية :

1- أن يكون المصباحان فاسدان ؟ 2- أن يكون المصباحان صالحان ؟ 3- أن يكون المصباح الأول صالح والثاني فاسد ؟

الحل :

طريقة السحب : سحب مصباحين واحد تلوى الآخر (على التوالي) معناه نستخدم طريقة حساب ترتيبة $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$

1- حساب إحتمال أن يكون المصباحين فاسدين: نسمي هذا الحدث بـ (A)

$$P(A)=\frac{A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{4x3}{10x9}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$$

2- حساب إحتمال أن يكون المصباحين صالحين: نسمي هذا الحدث بـ (B)

$$P(B)=\frac{A_6^2}{A_{10}^2}=\frac{6x5}{10x9}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$$

3- حساب إحتمال أن يكون المصباح الأول صالح والثاني فاسد: نسمي هذا الحدث بـ (C)

$$P(C)=\frac{A_6^1\text{ x }A_4^1}{A_{10}^2}=\frac{6x4}{10x9}=\frac{24}{90}=\frac{4}{15}$$

<u>التمرين 11</u> : إذا كانت بأحد المصانع ثلاث ورشات إنتاجية، حيث تنتج الورشة الأولى 40% من إنتاج المصنع، وتنتج الورشة الثانية 35% من إنتاج المصنع والباقي تنتجه الورشة الثالثة أي 25%.

- ما احتمال إنتاج وحدة معيبة (فاسدة) في المصنع ككل، علما بأن نسب الإنتاج المعيب في الورشات الثلاث هو على الترتيب: 5%، 3%، 2% ؟

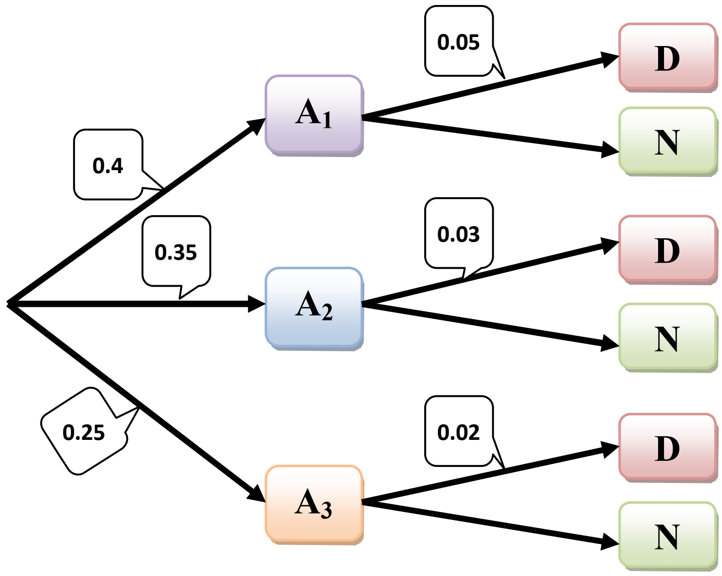
الحل:

نفرض أن D هو حدث إنتاج وحدة معيبة، و A_i حدث أن الإنتاج كان من قبل الورشة i وعليه فإن:

$P(A_1)=0,40 \quad P(A_2)=0,35 \quad P(A_3)=0,25$

وأن الحدث: (D/A_i) يعني الوحدة معيبة (فاسدة) علما أنها منتجة من قبل الورشة i وبذلك يكون:

$P(D/A_1)=0,05, P(D/A_2)=0,03, P(D/A_3)=0,02$



بتطبيق قاعدة الاحتمال الكلي:

$$P(D)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\times P(D/A_i)$$

$$P(D)=P(A_1)\times P(D/A_1)+P(A_2)\times P(D/A_2)+P(A_3)\times P(D/A_3)$$
$$=0,4\times 0,05+0,35\times 0,03+0,25\times 0,02=0,0355$$

وعليه نجد: $P(D)=0,0355$

التمرين 12 : وظفت أمينة مكتب (A_1) بمكتب للمحاسبة حيث تولت طبع 20 % من الفواتير. يشغل المكتب عاملتين أخريين إحداهما (A_2) تطبع 30% من الفواتير والأخرى (A_3) تقوم بطبع 50% من الفواتير. ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في 5% من الفواتير، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A_2) 2% ولدى الثالثة (A_3) 1%.

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء. استبعدت الأولى أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا 20% من الفواتير، وردت عليها العاملات الأخريات بأن نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر(5%).

