**المحاضرة رقم4**

**:عيوب الهندسة الإقليدية وظهور الهندسات الأنساق المعاصرة**

لقد ظلت الهندسة الإقليدية نموذجا للرياضيات الدقيقة واليقينية لما يربو عن ألفي عام، نظرا لاعتمادها على منهج منطقي صارم تلزم فيه النظريات والنتائج لزوما مباشرا عن مبادئ حقيقية للواقع الخارجي.

وكان الرياضيون يعترفون بهذه السمات والخصائص بدرجات متفاوتة، محاولين بذلك البرهنة على نظرياتهم الهندسية بما هو في النسق الإقليدي، وتحليل العلاقات التي تسري بينها دون أدنى مناقشة فلسفية لمبادئ هذه الهندسة وأسسها.ولكن مع تطور الأبحاث والدراسات الهندسية والرياضية، وما أحدثته مسلمة التوازي من شكوك وسط الرياضيين، انتقل هؤلاء من مرحلة تقرير نظرياتهم إلى مرحلة النقد والمناقشة لمبادئ النسق الأقليدي وقوانينه، مكتشفين بذلك أوجه النقص فيها، فلقد تعرضت مسلماته إلى نقد وتشكيك من طرف اليونانيين أنفسهم وذلك لتضمنها وانطوائها على غموض، ولأن بعضها في نظرهم من الممكن أن تشتق من غيرها.

كما انتقد كذلك المنهج الأقليدي آنذاك على كونه يفترض قضايا هندسية لم تكن موضوعة بين البديهيات أوالمسلمات، وبالتالي لم تتم البرهنة على أنها مشتقة من غيرها.وتطورت هذه الانتقادات بتطور الأزمنة والعصور، وبتطور الأبحاث الابستمولوجية المعاصرة والتي أسقطت ثوب النموذج والمثال عن هذه الهندسة انطلاقا من المناقشة الفلسفية لمبادئها، وهو ما قصده بلانشيه حين قال:" ظهر أكثر فأكثر أن الهندسة الإقليدية إذا بقيت دهرا طويلا أكمل الأمثلة التي يمكن أن تقدم على النظرية الإستنتاجية، فإن الجهاز المنطقي الذي كان يدعمها لم يكن خاليا من العيوب "[[1]](#footnote-2)(1)،وتم استخراج هذه العيوب بدءا من المنطلقات التي ينطلق منها هذا النسق كالتالي:

**أ-البديهيات:**

فبالنسبة للبديهيات الإقليدية فإن " إقليدس نفسه واضع النسق الاستنباطي لم يفصل فصلا جذريا بين المسلمة والبديهية، لدرجة أن بعض البديهيات قد نقلت وأدرجت تحت المسلمات، وبعض المسلمات وضعت تحت البديهيات في الطبقات المختلفة بكتاب الأصول "[[2]](#footnote-3)(2)، أي أن هناك استعمالا مختلطا للبديهيات تارة والمسلمات تارة أخرى، بل إن تقسيم هذه المبادئ وتوثقيها في النسق الأقليدي كان موضع شك، وانتقاد كونه لا يتضمن أي مبررات منطقية أو عقلية.

فنحن نؤمن بصدق بالبديهية في نظر إقليدس وأتباعه نظرا لشدة وضوحها، وبالتالي فنحن نعجز عن الاهتداء إلى قضايا أوضح منها لنبرهن بها عليها فهي قضايا غير محتاجة إلى برهان ولا تقبله ولذلك تسمى باللامبرهنات، ومن هنا اتصفت هذه الأخيرة بأنها عامة من جهة كونها تستخدم في كافة العلوم التي تدرس فيها الأطوال والمقادير، وهي ضرورية كونها تعتبر علاقات ضرورية بين مقادير معينة مثل قولنا: " الشيئان المساويان لشيء ثالث متساويان "، وتتصف بأنها تحليلية كون محمولها متضمن بالضرورة في موضوعها وبالتالي فإنه من " الخلف إنكارها "، وبالتالي فهي مبدأ صوري يسعى إلى تنظيم خطوات الاستدلال دون أن تضيف أي شيء إلى مادة هذا الاستدلال أو مضمونه.

