مقاييس الالتواء

تعد مقاييس الالتواء إحدى مقاييس الشكل التي تدرس شكل المنحنى التكراري .

الالتواء والتماثل .

1تعريف :

"يكون التوزيع التكراري ملتويا نحو اليمين أو موجب الالتواء ،إذاكان ممتدا أكثر نحو اليمين ، أما إذاكان له طرف ممتد أكثر نحو اليسار ،فيقال إنه سالب الالتواء أو ملتو نحو اليسار .

عندما يكون التوزيع ملتويا نحو اليمين فإن القيم المتطرفة نحو اليمين تؤثر على الوسط الحسابي وتسحبه نحو اليمين وبذلك يكون الوسط الحسابي أكبر من الوسيطأما إذاكان التوزيع ملتويا نحو اليسار فإن الوسط الحسابي يكون أصغر من الوسيط[1]

فشكل المنحنى التكراري ،فإنه يأخذ أشكالا مختلفة ،فقديكون متماثلا، حيث يقع الوسط الحسابي والوسيط والمنوال على نقطة واحدة من المحور الأفقي للمعلم أي أن الوسط الحسابي يساوي الوسيط يساوي المنوال.

$$\bar{X} = M_e = M_o$$

إلا أنه في كثير من الحالات تكون بعض القيم كبيرة في البيانات فتؤثر على قيمة الوسط الحسابي وتجذبه إليها ،بحيث للمنحنى ذيل طويل جهة اليمين ومجمل التوزيع يتركز في الجهة اليسرى وبالتالي يكون الالتواء موجب والمنحنى ملتو نحو اليمين .أي الوسط الحسابي أكبر من الوسيط والوسيط أكبر من المنوال.

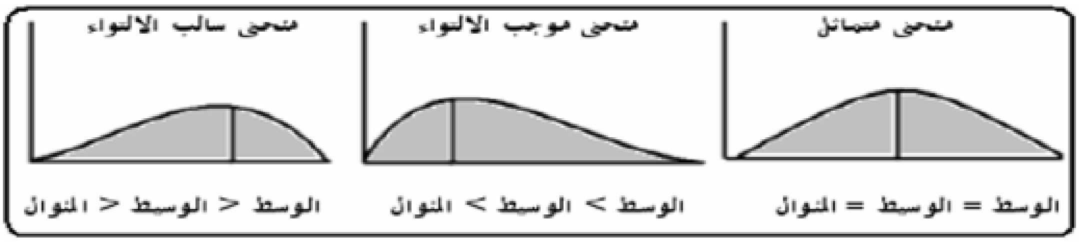
$$\bar{X} > M_e > M_o$$

وفي حال وجود قيم صغيرة متطرفة فإن تلك القيم تؤثر على قيمة الوسط الحسابي وتسحبه إليها ،فيكون المنحنى له ذيل طويل نحو اليسار ،وغالبية البيانات تتركز نحو اليمين وبالتالي يكون الالتواء سالب و المنحنى ملتو نحو اليسار. أي الوسط الحسابي أصغر من الوسيط والوسيط أصغر من المنوال .

$$\bar{X} < M <_e M_o$$

---

[1]محمد صبحي أبو صالح ،عدنان محمد عوض: مقدمة في الإحصاء ،جامعة اليرموك ،اربد االاردن ،1982،ص47



2–مقاييس الالتواء.

أ– مقياس بيرسون

$$P_1 = \frac{(\bar{X} - M_0)}{S_{(X)}}$$

مقياس بيرسون 2

$$P_2 = \frac{3(\bar{X} - M_e)}{S_{(X)}}$$

- إذا كانت قيمة P_1 و P_2 تساوي الصفر ،فإن المنحنى متماثل .
- إذا كانت قيمة P_1 و P_2 أكبر من الصفر ، فإن المنحنى ملتوي نحو اليمين .
- إذا كانت قيمة P_1 و P_2 أصغر من الصفر ، فإن المنحنى ملتوي نحو اليسار.

يعد مقياس بيرسون الثاني أدق من الأول

مقياس الالتواء الربيعي :يعتمد هذا المقياس على الربيعات ويحسب كمايلي :

$$y = \frac{Q_3 - 2M_e + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

- إذا كان $y = 0$ يكون التوزيع متماثل.
- إذا كان $y > 0$ يكون التوزيع ملتو نحو اليمين.
- إذا كان $y < 0$ يكون التوزيع ملتو نحو اليسار.