1/ أحسب احتمال أن تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة وقارن مع احتمال أن يكون مصدر الخطأ هو الموظفتين A_2 أو A_3.

2/ أحسب مجموع الاحتمالات الثلاث.

3/ أحسب احتمال أن تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات، أن تكون بها أخطاء.

الحل:

من المعطيات لدينا: $P(A_1)=0.2$ ، $P(A_2)=0.3$ ، $P(A_3)=0.5$

$P(B/A_1)=0.05$ ، $P(B/A_2)=0.02$ ، $P(B/A_3)=0.01$

نفرض أن الحادث B هو حادث تحرير فاتورة بها أخطاء.

1/ حساب احتمال أن تكون:

- الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة:

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\times P(B/A_1)}{P(B)}=\frac{0.2\times 0.05}{(0.2\times 0.05)+(0.3\times 0.02)+(0.5\times 0.01)}=\frac{0.01}{0.021}=0.476$$

- الموظفة (A_2) هي التي حررت الفاتورة:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)\times P(B/A_2)}{P(B)}=\frac{0.3\times 0.02}{(0.2\times 0.05)+(0.3\times 0.02)+(0.5\times 0.01)}=\frac{0.006}{0.021}=0.286$$

- الموظفة (A_3) هي التي حررت الفاتورة:

$$P(A_3/B)=\frac{P(A_3)\times P(B/A_3)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0.01}{(0.2\times 0.05)+(0.3\times 0.02)+(0.5\times 0.01)}=\frac{0.005}{0.021}=0.238$$

يتبين من الحساب أن الاحتمال الأكبر هو 0.476 وعليه فإننا نرجح أن تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة.

2/ حساب مجموع الاحتمالات الثلاث:

$$P(A_1/B)+P(A_2/B)+P(A_3/B)=1$$

لأنها تمثل احتمالات الأحداث المتنافية الثلاث.

3/ احتمال وجود خطأ في مراسلة ما:

يتعلق الأمر هنا بالاحتمال الكلي: $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\times P(B/A_i)$

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)$$
$$P(B)=(0.2\times 0.05)+(0.3\times 0.02)+(0.5\times 0.01)=0.021$$

سلسلة تمارين خاصة بمحور : المتغيرات العشوائية

التمرين 01 : إذا كان المطلوب اختيار طالبين بطريقة عشوائية من بين 3 طلاب و 3 طالبات، وكان المتغير العشوائيX يمثل عدد الطلبة ذكور الذين سيتم اختيارهم.

- أوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي، ودالة توزيعه التراكمي.
- أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري لهذا المتغير.

الحل:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

X: متغير عشوائي يمثل عدد الطلبة ذكور الذين سيتم اختيارهم من بين 6 طلبة (3 طلاب و 3 طالبات).

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار طالبين من بين 6 طلبة (السحب في آن واحد) هو: $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!} = 15$ حالة، وعليه فإن فضاء العينة يتضمن15 نقطة ولكل عنصر نفس الفرصة في الظهور وذلك لأن المعاينة عشوائية ، وإن القيم الممكنة لهذا المتغير X هي: 0، 1، و 2 ، وعليه تكون الاحتمالات المقابلة لهذه القيم كما يلي:

- X = 0 هو الحادث A: حادث عدم اختيار أي طالب ذكر:

$$P(X=0) = P(A) = \frac{C_3^0 \times C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

- X = 1 هو الحادث B: حادث اختيار طالب واحد ذكر:

$$P(X=1) = P(B) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3\times3}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

- X = 2 هو الحادث C: حادث اختيار طالبين من الذكور:

$$P(X=2) = P(C) = \frac{C_3^2 \times C_3^0}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

وعليه فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X موضح في الجدول التالي:

X	0	1	2	$\sum$
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

- دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X :

يمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ كما يلي:

$$F(x_i)=P(X\le x_i)=\begin{cases}0 & X\langle 0\\ \frac{1}{5} & 0\le X\langle 1\\ \frac{4}{5} & 1\le X\langle 2\\ 1 & X\ge 2\end{cases}$$

- التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)$$
$$=0\times\left(\frac{1}{5}\right)+1\times\left(\frac{3}{5}\right)+2\times\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{3+2}{5}=1$$
$$E(X)=\mu=1$$

- التباين: $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ حيث: $E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2P(X=x_i)$

