العلاقة بين متغيرين كميين (معامل الارتباط بيرسون)

1- معامل الارتباط:

يستخدم معامل الارتباط في الكشف عن العلاقة بين متغيرين عما إذا كانت علاقة موجبة أو سالبة، ويقصد بالعلاقة موجبة أي أن زيادة متغير س يؤدي إلى زيادة متغير ص وبالتالي فالعلاقة طردية، ويقصد بالعلاقة السلبية أن زيادة المتغير س يؤدي إلى نقصان المتغير ص وبالتالي فالعلاقة عكسية.

وتبرز أهمية معامل الارتباط في قياس السمات وفي قياس ثبات الاختبارات وفي قياس صدق الاختبارات، ومعامل الارتباط يخبرنا عن شيئين:

- مقدار قوة العلاقة بين متغيرين: أي إذا كانت القيمة المطلقة لمعامل الارتباط كبيرة جدا كانت العلاقة قوية، والعكس صحيح.
- اتجاه العلاقة: حيث اذا كان معامل الارتباط موجب كانت العلاقة بين المتغيرين طردية، والعكس صحيح.

2- تفسير قيمة معامل الارتباط:

قام عدد من المختصين في مجال الإحصاء بوضع معايير نسبية يمكن أن تستخدم في تفسير قيم معاملات الارتباط، كما هو موضح في الجدول التالي:

قيمة معامل الارتباط	التفسير
1+	علاقة طردية تامة
من 0.7 إلى أقل من 1+	ارتباط طردي قوي
من 0.4 إلى أقل من 0.7	ارتباط طردي متوسط
من صفر إلى أقل من 0.4	ارتباط طردي ضعيف
صفر	لا توجد علاقة
من صفر إلى أقل من -0.4	ارتباط عكسي ضعيف
من -0.4 إلى أقل من -0.7	ارتباط عكسي متوسط
من -0.7 إلى أقل من -1	ارتباط عكسي قوي
1-	علاقة عكسية تامة

الجدول (..): معايير تفسير قيم معاملات الارتباط

كما أنه يمكن مقارنة قيمة معامل الارتباط المحسوبة بالقيمة الجدولية لمعرفة هل توجد علاقة أو لا وتستخدم كثيرا عند حساب ثبات الاختبار.

3- أشكال الانتشار وعلاقتها بالارتباط:

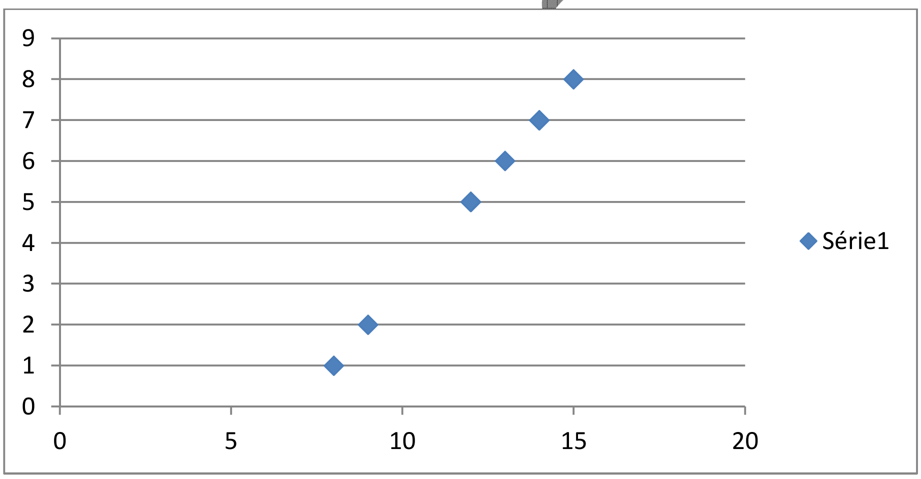
الانتشار: هو التمثيل البياني للعلاقة بين متغيرين ويكون ذلك برصد نقاط المتغيرين على المحورين الأفقي والعمودي.