ولعل عدم الفصل التام بين المسلمات والبديهيات يرجع إلى كون إقليدس يعتمد في تمييزه بينهما على الحدس والوضوح الذاتي فهو " يؤمن بصدق البديهية بناء على حدسه لها "[[3]](#footnote-4)وهو طبق هذا المعيار – الوضوح الذاتي – على مسلماته أيضا فهي في نظره واضحة على أنها " افتراضات آنية وليست صادقة صدقا مباشرا و – بالتالي – كان الحدس وما يتسم به من وضوح مصدر المسلمات والبديهيات على حد سواء ولهذا صعب على إقليدس الفصل الجذري بينهما "[[4]](#footnote-5)، حتى أن معيار الوضوح الذاتي نفسه يتصف بصفة الخداع كونه ذاتيا يختلف من إنسان لآخر، وكل حسب مزاجه الذهني وقدراته العقلية.

**ب-المسلمات أو المصادرات:**

لقد اعتمد إقليدس في جهازه المنطقي بالإضافة إلى البديهيات على المسلمات التي هي أقل وضوحا من الأولى، مؤكدا هو ومن تبعه على أن هذه المسلمات " حقائق كلية وضرورية عن المكان الفيزيقي، ولهذا فهي صادرة عن المادة، وقد سبب لها أصلها التجريبي الماضي غموضا وتعقيدا "[[5]](#footnote-6)(1).

وبالتالي فنحن نسلم بصدقها نظرا لتطابقها مع الواقع الخارجي، دون أن نبرهن عليها، ولعل هذا المصدر التجريبي هو ما جعل العلماء لم يشكوا في مصادرات إقليدس خلال عدة قرون كون أن " التجربة ذاتها كانت تعطي المشروعية لهذه الواقعية "[[6]](#footnote-7)(2)، إلا أن هذا اليقين لم يمنع بعض شراح إقليدس من القلق حول طبيعة هذه المصادرات وتداخلها من جهة ثانية، خاصة المصادرات الثلاثة الأولى والتي توصف بأنها إجرائية الطابع ومن ثمة فهي لا تغدو أن تكون أداة للقيام بإنشاءات هندسية لا غير.

**د- البرهنة والتعريف:**

من خلال ما سبق نقده بالنسبة للتعريفات والبديهيات، كان من المفروض أن نضع في نقطة انطلاق أي نظرية استنتاجية مجموعة من القضايا غير المبرهنة – أو اللامبرهنات – بالإضافة إلى مجموعة من اللامعرفات يتم فيما بعد البرهنة على نظريات وقضايا جديدة من خلالها، وبالتالي فإن البرهنة والتعريف هما العمليتان الأساسيتان اللتان تتطور بواسطتهما النظرية الاستنتاجية .

لكننا إذا بحثنا في الشروط الضرورية لإقامة التعاريف الجيدة والمبرهنة الجيدة، لابد وأن نلحظ قصر الهندسة الإقليدية عن بلوغ الدقة للوصول إلى ذلك وهذا راجع إلى دعوى الجمع بين الصدق المادي في القضايا والصحة الصورية في ترابطها وبين المطابقة التجريبية والدقة المنطقية،ولعل هذه الازدواجية هي السمة الأساسية الغالبة على هذا النسق الهندسي، وبالتالي فإنه – النسق – يجمع ويدمج عملين منفصلين تماما، علم المنطق، وعلم التجريب " فيمكنك أن تقرأ كتابا في الهندسة التقليدية بصفته بناءا مصادراتيا خالصا تفقد فيه حدوده معناها الحدسي وتقاس صحته بتماسكه المنطقي فقط أو على العكس من ذلك، أن يعيده لحدوده وقضاياه ولدلالتها الحدسية الأولى، لكن عند ذلك نكون أمام علم من علوم الواقع: بديهياته وبرهناته هي في الواقع قوانين فيزيائية "[[7]](#footnote-8)(1).