لدينا: $E(X)=\mu=1$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2P(X=x_i)=0^2\times P(X=0)+1^2\times P(X=1)+2^2\times P(X=2)$$
$$=0\times\left(\frac{1}{5}\right)+1\times\left(\frac{3}{5}\right)+4\times\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+4}{5}=\frac{7}{5}$$
$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\left(\frac{7}{5}\right)-(1)^2=\frac{7-5}{5}=\frac{2}{5}$$

الانحراف المعياري: $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.4}\approx 0,63$

التمرين 02 : ليكن لدينا وعاء يحتوي على 4 كرات خضراء و 6 كرات حمراء، نقوم بسحب 3 كرات على التوالي من هذا الوعاء، نعرف X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، ومثله بيانيًا.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ ومثلها بيانيًا.

الحل:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

X: متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء الممكن سحبها (سحب 3 كرات) من بين 4 كرات خضراء و 6 كرات حمراء حيث أن السحب على التوالي.

عدد الطرق التي يمكن بها سحب 3 كرات من بين 10 كرات حيث السحب على التوالي ، في هذه الحالة نكون بصدد ترتيبة وعليه عدد الطرق هو: $A_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!}=720$ حالة، وإن القيم الممكنة لهذا المتغير X هي: 0، 1، 2 و 3، وعليه تكون الاحتمالات المقابلة لهذه القيم كما يلي:

- X = 0 هو الحادث A: حادث عدم الحصول على أي كرة حمراء:

$$P(X=0)=P(A)=\frac{A_6^0\times A_4^3}{A_{10}^3}=\frac{24}{720}$$

- X=1 هو الحادث B: حادث الحصول على كرة حمراء واحدة:

لأن الترتيب مهم فهناك ثلاث حالات للحصول على كرة حمراء واحدة، إما أن تسحب الكرة الحمراء في السحب الأول أو الثاني أو الثالث لذلك قمنا بالضرب في القيمة 3.

$$P(X=1)=P(B)=3\times\left(\frac{A_6^1\times A_4^2}{A_{10}^3}\right)=\frac{3\times6\times12}{720}=\frac{216}{720}$$

- X=2 هو الحادث C: حادث الحصول على كرتين حمراوين:

لأن الترتيب مهم فهناك ثلاث حالات للحصول على كرتين حمراوين، إما الأولى والثانية أو الأولى والثالثة أو الثانية والثالثة لذلك قمنا بالضرب في القيمة 3.

$$P(X=2)=P(C)=3\times\left(\frac{A_6^2\times A_4^1}{A_{10}^3}\right)=\frac{3\times30\times4}{720}=\frac{360}{720}$$

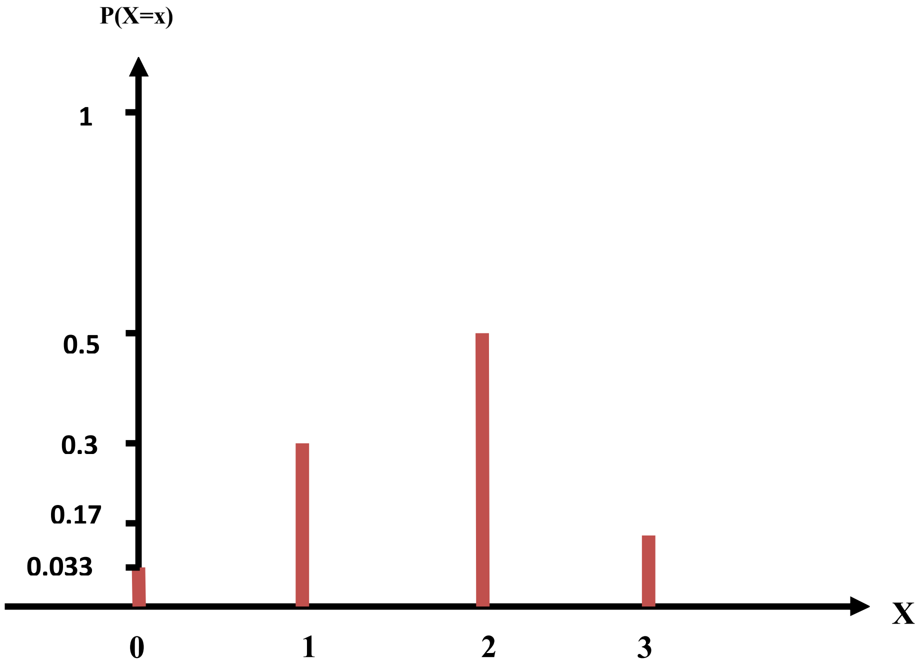
- X=3 هو الحادث D: حادث الحصول على ثلاث كرات حمراء:

$$P(X=3)=P(D)=\left(\frac{A_6^3\times A_4^0}{A_{10}^3}\right)=\frac{120}{720}$$

وعليه فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX موضح في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	$\sum$
$P(X=x)$	$\frac{24}{720}$	$\frac{216}{720}$	$\frac{360}{720}$	$\frac{120}{720}$	1