ولتوضيح ذلك نسرد المثال التالي:

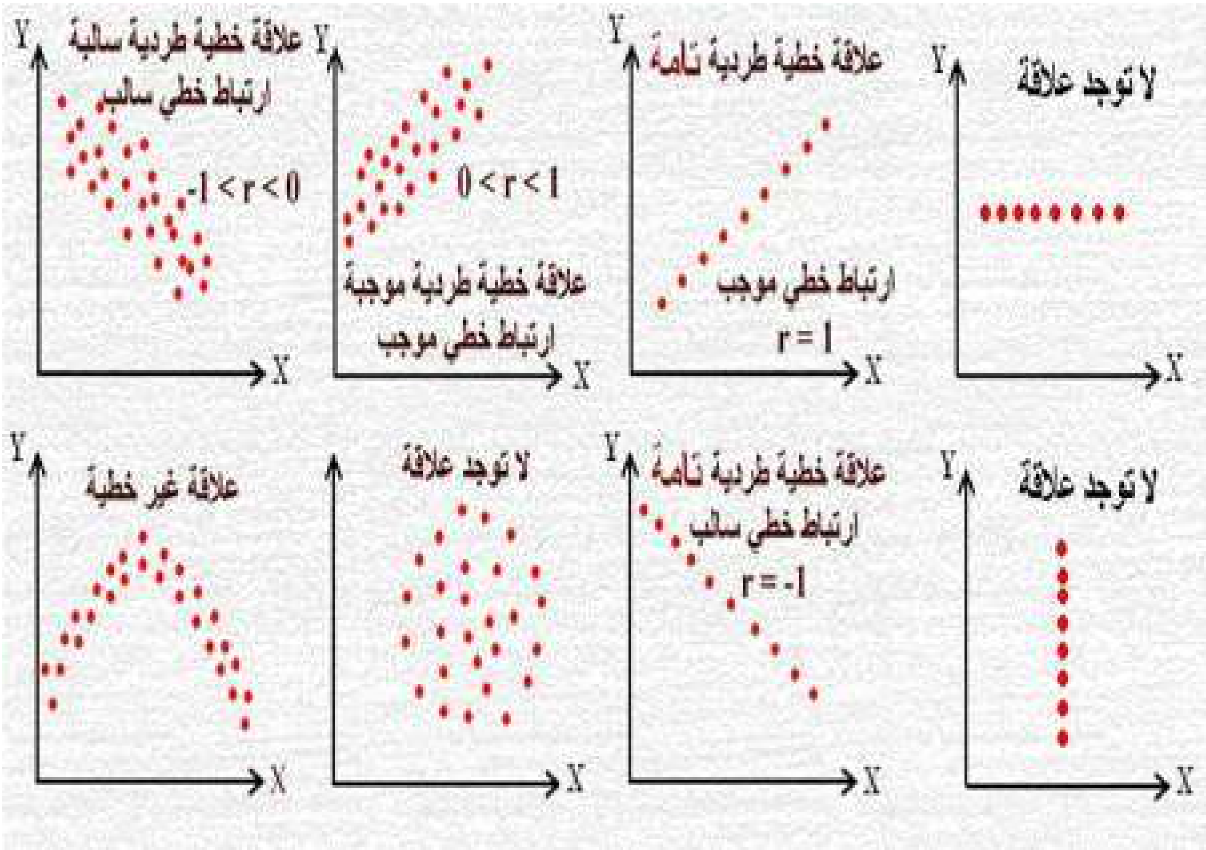
الجدول التالي يمثل علامات 10 طلاب في مقياسي المنهجية والإحصاء حيث س تمثل المنهجية و ص تمثل الإحصاء.