إلا أن هذه العيوب والانتقادات يجب أن لا تغفلنا عن قيمة الهندسة الإقليدية والاستدلال الهندسي والذي اعتبره باسكال (Pascal) نموذجا لفن الإقناع، دون أن نعتبرها من الوظائف الجوهرية له" فإقليدس يرجع إليه الفضل في كونه أول من طبق نسقا منطقيا على النظريات الهندسية التي كانت مبعثرة آنذاك وأكسبها صفة العلم، فكان له ذلك، وهو ما يقصده أغلب الرياضيين المعاصرين اليوم وإن كانت الوجهة تختلف.

**ثانيا:ظهور الأنساق اللإقليدية:**

ولعل محاولة الرياضي الروسي نيكولا لوباتشفسكي (N.Lobachevsky1743-1856م)، تعتبر أول عمل مطبوع ومؤسس في الهندسة اللاإقليدية، إذا أراد إثبات البرهان على المسلمة بواسطة البرهان بالخلف، فافترض أنه من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم موازيين أو أكثر، وراح يستنتج ويبرهن، إلا أنه لم يصل إلى إثبات المسلمة الإقليدية بل توصل إلى نتائج مخالفة مثل أن مجموع زوايا المثلث أقل من 180°، وهذه النتائج المخالفة لا تؤدي إلى بطلان فرض الانطلاق ولا إلى تأكيد صحة المسلمة بل أنه بقي فقط -كما يقول الجابري-: " أن هناك مقدمات مختلفة أدت إلى نتائج مختلفة، وهو شيء طبيعي "[[8]](#footnote-9)(1)، إذ لم يحدث هناك أي تناقض داخلي في نظام لوباتشفسكي الجديد، ومن ثمة فإن مسلمة إقليدس هي مسلمة مستقلة تماما عن باقي المسلمات الأخرى، لأن إنكارها لم يحدث أي تناقض، عكس ما افترضه إقليدس ومن ثمة " فإن أي نظام يشيد على عكسها يمتلك نفس المقدار من المشروعية الذي يمتلكه النظام المشيد عليها هي نفسها... مما يجعل هندسة لوباتشفسكي تقف الند للند وهكذا وجدت نفسها أمام هندسات متعددة لا أمام هندسة واحدة "[[9]](#footnote-10)(2).

ثم سرعان ما ظهر نسق هندسي آخر على يد الألماني ريمان (Riemann1826-1866م)، فهذا الأخير تجاوز المسلمة الإقليدية واتخذ منطلقه مسلمة أخرى مخالفة لها تماما فافترض أنه من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم أي مواز له وبالتالي فإن أي مستقيمين لابد أن يتقاطعا، وانطلاقا من هذا الفرض توصل ريمان إلى نتائج جديدة منها أن زوايا المثلث تساوي أكثر من 180°. ومما يجدر ذكره أن هذا النسق قد أقيم على تصور للمكان مناقض تماما لتصور إقليدس، فمكان ريمان مكان محدب، ومكان لوباتشفسكي هو مكان مقعر بينما مكان إقليدس فإن المكان مسطح ذو 3 أبعاد، وتوصل النسق الريماني بدوره إلى تأكيد صفة استقلال المسلمة الإقليدية عن باقي المسلمات تماما، وفكرة الاستقلال هذه هي من فتحت الباب واسعا لاستبدال هذه المسلمة بفروض أخرى إما أن تكون مختلفة عنها (مثل فرض لوباتشفسكي) أو مناقضة ونافية لها تماما (كما هو الشأن لفرض ريمان)، وبتعدد الفروض البديلة لها نقف أمام تعدد للأنساق الهندسية وهو تغيير جوهري في أسس الهندسة " غير مسبوق، ملئ باحتمالات أخرى للتغيير، ذلك لأنه نشأ سؤال جديد وهو هل يمكن إحداث تغيرات أخرى في أسس الهندسة بحيث تنشأ مزيد من الهندسات المنتظمة القضايا؟"[[10]](#footnote-11)(1).