التمثيل البياني لدالة كتلة احتمال المتغير العشوائي X:

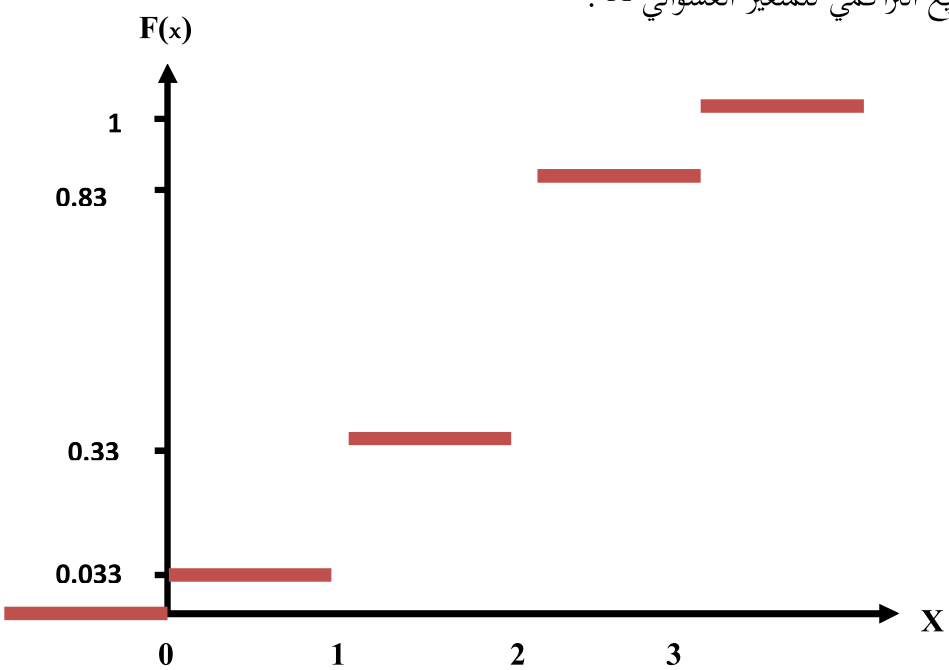


- دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X :

يمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \le x_i) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \dfrac{24}{720} & 0 \le X < 1 \\ \dfrac{240}{720} & 1 \le X < 2 \\ \dfrac{600}{720} & 2 \le X < 3 \\ 1 & X \ge 3 \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X :



التمرين 03 : ليكن المتغير العشوائي X المعرف بدالة تابع احتماله $F_X(x)$ كما يلي:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0.......... \quad ....si....x\langle -5 \\ 2/15 .... \quad si.... -5 \le x\langle -3 \\ 7/15 .... \quad si.... -3 \le x\langle 0 \\ 13/15 ...... \quad si.... 0 \le x\langle 2 \\ 1.......... \quad ..si.... x \ge 2 \end{cases}$$

1- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

2- أحسب الاحتمالات التالية: $P(-3\langle X \le 2)$ ، $P(X\langle 0)$ ، $P(X \ge -3)$.

الحل:

1- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

من دالة التوزيع التراكمي يمكن إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي أو دالة كتلة الاحتمال وذلك بإجراء الفروقات، حيث أن قيم المتغير العشوائي في هذا المثال هي: $X=-5,-3,0,2$

وعليه يكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

X	-5	-3	0	2	$\sum$
$P(X=x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	1

2- **أحسب الاحتمالات التالية:** $P(-3\langle X \le 2)$ ، $P(X\langle 0)$ ، $P(X \ge -3)$.

$$P(-3\langle X \le 2)= P(X=0)+P(X=2)=\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$$

$$P(X\langle 0)= P(X=-5)+P(X=-3)=\frac{2}{15}+\frac{1}{3}=\frac{7}{15}$$

$$P(X \ge -3)= P(X=-3)+P(X=0)+P(X=2)=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

التمرين 04 : لتكن الدالة التالية:

$$f_X(x)=\begin{cases} ke^{-3x} & si \quad x\rangle 0 \\ 0 & (o/w) \end{cases}$$

المطلوب:

1- أوجد قيمة k التي تجعل الدالة $f_X(x)$ تعمل كدالة كثافة احتمال، ثم أوجد: $P(0.5\langle X\langle 1)$.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ ثم تأكد من حساب $P(0.5\langle X\langle 1)$.