معامل فيشر للالتواء :يعتمد هذا المقياس على العزم الثالث حول للوسط الحسابي ويساوي مقسوما على مكعب الانحراف المعياري.

$$F = \frac{m_3}{{S_x}^3}$$

العزم الثالث حول الوسط الحسابي في حالة البيانات غير المبوبة :

$$m_3 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^3}{n}$$

العزم الثالث في حالة البيانات المبوبة :

$$m_3 = \frac{\sum (X_{ci} - \bar{X})^3}{\sum f_i}$$

- إذا كان $F=0$ يكون التوزيع متماثل .
- أذا كان $F > 0$ يكون التوزيع ملتو نحو اليمين .
- إذا كان $F <$ يكون التوزيع ملتو نحو اليسار.

مثال :أحسب معامل الالتواء بيرسون ومعامل الالتواء الربيعي للجدول التالي .

الفئات	F_i	X_{ci}	F_iX_i	$F_iX_{ci}{}^2$	F_i ↑
10-20	3	15	45	675	3
20-30	6	25	150	3750	9
30-40	10	35	350	12250	19
40-50	15	45	675	30375	34
50-60	8	55	440	24200	42
60-70	5	65	325	21125	47
70-80	3	75	225	16875	50
$\sum$	50		2210	109250	

الحل:

حساب الالتواء بقانون بيرسون:

$$\boldsymbol{P_1} = \frac{(\boldsymbol{\bar{X}} - \boldsymbol{M_0})}{\boldsymbol{S}_{(\boldsymbol{X})}}$$

حساب الوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(f_i.x_{ci})}{\Sigma f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{2210}{50} = 44{,}2$$

حساب المنوال :c* $\mathrm{M_0} = \mathrm{L_0} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right]$

$$M_0 = 40 + \left[\frac{5}{5+7}\right]*10$$

$$M_0 = 40,17$$

حساب الوسيط:

$$M_e = L_0 + \left[\frac{\frac{n}{2} - F_{1\uparrow}}{F_{Me}}\right] c *$$

$$M_e = 40 + \left[\frac{25-19}{15}\right] 10 = M_e = 44$$

حساب الانحراف المعياري:

$$S_{(x)} = \sqrt{\frac{\sum(f_i.xc_i{}^2)}{\sum f_i} - \bar{x}^2} \quad S_{(x)} = \sqrt{\frac{109250}{50} - \overline{44,2}^2}$$

$$S_{(x)} = 15,21$$

$$= \boldsymbol{P_1} = \frac{(\bar{X} - M_0)}{S_{(X)}}$$

$$0.002 = \boldsymbol{P_1} = \frac{(44,2 - 44,17)}{15,21}$$

قريب جدا من التماثل .

معامل الالتواء الربيعي:

$$y = \frac{Q_3 - 2M_e + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

$$Q_1 = L_0 + \left[\frac{\frac{n}{4} - f_{1\uparrow}}{F_{Q1}}\right] * C$$

$$Q_1 = L_0 + \left[\frac{12,5-9}{10}\right] * 10$$

33,5=

$$Q_3 = L_0 + \left[\frac{\frac{3n}{4} - f_{1\uparrow}}{F_{Q3}}\right] * C$$

$$54,38 = Q_3 = 50 + \left[\frac{37,5-34}{8}\right] * 10$$

معامل الالتواء الربيعي:

معامل الالتواء الربيعي:

$$y = \frac{Q_3 - 2M_e + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

$$y = \frac{54,38 - 2*44 + 33.5}{54.38 - 33.5} =$$

y=-0.005 قريب جدا من التماثل .

ملاحظة :نلاحظ أننا تحصلنا على نتائج مختلفة لمعاملات الالتواء ،وهذا لا يناقض بعضه ، إذ أن كل مقياس يقيس على أساس يخالف المعاملات الأحرى ، لذلك عند توزيعات مختلفة يجب استخدام المعامل ذاته عند مقارنة التوزيعات .