**ثالثا:التأثير الابستمولوجي لظهور الأنساق اللا إقليدية:**

وانطلاقا من هذا التصور انقلبت المفاهيم الهندسية، فلم تعد الحقيقة الهندسية تعني المطابقة مع العالم الواقعي، بل انحصرت فقط في فكرة عدم التناقض بين قضايا النسق الهندسي الواحد، كون هذه الأخيرة تقوم على افتراضات لا علاقة لها بالواقع، وهذا التحول في فكرة الحقيقة الهندسية خصوصا والرياضية على العموم بل وحتى العلمية جعل أحد الرياضيين يعتبر عن هذا بقوله: " توجد في الهندسة حقيقة باطنة Vérité interne وحقيقة خارجةexterne، والحقيقة الباطنة هي أن كل هندسة تؤلف نسقا مقفلا على نفسه منسجم القضايا ولا تناقض بينها بحيث لا تتساءل حينئذ عن إمكان تطبيقها على الظواهر الخارجية [...]، ولكن إذا كان لابد أن نتساءل عن هذا السؤال الأخير فحينئذ تنشأ مسألة الحقيقة الخارجية التي يصح أن تضاف إلى هندسة ما، وتلك مسألة غير رياضية، وتتجاوز حدود الرياضة "[[11]](#footnote-12)(1).

ولقد عبر روبير بلانشيه عن هذا التطور والتحول الجذري في الهندسة خصوصا والرياضيات على وجه العموم قائلا:إن التأثير الابستمولوجي لهذه النظريات الجديدة([[12]](#footnote-13)\*) تأثير كبير، فهي على وجه الخصوص قد ساهمت في تغيير موقع مركز الاهتمام في الهندسة النظرية، وذلك بنقله من المحتوى إلى البنية، وعن الصدق الخارجي في القضايا المنعزلة إلى الاتساق الداخلي للنسق كله [...] وعندئذ نرى انفصال وجهي الحقيقة الهندسية الدين بقيا حتى الآن مختلطين في اتحاد يثير الدهشة "[[13]](#footnote-14)(4)، وبالتالي فإن نمو الهندسة كان أحد الأسباب الرئيسية لتغير موضوع الرياضيات من دراسة الكائن الرياضي الذي يطابق الواقع إلى دراسة البينة وخصائصها وعلاقاتها المنطقية دون ربطها بالواقع، ومن هنا لم تعد الرياضيات، والهندسة على وجه الخصوص تجمع بين الحدس والعقل في موضوع واحد. وبتغير الموضوع تغير المنهج وأصبح عبارة عن مجموعة من الإجراءات والتحويلات التي تجري على تلك البنيات، كما سقطت صفة البداهة واليقين المطلق عن مبادئ النسق الاستنباطي،فلم تعد سوى مجموعة من الفروض التي يختارها الرياضي في نسقه ولهذا اعتبرها البعض مجرد مواضعات أو قضايا متفق عليها،وهنا ظهرت فكرة الملاءمة وأصبحنا نتحدث عن أي الهندسات أكثر ملاءمة،وهذا ما جعل الهندسة الإقليدية -في نظر بوانكاريه- أكثر ملاءمة لنا لأنها أكثر بساطة من جهة ولأنها من جهة ثانية تنطبق على خصائص الأجسام الصلبة الطبيعية.