الحل:

1- قيمة k التي تجعل الدالة $f_X(x)$ تعمل كدالة كثافة احتمال:

حتى تكون الدالة $f_X(x)$ تعمل كدالة كثافة احتمال يجب تحقق الشرطان:

$$\begin{cases} \bullet \ f_X(x) \geq 0 \\ \bullet \ \int_R f_X(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

الشرط الأول: الملاحظ من البيانات أنه مهما تكن قيم X فإن: $f_X(x) \geq 0$ $\left(\forall x \in \Re; f_X(x) \geq 0\right)$. يبقى فقط التأكد من قيمة k .

الشرط الثاني: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} ke^{-3x}dx = 1$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} ke^{-3x}dx = 1 \Rightarrow k\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx = 1 \Rightarrow k \times \left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow k\left[0-\left(\frac{1}{-3}\right)\right] = 1 \Rightarrow \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3$$

وعليه فإن الدالة $f_X(x)$ هي دالة كثافة احتمال وتكتب كما يلي:

$$f_X(x)=\begin{cases} 3e^{-3x} & si \quad x\rangle 0 \\ 0 & (o/w) \end{cases}$$

- **حساب الاحتمال:**

$$P(0.5\langle X\langle 1) = \int\limits_{0.5}^{1} 3e^{-3x}dx = 3\int\limits_{0.5}^{1} e^{-3x}dx = 3\times\frac{1}{-3}e^{-3x}\Bigg|_{0.5}^{1} = -e^{-3x}\Big|_{0.5}^{1} = -e^{-3} + e^{-1.5} = 0.173$$

2- **دالة التوزيع التراكمي** $F_X(x)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$si..x\langle 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

$$si..x\rangle 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 3e^{-3t}\,dt$$

$$= \left|-e^{-3t}\right|_0^x = -e^{-3x} + 1 = 1 - e^{-3x}$$

وعليه نجد:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-3x} & si \quad x\rangle 0 \end{cases}$$

- **حساب الاحتمال:**

$$P(0.5\langle X \langle 1) = F_X(1) - F_X(0.5) = (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-1.5}) = 0.173$$

التمرين 05 : لتكن دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f(x) = \begin{cases} x & 0<x\leq 1 \\ 2-x & 1\leq x<2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

المطلوب : أوجد التوقع الرياضي و التباين ؟

الحـــل :

حساب التوقع الرياضي :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\,f(x)dx + \int_{0}^{1} x\,f(x)dx + \int_{1}^{2} x\,f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} x\,f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,(x)dx + \int_{0}^{1} x\,(x)dx + \int_{1}^{2} x\,(2-x)dx + \int_{2}^{+\infty} 0\,f(x)dx$$

$$E(x) = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 x\,(2-x)dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 + x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_1^2 = \frac{1}{3}$$

حساب التباين :

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2\, f(x)dx$$

$V(x) = \int_{-\infty}^{0}(x - E(x))^2\, f(x)dx + \int_{0}^{1}(x - E(x))^2\, f(x)dx + \int_{1}^{2}(x - E(x))^2\, f(x)dx + \int_{2}^{+\infty}(x - E(x))^2\, f(x)dx$

$V(x) = \int_{-\infty}^{0}(x - \frac{1}{3})^2\;\; 0\, dx + \int_{0}^{1}(x - \frac{1}{3})^2\, x\, dx + \int_{1}^{2}(x - \frac{1}{3})^2\, (2 - x)\, dx + \int_{2}^{+\infty}(x - \frac{1}{3})^2\, 0\, dx$

$V(x) = \int_{0}^{1}(x - \frac{1}{3})^2\, x\, dx + \int_{1}^{2}(x - \frac{1}{3})^2\, (2 - x)\, dx$

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\Big]_0^1 + \frac{-x^4}{4} + \frac{8}{6}x^3 - \frac{11}{18}x^2 + \frac{2}{9}x\Big]_1^2 = \frac{260}{36}$$