تمرين 2:أحسب الالتواء العزومي للجدول التالي :

20	17	14	11	8	5	x
2	3	4	6	6	5	fi

الحل:

F .Xi^2	F .x	$f_i(X_i-\bar{X})^3$	f	x
125	25	-1080	5	5
384	48	-162	6	8
726	66	0	6	11
784	56	108	4	14
867	51	864	3	17
800	40	1458	2	20
3686	286	972	26	

:

$$\bar{X}=\frac{286}{26}=11$$

$$s_x=\sqrt{\frac{3686}{26}-11^2}$$

4.56

$$m_3=\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{n}$$

$$m_3=\frac{972}{26}$$

$$m_3=37.38$$

$F = \frac{m_3}{{S_x}^3} = \frac{37.38}{4.56^3}$

$F = 0.394$

الالتواء موجب نحو اليمين

التفرطح

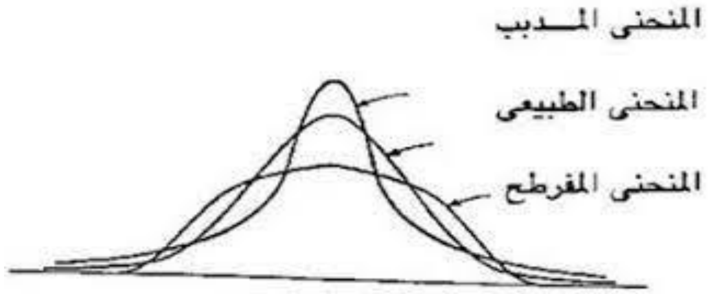
التفرطح: يشير التفرطح إلى درجة علو قمة التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي.

فعند تمثيل التوزيع التكراري في شكل منحنى ، قد يكون هذا المنحنى منبسط (مفرطح).أو مدبب،

فعندما يتركز عدد أكبر من القيم بالقرب من منتصف المنحنى ويقل في طرفيه ، يكون المنحنى مدبب.

وعندما يتركز عدد اكبر على طرفي المنحنى ويقل بالقرب من المنتصف ،يكون المنحنى مفرطح أو منبسط .

فالتوزيع ذو القمة العالية يسمى **مدبب**، وعلى العكس يسمى التوزيع ذو القمة المنبسطة مفرطحا وذلك قياسا إلى التوزيع المعتدل أو متوسط التفرطح.



ويمكن قياس التفرطح باستخدام عدد من الطرق ،ومنها قانون التفرطح باستخدام الربيعات والمؤينات وقانون التفرطح العزومي.

1–قانون التفرطح باستخدام الربيعات والمؤينات :

$$\boldsymbol{K_1 = \frac{1}{2} * \frac{Q_3 - Q_1}{C_{90} - C_{10}}}$$

إذا كان $K_1 = 0,263$ فإن المنحنى معتدل .

إذا كان $K_1 > 0,263$ فإن المنحنى مدبب.

إذا كان $K_1 < 0,263$ فإن المنحنى مفرطح.

قانون التفرطح العزومي : يعتمد قانون التفرطح العزومي على العزم الرابع حول الوسط الحسابي.

$$\boldsymbol{K_2 = \frac{m_4}{S_{(x)}{}^4}}$$

العزم الرابع في حالة البيانات غير المبوبة : $m_4 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^4}{n}$:

العزم الرابع في حالة البيانات المبوبة $m_4 = \frac{\sum F_i (X_i - \bar{X})^4}{\sum F_i}$

إذا كان $K_2 = 3$ كان منحنى التوزيع معتدلا.

إذا كان $K_2 > 3$ كان منحنى التوزيع مدببا.

إذا كان $K_2 < 3$ كان منحنى التوزيع مفرطحا.

خصائص المنحنى الطبيعي:

إذا كان لدينا القيم التالية : $X_1, X_2, X_3 \ldots \ldots X_n$ وكان $\bar{X}$ هو الوسط الحسابي لهذه القيم ، Sهو الانحراف المعياري لها ،يكون منحنى توزيع هذه القيم طبيعي ، إذا تحقق مايلي:

- 50% من هذه القيم تتراوح بين $\bar{X} \pm 2/3S$.
- 68% من هذه القيم تتراوح بين $\bar{X} \pm S$.
- 95% من هذه القيم تتراوح بين $\bar{X} \pm 2S$.
- 99.7% من هذه القيم تتراوح بين $\bar{X} \pm 3S$.