فما بلغته الرياضيات من صورية تامة في مفاهيمها ومنهجها وابتعادها عن الواقع وحتى عن اللغة العادية واستبدالها باللغة الرمزية، جعل المناطقة يسعون إلى إقامة منطق جديد يتوافق مع هذه الرياضة، محاولين بذلك اصطناع منهج أشبه دقة بالمنهج الرياضي، ويجعل – المنطق الجديد – العلماء يتمكنون من حل كثير من المشكلات الرياضية، خاصة بعد ظهور الهندسات اللاأقليدية وهو ما عبر عنه دافيد هلبرت (D.Hilbert) (1862-1943)[[14]](#footnote-15)(\*) في كتابه أسس المنطق الرياضي قائلا: " أن هناك باعثا قويا أدى إلى تطور المنطق الجديد، وكان ذلك الباعث ناتجا عن حاجة الرياضيات إلى أساس دقيق يقوم عليه، وإلى طريقة دقيقة منهجية تبحث فيها وتجلى ذلك في كتاب " سجل الصيغ الرياضية " الذي أخرجه بيانو ومعاونوه ابتداء 1884 والذي أوضحوا فيه ضرورة التعبير عن جميع المبادئ الرياضية في عبارات خاصة بالحساب المنطقي "[[15]](#footnote-16)(1).

* **نتائج المحاضرة**

-انطواء العرض الأقليدي ومبادئه على بعض النقائص والعيوب أدى إلى قيام هندسات لاإقليدية مخالفة في مبادئها ونتائجها للهندسة الإقليدية.

- تجاوز جملة البديهيات الإقليدية المستوحاة من الواقع المادي وتعويضها بجملة من الفروض أو المواصفات المختارة

- قيام أنساق هندسية متعددة مشتقة منطقيا، تقوم على الصدق الصوري بين المسلمات والابتعاد تماما عن الواقع والمكان كونها تقوم على الفروض التي ينشؤها العقل لا الواقع.

- نسبية الحقيقة الهندسية والرياضية عموما، كونها تقوم على مبدأ عدم التناقض بين مسلمات كل هندسة، فهي تختلف من نسق إلى آخر.

- الهندسات اللاإقليدية قد فرقت بين الشكل أي الصورة المنطقية والمضمون الواقعي، فتفرعت الهندسة إلى هندسة رياضية بحتة وهندسة فيزيائية.

- قيام حركة تأسيس المسلمات لضبط شروط النسق الاستنتاجي الفرضي.

- انتقال العرض المصادرياتي القائم على صورية المسلمات إلى مجال المنطق الأرسطي، فظهر المنطق الرياضي وتعددت الأنساق المنطقية.

- تحوّل منهج الرياضيات خصوصا والعلوم الصورية بصفة عامة من المنهج اليقيني الاستنباطي إلى المنهج الفرضي الاستنتاجي وظهور الأكسيوماتيك .

1. [↑](#footnote-ref-2)
2. [↑](#footnote-ref-3)
3. [↑](#footnote-ref-4)
4. [↑](#footnote-ref-5)
5. [↑](#footnote-ref-6)
6. [↑](#footnote-ref-7)
7. [↑](#footnote-ref-8)
8. . [↑](#footnote-ref-9)
9. [↑](#footnote-ref-10)
10. [↑](#footnote-ref-11)
11. 1) المرجع نفسه ، ص 63. [↑](#footnote-ref-12)
12. (\*)يقصد الهندسات اللاإقليدية. [↑](#footnote-ref-13)
13. (4) روبير بلانشيه: الأكسيوماتيك، مصدر سابق ، ص 111. [↑](#footnote-ref-14)
14. (\*) دافيد هلبرت: عالم رياضة ومنطق ألماني أول من صاغ الهندسة الإقليدية صياغة أكسيومية من مؤلفاته أسس الهندسة 1899. [↑](#footnote-ref-15)
15. (1) انظر المرجع السابق، ص ص88-89. [↑](#footnote-ref-16)