س	15	13	14	12	8	12	12	9	14	12
ص	8	7	8	8	7	10	12	11	9	9

يكون شكل الانتشار كالآتي:



ومن خلال شكل الانتشار يمكن معرفة هل توجد علاقة ايجابية أو سلبية بين المتغيرين ضعيفة أو قوية، أو لا توجد علاقة، كما هو موضح في الشكل التالي:



الشكل (04): نوع العلاقة انطلاقا من شكل الانتشار

4- معامل الارتباط بيرسون وشروط استخدامه:

يعتبر هذا المعامل من أكثر معاملات الارتباط شيوعا واستعمالا عندما يكون كلا المتغيرين من النوع المتصل، ويتطلب استعماله تحقق ما يلي:

- يقتضي أن تكون العلاقة بين المتغيرين خطية ويمكن معرفة ذلك من خلال شكل الانتشار حيث تميل النقط لأن تقع على خط مستقيم أو تنتشر حوله، وإذا كانت النقاط تقع على خط منحني كما هو موضح في الشكل السابق فالعلاقة بين س وص ليست خطية وبالتالي نستخدم معامل آخر ملائم لهذا الوضع يسمى معامل ايتا.
- أن يتوزع المتغيرين س وص في المجتمع الأصلي توزيعا معتدلا، وبالتالي لا يكون إلتواء أحد المتغيرين ذا دلالة إحصائية.

5- طرق حساب معامل الارتباط بيرسون:

هناك طريقتين لحساب معامل الارتباط بيرسون وهي:

5-1 طريقة الانحرافات: وتتم باستخدام المعادلة التالية:

$$R = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2 \times \sum(Y - \bar{Y})^2}}$$

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \text{مجـ } (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^{٢}}}$$

يفضل استخدام هذه المعادلة عندما يكون المتوسطين الحسابين للمتغيرين س و ص في شكل أعداد صحيحة.

5-2 الطريقة المباشرة:

$$R = \frac{[N(\sum XY)] - [\sum X \times \sum Y]}{\sqrt{[N(\sum X^2) - (\sum X)^2] \times [N(\sum Y^2) - (\sum Y)^2]}}$$

$$\text{ر}_{\text{س ص}} = \frac{\text{ن } (\text{مجـ س ص}) - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{\text{ن } (\text{مجـ س}^{٢}) - (\text{مجـ س})^{٢} \times \text{ن } (\text{مجـ ص}^{٢}) - (\text{مجـ ص})^{٢}}} \quad \text{معادلة (٣)}$$

6- الدلالة الإحصائية لمعامل الارتباط بيرسون:

تعرفنا سابقا تفسير قيمة معامل الارتباط متى تكون قوية وضعيفة وطردية تماما إلى آخره، لكن في كثير من الأحيان يريد الباحث أن يتعرف فيما إذا كان معامل الارتباط الذي تحصل عليه ذو دلالة إحصائيية أم لا، أو بمعنى آخر هل هذه العلاقة موجودة بين المتغيرين في المجتمع الذي أخذت منه هذه العينة أم لا، كما أن الباحث في بعض الأحيان يحصل على قيم معامل الارتباط مثل 0.53 أو 0.42 وبالتالي لا يعرف هل هي دالة احصائيا أم لا، ولذلك وجب عليه اتباع الطريقة التالية:

- نستخرج درجة الحرية (ن-2)
- نحدد مستوى الدلالة وغالبا ما تكون 0.05 في البحوث التربوية والنفسية.
- ثم نقارن معامل الارتباط المحسوب بالقيمة الجدولية.
- اذا كانت ر المحسوبة أكبر من الجدولية فهناك دلالة احصائية وان كانت اصغر فلا توجد دلالة.