العزومي للجدول التالي . مثال :أحسب التفرطح المؤيني ومعامل التفرطح

F_i	الفئات
3	10-20
6	20-30
10	30-40
15	40-50
8	50-60

5	60-70
3	70-80
50	$\sum$

الحل:

حساب معامل التفرطح المؤيني :

$f_i(x_i-\bar{x})^4$	F_i ↑	$F_i{X_{ci}}^2$	F_iX_i	X_{ci}	F_i	الفئات
2180984.91	3	675	45	15	3	10-20
815372,6976	9	3750	150	25	6	20-30
71639,296	19	12250	350	35	10	30-40
6,144	34	30375	675	45	15	40-50
108839,1168	42	24200	440	55	8	50-60
935886,848	47	21125	325	65	5	60-70
2699753,5488	50	16875	225	75	3	70-80

6812482,5612		109250	2210		50	$\sum$

$$Q_1 = L_0 + \left[\frac{\frac{n}{4} - f_{1\uparrow}}{F_{Q1}}\right] * C$$

$$Q_1 = L_0 + \left[\frac{12{,}5-9}{10}\right] * 10$$

33,5

$$Q_3 = L_0 + \left[\frac{\frac{3n}{4} - f_{1\uparrow}}{F_{Q3}}\right] * C$$

$$Q_3 = 50 + \left[\frac{37{,}5 - 34}{8}\right] * 10$$

54,**38**

33,5

$$C_{90} = 70 + \left[\frac{45 - 42}{5}\right] * 10$$

$$C_{90} = 76$$

$$C_{10} = L_0 + \left[\frac{\frac{10n}{100} - \mathrm{f}_{1\uparrow}}{F_{c10}}\right] * C$$

$$C_{10} = 30 + \left[\frac{5-3}{6}\right] * 10$$

$$C_{10} = 33{,}3$$

$$\boldsymbol{K_1 = \frac{1}{2} * \frac{Q_3 - Q_1}{C_{90} - C_{10}}}$$

$$\boldsymbol{K_1 = \frac{1}{2} * \frac{54{,}38 - 33{,}5}{76 - 33{,}3}}$$

$$\boldsymbol{K_1 = \frac{1}{2} * \frac{20,88}{42,7}}$$

$$\boldsymbol{K_1 = 0,24}$$

ومنه المنحنى الناتج عن هذا التوزيع التكراري مفرطح

حساب معامل التفرطح العزمومي:

- ✓ **حساب الوسط الحسابي:**

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{\sum(\mathrm{f_i}.\mathrm{x}_{c\mathrm{i}})}{\sum \mathrm{f_i}}$$

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{2210}{50} = 44{,}2$$

✓ حساب الانحراف المعياري:

$$\boldsymbol{S_{(x)}} = \sqrt{\frac{\sum(\boldsymbol{f_i.xc_i}^2)}{\sum \boldsymbol{f_i}} - \overline{\boldsymbol{x}}^2} \quad \boldsymbol{S_{(x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathbf{109250}}{\mathbf{50}} - \mathbf{44,2^2}}$$

$$S_{(x)} = 15{,}21$$

✓ حساب العزم الرابع حول الوسط الحسابي

$$\boldsymbol{m_4} = \frac{\sum \boldsymbol{f_i}(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^4}{\sum \boldsymbol{f_i}}$$

$$\boldsymbol{m_4} = \frac{6812482{,}5612}{\mathbf{50}}$$

$$\boldsymbol{m_4} = \mathbf{136249, 65122}$$

$$\boldsymbol{K_2} = \frac{\boldsymbol{m_4}}{\boldsymbol{S_{(x)}}^4}$$

$$\boldsymbol{K_2} = \frac{\mathbf{136249{,}65122}}{\mathbf{15{,}21^4}}$$

$$\boldsymbol{K_2} = \frac{\mathbf{136249{,}65122}}{\mathbf{53520{,}0926}}$$

$$\boldsymbol{K_2} = \mathbf{2, 54}$$

المنحنى مفرطح

تمرين 2:أحسب معامل التفرطح العزومي للجدول التالي :

20	17	14	11	8	5	x
2	3	4	6	6	5	fi

الحل:

F .Xi^2	F .x	$f_i(X_i-\bar{X})^4$	f	x
125	25	6480	5	5
384	48	486	6	8
726	66	0	6	11
784	56	324	4	14
867	51	3888	3	17
800	40	13122	2	20
3686	286	24300	26	

:

$$\bar{X}=\frac{286}{26}=11$$

$$s_x=\sqrt{\frac{3686}{26}-11^2}$$

4.56

$$\boldsymbol{m_4 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^4}{\sum f_i}}$$

$$\boldsymbol{m_4 = \frac{24300}{26}}$$

$$\boldsymbol{m_4 = 934.62}$$

$k = \frac{m_4}{{S_x}^4} = \frac{934.62}{4.56^4}$

$$k = \frac{m_4}{{S_x}^4}$$

$\frac{934.62}{432,37}$

$$k = \frac{934,62}{4,56^4}$$

$$k = \frac{934,62}{432,37}$$

$$k = 2,16$$

منحنى مفرطح