ddl	□ = 0.05	□ = 0.01	ddl	□ = 0.05	□ = 0.01
1	0.997	1.0000	52	0.268	0.348
2	0.950	0.990	54	0.263	0.341
3	0.878	0.959	56	0.259	0.336
4	0.811	0.917	58	0.254	0.330
5	0.755	0.875	60	0.250	0.325
6	0.707	0.834	62	0.246	0.320
7	0.666	0.798	64	0.242	0.315
8	0.632	0.765	66	0.239	0.310
9	0.602	0.735	68	0.235	0.306
10	0.576	0.708	70	0.232	0.302
11	0.553	0.684	72	0.229	0.298
12	0.532	0.661	74	0.226	0.294
13	0.514	0.641	76	0.223	0.290
14	0.497	0.623	78	0.220	0.286
15	0.482	0.606	80	0.217	0.283
16	0.468	0.590	82	0.215	0.280
17	0.456	0.575	84	0.212	0.276
18	0.444	0.561	86	0.210	0.273
19	0.433	0.549	88	0.207	0.270
20	0.423	0.537	90	0.205	0.267
21	0.413	0.526	92	0.203	0.264
22	0.404	0.515	94	0.201	0.262
23	0.396	0.506	96	0.199	0.259
24	0.388	0.496	98	0.197	0.256
25	0.381	0.487	100	0.195	0.254
26	0.374	0.479	105	0.190	0.248
27	0.367	0.471	110	0.186	0.242
28	0.361	0.463	115	0.182	0.237
29	0.355	0.456	120	0.178	0.232
30	0.349	0.449	125	0.174	0.228
			130	0.171	0.223
31	0.344	0.442	135	0.168	0.219
32	0.339	0.436	140	0.165	0.215
33	0.334	0.430	145	0.162	0.212
34	0.329	0.424	150	0.159	0.208
35	0.325	0.418			
			160	0.154	0.202
36	0.320	0.413	170	0.150	0.196
37	0.316	0.408	180	0.145	0.190
38	0.312	0.403	190	0.142	0.185
39	0.308	0.398	200	0.138	0.181
40	0.304	0.393			
			250	0.124	0.162
41	0.301	0.389	300	0.113	0.148
42	0.297	0.384	350	0.105	0.137
43	0.294	0.380	400	0.098	0.128
44	0.291	0.376	450	0.092	0.121
45	0.288	0.372	500	0.088	0.115
46	0.285	0.368	600	0.080	0.105
47	0.282	0.365	700	0.074	0.097
48	0.279	0.361	800	0.069	0.091
49	0.276	0.358	900	0.065	0.086
50	0.273	0.354	1000	0.062	0.081

الجدول (..): القيم الجدولية لمعامل الارتباط بيرسون

7- أنشطة تعلمية:

7-1 التمرين الأول:

طبق اختبار الانبطاح المائل ثني الذراعين (X)، واختبار هارفاد للخطوة (Y) (ف تنطق v) على عينة تتكون من 15 طالب جامعي، حيث كانت درجات الطلاب كما يلي:

36	16	18	20	25	33	10	26	25	24	17	16	13	23	28	X
91	83	73	60	73	91	59	65	70	72	80	63	57	74	84	Y

المطلوب:

1- حساب معامل الارتباط بين درجات الأداء في الاختبار س ودرجات مؤشر اللياقة البدنية ص باستخدام معامل الارتباط بيرسون (طريقة الانحرافات)؟

2- ما نوع العلاقة بين المتغيرين عند مستوى دلالة 0.05؟

الحل:

1- لدينا:

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{330}{15} = 22 \qquad \bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{1095}{15} = 73$$

نقوم بعمل جدول إحصائي من 15 سطر حسب عينة الطلبة و8 أعمدة حسب القانون الإحصائي كما هو موضح في الجدول التالي:

الطلاب	X	Y	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$X - \bar{X}^2$	$Y - \bar{Y}^2$	$(X - \bar{X}) \times (Y - \bar{Y})$
1	28	84	6	11	36	121	66
2	23	74	1	1	1	1	1
3	13	57	9-	16-	81	256	144
4	16	63	6-	10-	36	100	60
5	17	80	5-	7	25	49	35-
6	24	72	2	1-	4	1	2-
7	25	70	3	3-	9	9	9-
8	26	65	4	8-	16	64	32-
9	10	59	12-	14-	144	196	168
10	33	91	11	18	121	324	198
11	25	73	3	0	9	0	0
12	20	60	2-	13-	4	169	26
13	18	73	4-	0	16	0	0
14	16	83	6-	10	36	100	60-
15	36	91	14	18	196	121	252
المجموع	330	1095	0	0	734	1714	777

بالتعويض في القانون نجد:

$$R = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2 \times \sum(Y - \bar{Y})^2}} = \frac{777}{\sqrt{734 \times 1714}}$$

$$= 0.69$$

2- نوع الارتباط هو ارتباط طردي متوسط، لكن المطلوب من السؤال هو تحديد نوع العلاقة عند مستوى دلالة 0.05، لذلك نقوم بالاجراءات التالية:

- مستوى الدلالة 0.05
- درجة الحرية = ن – 2 = 15 – 2 = 13
- استخراج قيمة ر الجدولية وهي القيمة التي تتقاطع فيها درجة الحرية مع مستوى الدلالة

ddl	□ = 0.05	□ = 0.01
1	0.997	1.0000
2	0.950	0.990
3	0.878	0.959
4	0.811	0.917
5	0.755	0.875
6	0.707	0.834
7	0.666	0.798
8	0.632	0.765
9	0.602	0.735
10	0.576	0.708
11	0.553	0.684
12	0.532	0.661
13	$\boxed{0.514}$	0.641
14	0.497	0.623
15	0.482	0.606

إذن قيمة معامل الارتباط الجدولية تساوي 0.514

نلاحظ أن ر المحسوبة أكبر من ر الجدولية أي ($0.69 > 0.514$) مما يدل على وجود علاقة طردية ذات دلالة إحصائية بين درجات الأداء في الاختبار ومؤشر اللياقة البدنية عند مستوى دلالة 0.05

7-2 التمرين الثاني:

أحسب معامل الارتباط بالطريقة المباشرة لنفس المعطيات السابقة؟

الحل:

لدينا:

$$\boldsymbol{R} = \frac{[\boldsymbol{N}(\sum \boldsymbol{XY})] - [\sum \boldsymbol{X} \times \sum \boldsymbol{Y}]}{\sqrt{\left[\boldsymbol{N}(\sum \boldsymbol{X}^2) - (\sum \boldsymbol{X})^2\right] \times \left[\boldsymbol{N}(\sum \boldsymbol{Y}^2) - (\sum \boldsymbol{Y})^2\right]}}$$

لحساب معامل الارتباط بيرسون نكون الجدول الآتي:

الطلاب	X	Y	XY	X^2	Y^2
1	28	84	2352	784	7056
2	23	74	1702	529	5476
3	13	57	741	169	3249
4	16	63	1008	256	3969
5	17	80	1360	289	6400
6	24	72	1728	576	5184
7	25	70	1750	625	4900
8	26	65	1690	676	4225
9	10	59	590	100	3481
10	33	91	3003	1089	8281
11	25	73	1825	625	5325
12	20	60	1200	400	3600
13	18	73	1314	324	5329
14	16	83	1328	256	6889
15	36	91	3276	1296	8281
المجموع	330	1095	24867	7994	81649

نعوض في القانون:

$$\boldsymbol{R} = \frac{[\boldsymbol{N}(\sum \boldsymbol{XY})] - [\sum \boldsymbol{X} \times \sum \boldsymbol{Y}]}{\sqrt{[\boldsymbol{N}(\sum \boldsymbol{X}^2) - (\sum \boldsymbol{X})^2] \times [\boldsymbol{N}(\sum \boldsymbol{Y}^2) - (\sum \boldsymbol{Y})^2]}}$$

$$= \frac{(15 \times 24867)\ -\ (330 \times 1095)}{\sqrt{[(15 \times 7994) -\ (330)^2] \times [(15 \times 81649) - (1095)^2]}}$$

$$= \frac{11655}{\sqrt{11010 \times 25710}} = 0.69$$